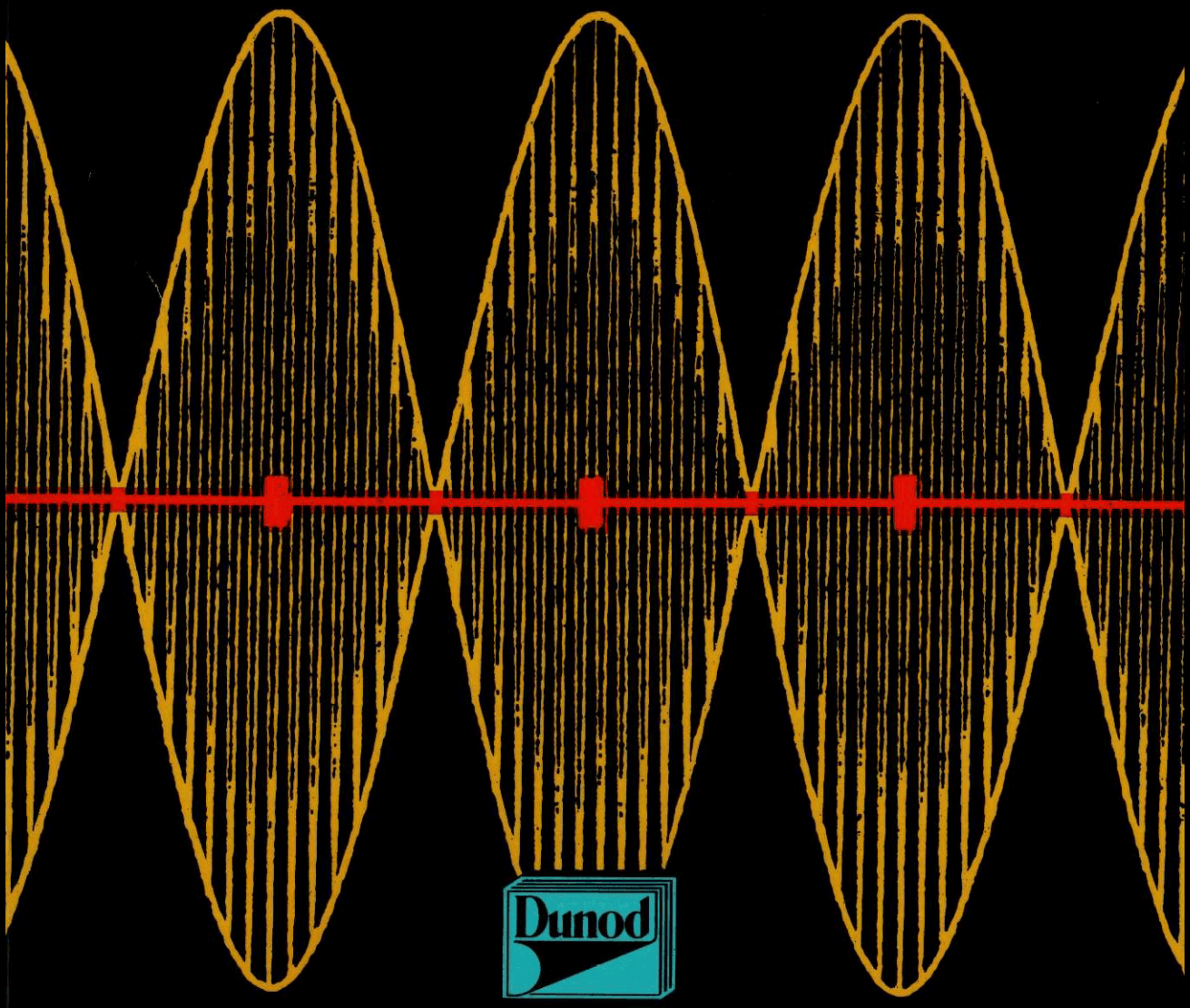
ELECTRONIQUE

F. MANNEVILLE - J. ESQUIEU

SYSTÈMES BOUCLÉS LINÉAIRES, DE COMMUNICATION ET DE FILTRAGE

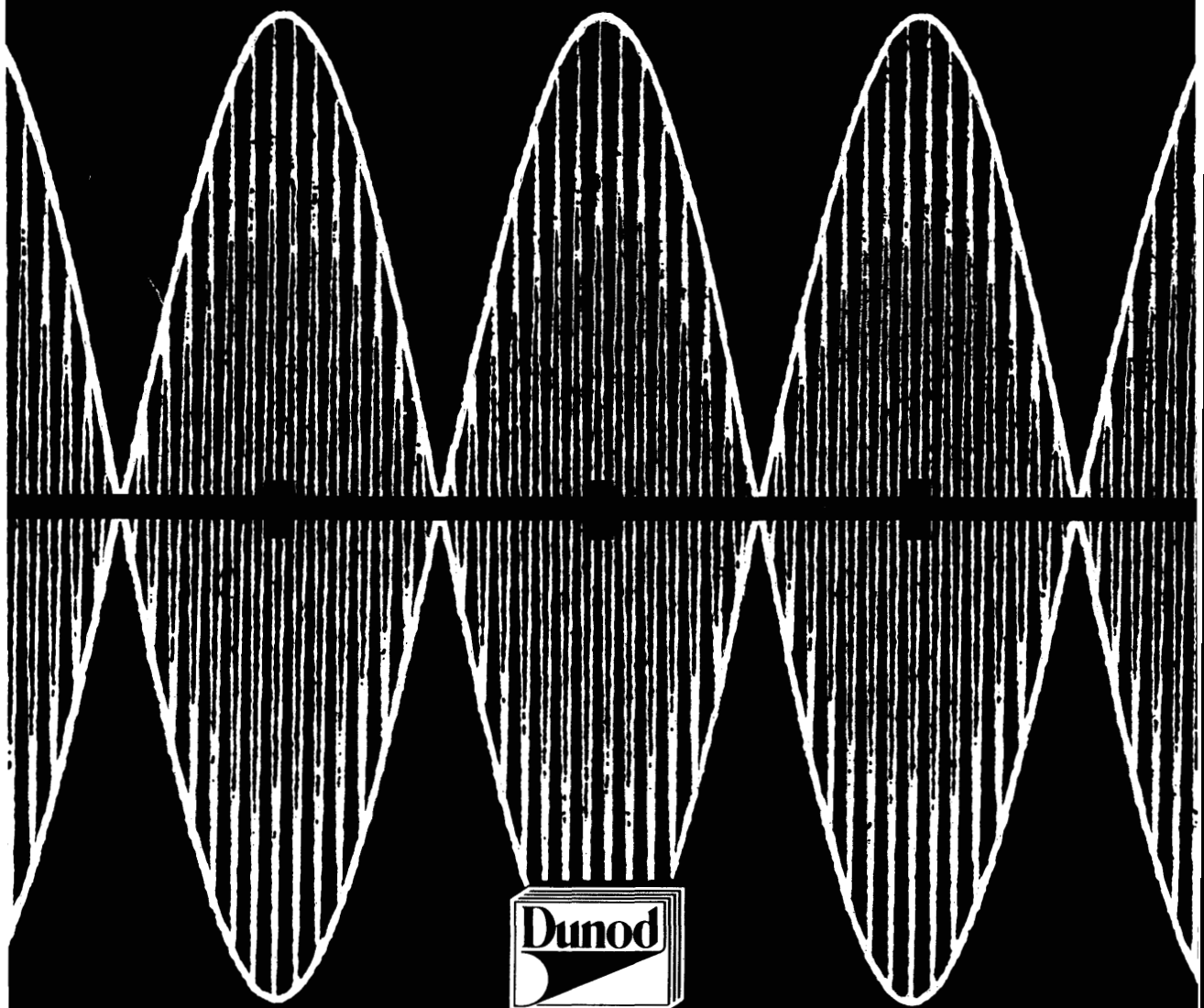


Dunod

ELECTRONIQUE

F. MANNEVILLE - J. ESQUIEU

SYSTÈMES BOUCLÉS LINÉAIRES DE COMMUNICATION ET DE FILTRAGE



Dunod

ELECTRONIQUE

SYSTÈMES BOUCLÉS LINÉAIRES, DE COMMUNICATION ET DE FILTRAGE

F. MANNEVILLE
IPR
Ancien élève de l'ENS Cachan
Agrégé de physique appliquée

J. ESQUIEU
Professeur au lycée de Brive
Ancien élève de l'ENS Cachan
Agrégé de physique appliquée

Classes de Techniciens supérieurs
Instituts Universitaires de Technologie
Classes préparatoires des lycées techniques
Formation continue

Dunod

table des matières

SYSTÈMES BOUCLÉS LINÉAIRES

Chapitre 1 : *Nécessité des systèmes en boucle fermée. Étude qualitative* 6

1 – Insuffisance des systèmes en boucle ouverte 6
2 – Système en boucle fermée 7
3 – Précision des systèmes bouclés . 3
4 – Stabilité des systèmes bouclés .. 8
5 – Équation fondamentale des systèmes bouclés 8

Chapitre 2 : *Contre-réaction* 9

1 – Définitions 9
2 – Propriétés fondamentales 9
3 – Analyse d'une contre-réaction . 11
4 – Résistance d'entrée 14
5 – Résistance de sortie 16
6 – Exemples de contre-réaction ... 17
Exercices 21

Chapitre 3 : *Asservissements linéaires* 23

1 – Définitions 23
2 – Influence des perturbations 23
3 – Exemples d'asservissement 24
Exercices 32

Chapitre 4 : *Stabilité des systèmes bouclés linéaires* 37

1 – Condition générale de stabilité . 37
2 – Critères de stabilité 38
3 – Marges de stabilité 46
Exercices 51

Chapitre 5 : *Précision des systèmes bouclés linéaires* 54

1 – Définitions 54
2 – Méthodes de calcul 55
3 – Précision d'un système de classe zéro 55
4 – Précision d'un système de classe un 56
5 – Tableau récapitulatif 57

Chapitre 6 : *Corrections d'un système bouclé* 58

1 – Problème 58
2 – Correction pôle dominant 58
3 – Correction proportionnelle et intégrale 62
4 – Correction proportionnelle et dérivée 67
5 – Correction proportionnelle intégrale et dérivée 70
6 – Correction par boucle de réaction secondaire 73
Exercices 74

Chapitre 7 : *Asservissements numériques* . 78

1 – Principe 78
2 – Stabilité 79
3 – Précisions 89
4 – Corrections 90
Exercices 96

Chapitre 8 : *Oscillateurs sinusoïdaux* 104

1 – Principe 104
2 – Oscillateur à déphasage 105
3 – Oscillateur à pont de Wien 106
4 – Forme *« générale »* d'un oscillateur 107
5 – Détermination de l'amplitude des oscillations 112
Exercices 115

Annexes : machines à courant continu 119

LES SYSTÈMES DE COMMUNICATION

Chapitre 1 : *Généralités* 124
1 – Onde progressive 124
2 – Transmission d'une information 124

Chapitre 2 : *Méthode de multiplication* ... 126
1 – Forme du signal 126
2 – Spectre du signal 126
3 – Production du signal 127
4 – Démodulation du signal 127

Chapitre 3 : *Modulation d'amplitude (A.M.).* 128
1 – Forme du signal A.M. 128
2 – Spectre du signal modulé en amplitude 128
3 – Production du signal A.M. 129
4 – Démodulation du signal A.M. . 130
5 – Rapport signal sur bruit 133
Exercices 137

Chapitre 4 : *Modulation bande latérale unique* 140
1 – Forme du signal B-L-U 140
2 – Spectre du signal B-L-U 140
3 – Production du signal B-L-U ... 140
4 – Démodulation du signal B-L-U 143
5 – Modulation bande latérale unique avec porteuse 144
6 – Rapport signal sur bruit 144
Exercices 145

Chapitre 5 : *Modulation de fréquence* 147
1 – Modulation de phase et modulation de fréquence 147
2 – Forme du signal modulé en fréquence 148
3 – Spectre du signal modulé sinusoïdalement en fréquence 148
4 – Encombrement fréquentiel du signal F.M. 149
5 – Production du signal F.M. 150
6 – Démodulation du signal F.M. . 155
7 – Rapport signal sur bruit 158
8 – Transmissions stéréophoniques 160
Exercices 161

Chapitre 6 : *Transmissions numériques* ... 164
1 – Principe 165
2 – Production du signal numérique 165
3 – Transmission du signal numérique 176
4 – Réception du signal numérique 179
5 – Rapport signal sur bruit 189
Exercices 190

SYSTÈMES DE FILTRAGE

Chapitre 1 : *Problème général du filtrage*. 194
1 – Gabarit 194
2 – Normalisation 194
3 – Différentes formes de réponse .. 195
4 – Filtre passe-haut 198
5 – Filtre passe-bande 200
Exercices 201

Chapitre 2 : *Filtres passifs* 203
1 – Filtre passif passe-bas 203
2 – Filtre passif passe-haut 206
3 – Filtre passif passe-bande 206
4 – Assistance par ordinateur 207
Exercices 209

Chapitre 3 : *Filtres actifs* 210
1 – Filtres actifs du premier ordre . 211
2 – Filtres actifs du second ordre .. 212
3 – Exemple de calcul 227
4 – Sensibilités 229
5 – Comparaison filtres actifs/filtres passifs 230
Exercices 231

Chapitre 4 : *Filtres numériques* 233
1 – Rappels et compléments 233
2 – Les filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.) 234
3 – Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I.) 249
Exercices 254

1 nécessité des systèmes en boucle fermée étude qualitative

1. INSUFFISANCE DES SYSTÈMES EN BOUCLE OUVERTE

Pour de nombreux systèmes, la grandeur de sortie x_S doit être une image fidèle et précise de la grandeur de commande x_E. C'est en particulier le cas pour :

• l'amplificateur de tension de la figure 1 : Les valeurs instantanées v_E et v_S des tensions d'entrée et de sortie doivent être liées par une relation de la forme

$$v_S = Av_E$$

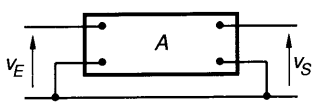


Fig. 1

où A est une constante, parfaitement définie et indépendante des conditions de fonctionnement;

• la commande de vitesse dont le schéma synoptique est donné à la figure 2 :

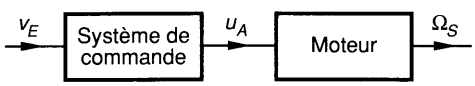


Fig. 2

À partir de la tension v_E, le système de commande élabore la tension d'alimentation u_A. Le rotor du moteur tourne à une vitesse Ω_S qui dépend de la tension u_A.

On souhaite que la relation entre la vitesse Ω_S et la tension v_E soit de la forme $\Omega_S = Kv_E$ où K est une constante parfaitement définie et indépendante des conditions de fonctionnement.

En pratique un certain nombre de phénomènes viennent perturber la précision et la fidélité des systèmes précédents.

• Pour la réalisation de l'amplificateur de la figure 1, les paramètres des éléments actifs (h_{21} pour les transistors bipolaires, g_m pour les transistors à effet de champ) sont susceptibles de fortes variations lorsqu'on passe d'un échantillon à un autre dans un même lot de composants. Dès lors, l'obtention d'une bonne précision sur l'amplification A nécessite un réglage au « coup par coup » qui s'avère délicat et onéreux.

De plus, la tension de sortie v_S dépend non seulement de la tension d'entrée v_E mais aussi d'autres grandeurs comme la température, le vieillissement des composants, la charge placée en sortie...

Ces grandeurs parasites, dont l'influence est souvent difficilement chiffrable, perturbent la fidélité de l'amplification.

• Considérant, le système de la figure 2, on montre (voir annexe page 119) qu'en négligeant l'inductance de l'induit, on peut décrire le fonctionnement du moteur à courant continu à flux constant, par le schéma de la figure 3.

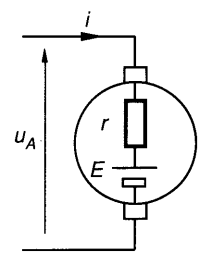


Fig. 3

Du point de vue énergétique, on y distingue :

• une puissance perdue par effet Joule dans la résistance r :

$$P_J = ri^2$$

• une puissance électromagnétique ($P_e = Ei$), fournie à la force électromotrice E, et qui est transformée en puissance mécanique ($P_m = \mathcal{C}_m\Omega_S$, où Ω_S est la vitesse de rotation du rotor et $\mathcal{C}_m$ le couple moteur).

D'où le bilan énergétique :

$$u_A i = \mathcal{C}_m\Omega_S + ri^2.$$

Sachant (voir annexe page 119) que le couple moteur est directement proportionnel au courant d'induit i, ($\mathcal{C}_m = ki$), nous en déduisons par élimination de i, une relation de la forme $\Omega_S = f(u_A, \mathcal{C}_m)$. Ainsi, la vitesse Ω_S du rotor dépend, non seulement de la tension d'alimentation u_A, mais aussi du couple moteur $\mathcal{C}_m$, qui, à l'équilibre, est égal au couple résistant $\mathcal{C}_r$ (pertes mécaniques comprises).

Le système de la figure 2 ne pourra donc pas être décrit, comme nous le souhaitions, par une relation de la forme $\Omega_S = Kv_E$, à moins de prévoir un dispositif qui détecte le couple résistant $\mathcal{C}_r$ et qui modifie la tension u_A de façon adéquate; mais la mise en œuvre d'un tel dispositif est relativement complexe et ne corrigerait que les perturbations dues au couple résistant.

Les systèmes précédents (figures 1 et 2) sont dits en **boucle ouverte** car la grandeur d'entrée x_E, confondue avec la grandeur de commande, est indépendante de la grandeur de sortie x_S. Pour ces systèmes, la grandeur de sortie x_S dépend non seulement de la grandeur d'entrée x_E, mais aussi d'un certain nombre de perturbations qu'on peut considérer comme des entrées secondaires, $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Le fonctionnement de tels dispositifs peut être symbolisé par le schéma de la figure 4.

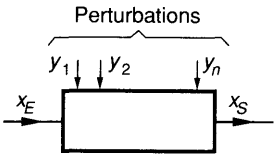
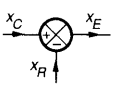


Fig. 4

2. SYSTÈME EN BOUCLE FERMÉE

On réalise un système en boucle fermée en soustrayant de la grandeur de commande x_C une grandeur x_R qui dépend de la grandeur de sortie x_S. Le système est alors décrit par la figure 5, appelé **schéma bloc** sur lequel le symbole



traduit l'équation $x_E = x_C - x_R$.

La grandeur d'entrée x_E de la chaîne directe est ainsi distincte de la grandeur de commande x_C.

Le système en boucle fermée permet de limiter l'influence des perturbations. Supposons en effet

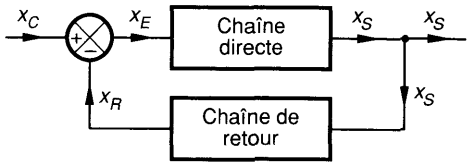


Fig. 5

que, la grandeur de commande x_C étant constante, une perturbation provoque une diminution de la grandeur de sortie x_S. La chaîne de retour fait alors apparaître une diminution de la grandeur de retour x_R. Compte tenu de $x_C = \text{Cte}$ et de $x_E = x_C - x_R$, la grandeur d'entrée x_E augmente, provoquant ainsi un accroissement de la grandeur de sortie qui s'opose à l'effet de la perturbation.

Remarquons que ce résultat est obtenu *sans qu'il soit nécessaire de connaître l'origine de la perturbation.*

3. PRÉCISION DES SYSTÈMES BOUCLÉS

Une bonne précision du système implique que la grandeur de sortie x_S soit une image précise et fidèle de la grandeur de commande x_C : ($x_S = Kx_C$). Considérant l'équation $x_E = x_C - x_R$, le résultat souhaité peut être obtenu avec $x_E \ll x_C$ et $x_R \approx x_C = \dfrac{x_S}{K}$. Ces conditions permettent de préciser l'organisation du système.

- En regroupant les équations

$$\begin{cases} x_E \ll x_C \\ x_S = Kx_C \end{cases}$$

nous pouvons conclure que la *chaîne directe*, répondant à une grandeur d'entrée infinitésimale par une grandeur de sortie non nulle, devra posséder une *grande sensibilité*. En particulier, si cette chaîne possède un amplificateur, la précision du système sera d'autant meilleure que l'amplification sera plus grande.

- Considérant que le facteur K, intervenant dans la relation $x_S = Kx_C$, provient essentiellement de la chaîne de retour par $x_R = \dfrac{x_S}{K}$, les qualités requises pour la *chaîne de retour* sont la *fidélité et la précision.* Les qualités de précision et de fidélité résultant de la structure de la chaîne de retour, les perturbations qui altèrent le fonctionnement de la chaîne directe auront un effet négligeable sur le comportement du système bouclé.

4. STABILITÉ DES SYSTÈMES BOUCLÉS

Nous avons considéré, jusqu'à présent, que les réponses de la chaîne directe et de la chaîne de retour étaient instantanées; c'est rarement le cas des systèmes physiques. Considérons par exemple, l'asservissement de vitesse dont le schéma synoptique est donné à la figure 6.

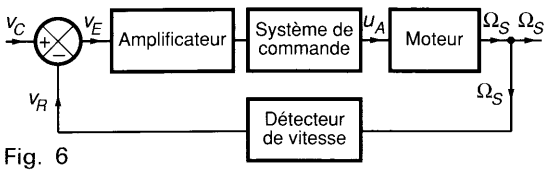


Fig. 6

Ce dispositif est obtenu, à partir de celui de la figure 2, en bouclant le système par un détecteur de vitesse qui délivre une tension v_R fonction de la vitesse de rotation Ω_S. Un amplificateur permet en outre de régler la sensibilité de la chaîne directe.

Par suite de l'inertie de la partie tournante, la mise en vitesse du moteur n'est pas instantanée et la vitesse de rotation Ω_S est en retard sur la tension d'alimentation u_A. Compte tenu de leur structure, le détecteur de vitesse et le système de commande sont susceptibles de faire apparaître des retards supplémentaires.

Supposons qu'une perturbation provoque une diminution de la vitesse Ω_S. Le système réagit par une augmentation de la tension d'alimentation u_A, retardée dans le temps, et d'autant plus importante que l'amplification est plus grande. Si l'amplification est trop forte, et compte tenu des retards de transmission, la vitesse de rotation peut alors augmenter au-delà de sa valeur d'équilibre. Le système réagit alors, en provoquant, dans les instants qui suivent, une diminution de la tension u_A et le cycle recommence. Le système est donc susceptible d'oscillations spontanées, et le risque d'instabilité est d'autant plus grand que la sensibilité de la chaîne directe est plus forte, ce qui est en contradiction avec l'obtention d'une bonne précision.

Nous retiendrons que la *stabilité et la précision sont deux exigences contradictoires.* L'étude quantitative nous le confirmera.

5. ÉQUATION FONDAMENTALE DES SYSTÈMES BOUCLÉS

Nous limiterons notre étude aux systèmes pour lesquels les grandeurs x_C, x_E, x_R et x_S sont liées par des équations différentielles linéaires à coefficients constants (systèmes linéaires). A cet effet, les grandeurs x_C, x_E, x_R et x_S pourront être, dans certains cas, des petites variations autour des valeurs d'équilibre (il est ainsi possible de linéariser l'étude de dispositifs non linéaires).

Toute dérivation par rapport au temps se traduisant sur les transmittances de Laplace par une multiplication par $\underline{P}$, les transformées de Laplace des grandeurs x_E, x_C, x_R et x_S sont liées par des relations de la forme

$$\underline{X}_S(\underline{P}) = \underline{A}(\underline{P})\underline{X}_E(\underline{P}) \quad \text{et} \quad \underline{X}_R(\underline{P}) = \underline{B}(\underline{P})\underline{X}_S(\underline{P}).$$

$\underline{A}(\underline{P})$ et $\underline{B}(\underline{P})$ sont respectivement les transmittances des chaînes directe et de retour et le schéma bloc du système est donné à la figure 7.

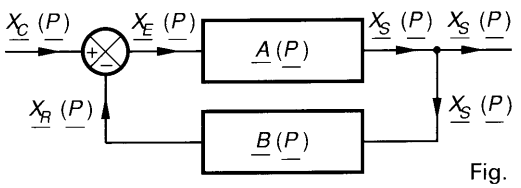


Fig. 7

A partir des équations $\begin{cases} \underline{X}_S(\underline{P}) = \underline{A}(\underline{P})\underline{X}_E(\underline{P}) \\ \underline{X}_R(\underline{P}) = \underline{B}(\underline{P})\underline{X}_S(\underline{P}) \\ \underline{X}_E(\underline{P}) = \underline{X}_C(\underline{P}) - \underline{X}_R(\underline{P}) \end{cases}$

il vient :

$$\boxed{\frac{\underline{X}_S(\underline{P})}{\underline{X}_C(\underline{P})} = \frac{\underline{A}(\underline{P})}{1 + \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})}}$$

$\underline{A}_R(\underline{P}) = \dfrac{\underline{A}(\underline{P})}{1 + \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})}$ est la transmittance du système en boucle fermée.

Remarquons que les grandeurs x_C, x_E, x_R et x_S sont quelconques, cependant **l'homogénéité impose que les grandeurs x_C, x_E et x_R soient de même nature.**

REMARQUE

Pour certains systèmes toute la grandeur de sortie est ramenée sur l'entrée $[\underline{B}(\underline{P}) = 1]$. *On dit que le système est à* retour unitaire.

2 contre-réaction

1. DÉFINITIONS

On réalise une contre-réaction sur un amplificateur en ramenant sur l'entrée sous forme de tension ou de courant, une partie d'une des grandeurs de sortie (tension ou courant).

Nous considérerons dans ce chapitre, sauf avis contraire, que l'amplificateur et le réseau de réaction ne comportent pas d'éléments réactifs. Dans ces conditions, les transferts de la chaîne directe et de la chaîne de réaction seront décrits par des nombres réels (*fig.* 1).

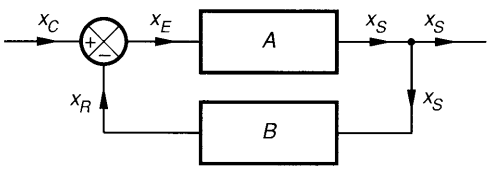


Fig. 1

Les grandeurs x pouvant être des tensions ou des courants, quatre cas peuvent se présenter suivant la nature de x_E et de x_S.

- En entrée, la soustraction d'une tension se fait en série, celle d'un courant en parallèle.
- En sortie, la détection d'une tension se fait en parallèle, celle d'un courant en série.

Ce qui conduit aux dénominations suivantes :

x_S est la tension de sortie v_S

- x_E est la tension d'entrée v_E.

La contre-réaction est dite **tension-tension** ou **parallèle-série.**

$A = \dfrac{v_S}{v_E} = A_V$ est l'amplification en tension de la chaîne directe;

$B = \dfrac{v_R}{v_S}$ est la fonction de transfert en tension de la chaîne de retour.

- x_E est le courant d'entrée i_E.

La contre-réaction est dite **tension-courant** ou **parallèle-parallèle.**

$A = \dfrac{v_S}{i_E} = R_m$ est la transrésistance de la chaîne directe;

$B = \dfrac{i_R}{v_S}$ est la transconductance de la chaîne de retour.

x_S est le courant de sortie i_S

- x_E est la tension d'entrée v_E.

La contre-réaction est dite **courant-tension** ou **série-série.**

$A = \dfrac{i_S}{v_E} = G_m$ est la transconductance de la chaîne directe;

$B = \dfrac{v_R}{i_S}$ est la transrésistance de la chaîne de retour.

- x_E est le courant d'entrée i_E.

La contre-réaction est dite **courant-courant** ou **série-parallèle.**

$A = \dfrac{i_S}{i_E} = A_I$ est l'amplification en courant de la chaîne directe;

$B = \dfrac{i_R}{i_S}$ est la fonction de transfert en courant de la chaîne de retour.

2. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Elles résultent de l'équation fondamentale des systèmes bouclés qui s'écrit ici

$$A_R = \frac{x_S}{x_C} = \frac{A}{1 + AB}.$$

2.1. STABILISATION DU TRANSFERT *A*

Supposons que, par suite des variations des paramètres des éléments actifs, le transfert A de la chaîne directe varie de $\mathrm{d}A$. Le transfert A_R du système en boucle fermée varie de $\mathrm{d}A_R$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}A_R}{\mathrm{d}A} = \frac{1 + AB - AB}{(1 + AB)^2} = \frac{A_R}{A} \times \frac{1}{1 + AB}.$$

Soit $$\frac{\mathrm{d}A_R}{A_R} = \frac{\mathrm{d}A}{A} \times \frac{1}{1 + AB}.$$

Si le facteur $1 + AB$ est égal à 10, la variation relative de A_R est dix fois plus faible que celle de A. A la limite, si $AB \gg 1$, A_R, peu différent de $1/B$, est indépendant des éléments actifs de la chaîne directe. Les dispositifs utilisant des amplificateurs opérationnels correspondent à ce type de fonctionnement.

2.2. ÉLARGISSEMENT DE LA BANDE PASSANTE

Étudions le système bouclé en régime sinusoïdal permanent, en supposant que la chaîne directe possède des éléments réactifs. Dans ces conditions, le transfert direct $\underline{A}$ est complexe et nous supposerons qu'il s'écrit

$$\underline{A} = A_0 \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_H}} \times \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}$$

avec ω_H (pulsation de coupure haute) $\gg \omega_B$ (pulsation de coupure basse).

2.2.1. Côté hautes fréquences

Pour les pulsations supérieures à ω_H, $(\omega > \omega_H \gg \omega_B)$, le transfert de la chaîne directe devient peu différent de

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_H}}.$$

La fonction de transfert du système bouclé s'écrit alors

$$\underline{A_R} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{AB}} = \frac{A_0}{1 + A_0 B + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_H}}$$

$$= \frac{A_0}{1 + A_0 B} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_H(1 + A_0 B)}}.$$

La pulsation de coupure côté hautes fréquences s'écrit $\omega_{HR} = \omega_H(1 + A_0 B)$.

Le diagramme de Bode des transferts avec et sans contre-réaction est donné à la figure 2. Remarquons que ω_{HR} est la pulsation pour laquelle l'horizontale d'ordonnée $20 \lg \dfrac{A_0}{1 + A_0 B}$ coupe la droite de pente -20 dB/décade. En effet, soit ω'_H cette pulsation, on peut écrire

$$20 \lg A_0 - 20 \lg \frac{A_0}{1 + A_0 B} = -20[\lg \omega_H - \lg \omega'_H]$$

soit $\omega'_H = \omega_H(1 + A_0 B) = \omega_{HR}$.

2.2.2. Côté basses fréquences

Pour des pulsations inférieures à ω_B, $(\omega < \omega_B \ll \omega_H)$, le transfert de la chaîne directe devient peu différent de

$$\underline{A} = A_0 \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}.$$

Le transfert du système bouclé s'écrit alors

$$\underline{A_R} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{AB}} = A_0 \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B} + BA_0\,\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}}$$

$$= \frac{A_0}{1 + A_0 B} \times \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}(1 + A_0 B)}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_B}(1 + A_0 B)}.$$

La pulsation de coupure, côté basses fréquences, s'écrit $\omega_{BR} = \dfrac{\omega_B}{1 + A_0 B}$.

Les diagrammes de Bode des transferts avec et sans contre-réaction sont donnés à la figure 2.

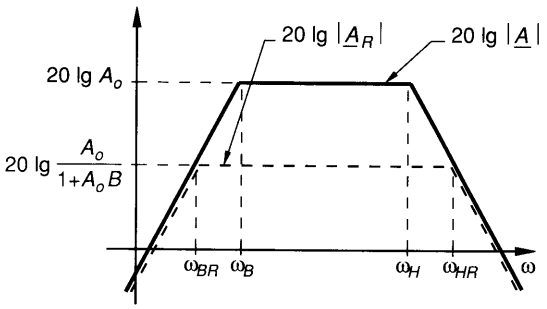


Fig. 2

On démontrerait, comme précédemment, que ω_{BR} est la pulsation pour laquelle l'horizontale $20 \lg \dfrac{A_0}{1 + A_0 B}$ coupe la droite de pente + 20 dB/décade.

2.3. DIMINUTION DU TAUX DE DISTORSION HARMONIQUE

Rappelons que les éléments actifs ne sont linéaires que dans la mesure où la portion de caractéristique décrite par le point de fonctionnement est assimilable à une droite.

Appliquons à l'entrée de la chaîne directe un signal sinusoïdal $x_E = X_1 \cos \omega t$.

Si le signal de sortie est important, la non-linéarité des éléments actifs conduit à un signal de sortie non sinusoïdal.

Nous supposerons que la non-linéarité est suffisamment faible pour que :

- le théorème de superposition soit applicable avec une bonne approximation;
- la seule perturbation apportée au signal de sortie consiste en l'addition d'un harmonique de pulsation 2ω.

La chaîne directe peut alors être décrite par le schéma de la figure 3, sur lequel, le signal de sortie s'écrit :

$$x_S = AX_1 \cos \omega t + X_2 \cos 2\omega t.$$

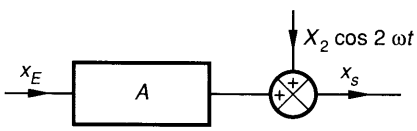


Fig. 3

Le taux de distorsion harmonique du signal de sortie s'écrit alors

$$\eta = \frac{X_2}{AX_1}.$$

Appliquons une contre-réaction à la chaîne directe et augmentons le signal de commande de façon à obtenir en sortie la même valeur du fondamental : $AX_1 \cos \omega t$.

Les éléments actifs se trouvent alors sensiblement dans les mêmes conditions de fonctionnement, et le terme de pulsation 2ω généré par la non-linéarité conserve sa valeur $X_2 \cos 2\omega t$.

Le théorème de superposition étant applicable avec une bonne approximation, le schéma équivalent pour l'harmonique 2 est donné figure 4.

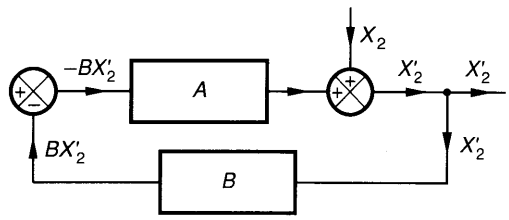


Fig. 4

Soit X'_2 l'amplitude de l'harmonique 2 en sortie du système bouclé. Les relations décrites par le schéma conduisent à

$$X'_2 = X_2 - ABX'_2$$

soit $X'_2(1 + AB) = X_2$.

Le taux de distorsion harmonique du signal de sortie du système bouclé s'écrit :

$$\eta' = \frac{X'_2}{AX_1} = \frac{X_2}{AX_1(1 + AB)} = \frac{\eta}{1 + AB}.$$

Si $1 + AB = 10$, le taux de distorsion harmonique est divisé par 10.

3. ANALYSE D'UNE CONTRE-RÉACTION

La principale difficulté de cette analyse consiste à identifier :

- la chaîne directe avec sa résistance d'entrée et son générateur de Thévenin équivalent en sortie (*fig.* 5);

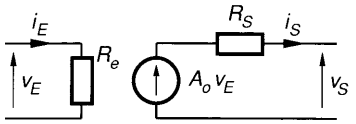


Fig. 5

• la chaîne de retour.

Le transfert direct A devra tenir compte de la charge apportée par l'entrée du réseau de réaction.

Le transfert de réaction B devra tenir compte de la charge apportée par la résistance du générateur et par la résistance d'entrée de l'amplificateur. Dans ces conditions la chaîne directe pourra être différente de l'amplificateur sur lequel est appliquée la contre-réaction. Nous serons amenés à y intégrer des éléments comme la résistance du générateur de commande ou comme la résistance de sortie du réseau de réaction.

3.1. EN ENTRÉE DE L'AMPLIFICATEUR

Soient R_g la résistance du générateur de commande,
r_{sr} la résistance de sortie du réseau de réaction,
r_e la résistance d'entrée de l'amplificateur.

• Si la grandeur de réaction est une tension, la sortie du réseau de réaction et le générateur seront décrits par leur schéma de Thévenin, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 6.

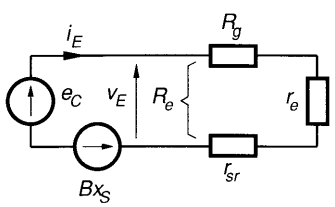


Fig. 6

Nous définirons la résistance d'entrée R_e de la chaîne directe par $R_e = R_g + r_e + r_{sr}$.

• Si la grandeur de réaction est un courant, la sortie du réseau de réaction et le générateur seront décrits par leur schéma de Norton, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 7.

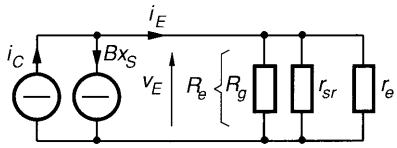


Fig. 7

Nous définirons la résistance d'entrée R_e de la chaîne directe par la mise en parallèle de R_g, r_{sr} et r_e.

3.2. EN SORTIE DE L'AMPLIFICATEUR

Soient r_s la résistance de sortie de l'amplificateur,
r_{er} la résistance d'entrée du réseau de réaction,
R_C la résistance de charge.

• Si la grandeur détectée en sortie est le courant, la résistance d'entrée du réseau de réaction est en série avec la sortie ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 8.

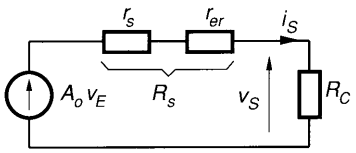


Fig. 8

Nous définirons la résistance de sortie de la chaîne directe par $R_s = r_s + r_{er}$.

• Si la grandeur détectée en sortie est la tension, la résistance d'entrée du réseau de réaction est en parallèle sur la sortie, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 9.

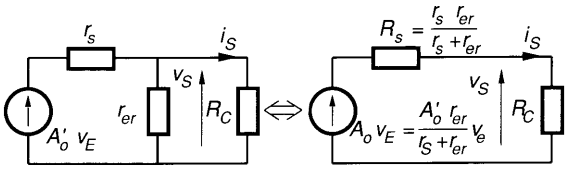


Fig. 9

Nous définirons la résistance de sortie R_s de la chaîne directe par la mise en parallèle de r_s et de r_{er}.

La synthèse des figures 6, 7, 8, 9 conduit au schéma équivalent général du système bouclé (*fig.* 10).

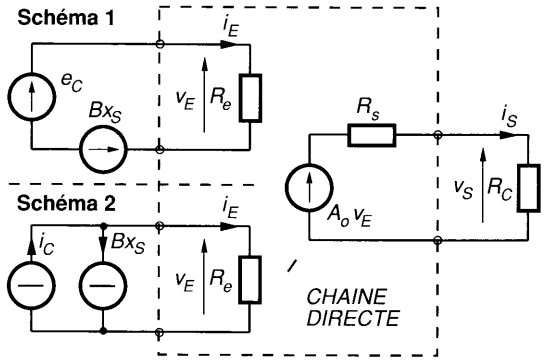


Fig. 10

Si la grandeur ramenée en entrée est une tension on utilisera le schéma 1.

Si la grandeur ramenée en entrée est un courant on utilisera le schéma 2.

Si la grandeur détectée en sortie est la tension, $x_S = v_S$.

Si la grandeur détectée en sortie est le courant, $x_S = i_S$.

3.3. MÉTHODE D'ANALYSE D'UNE CONTRE-RÉACTION

L'observation des figures 1 et 10 conduit à la méthode d'analyse suivante :

Identifier la topologie du système

- La grandeur détectée en sortie est-elle une tension ou un courant?
- La grandeur ramenée en entrée est-elle une tension ou un courant?

Décrire le générateur de commande

- par un schéma de Thévenin si la grandeur ramenée en entrée est une tension;
- par un schéma de Norton si la grandeur ramenée en entrée est un courant.

Identifier x_C, x_E, x_R et x_S

- x_S est la grandeur de sortie déterminée précédemment;
- x_C, x_E et x_R sont déterminées en écrivant sur le schéma complet la relation $x_E = x_C - x_R$.

Calculer sur le schéma complet $A = \dfrac{x_S}{x_E}$ et $B = \dfrac{x_R}{x_S}$

On dispose alors du schéma bloc complet.

Identifier la résistance d'entrée R_e de la chaîne directe

- Dans le cas où la grandeur ramenée est une tension, R_e est la résistance soumise à la tension $v_E = v_C - Bx_S$.
- Dans le cas où la grandeur ramenée est un courant, R_e est la résistance parcourue par le courant $i_E = i_C - Bx_S$.

Identifier R_s

C'est la résistance vue entre les points de sortie lorsque la charge R_C est déconnectée et lorsque $v_E = 0$.

REMARQUE

Dans certains cas, il peut être intéressant de remplacer au préalable le réseau de réaction par un schéma équivalent qui isole son entrée et sa sortie. Considérons, par exemple, la contre-réaction décrite par le schéma de la figure 11.

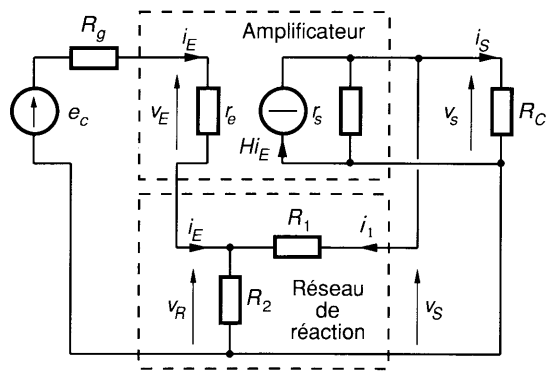


Fig. 11

A partir des équations :

$$\begin{cases} i_E + i_1 = \dfrac{v_R}{R_2} \\ v_S - v_R = R_1 i_1 \end{cases}$$

il vient :

$$\begin{cases} v_R = v_S - R_1 i_1 = v_S - R_1\left(\dfrac{v_R}{R_2} - i_E\right) \\ i_1 = \dfrac{v_S}{R_1} - \dfrac{v_R}{R_1} = \dfrac{v_S}{R_1} - \dfrac{R_2}{R_1}\left(i_E + i_1\right) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} v_R = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v_S + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_E \\ i_1 = \dfrac{v_S}{R_1 + R_2} - \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i_E \end{cases}$$

Ce qui conduit, pour le réseau de réaction, au schéma équivalent de la figure 12.

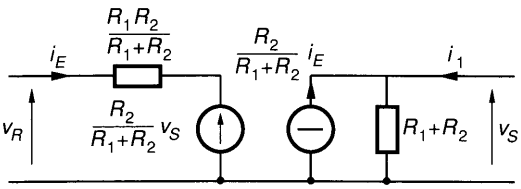


Fig. 12

En reportant ce schéma sur la figure 11, nous obtenons le schéma de la figure 13.

Il s'agit d'une contre-réaction tension-tension. En identifiant les figures 10 et 13, il vient :

$R_e = r_e + R_g + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ résistance d'entrée de la chaîne directe;

$B = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ transmittance de la chaîne de retour;

$R_s = \dfrac{r_s(R_1 + R_2)}{r_s + R_1 + R_2}$ résistance de sortie de la chaîne directe;

$A = \left(H + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\dfrac{R_s}{R_e} \times \dfrac{R_C}{R_s + R_C}$ transmittance de la chaîne directe.

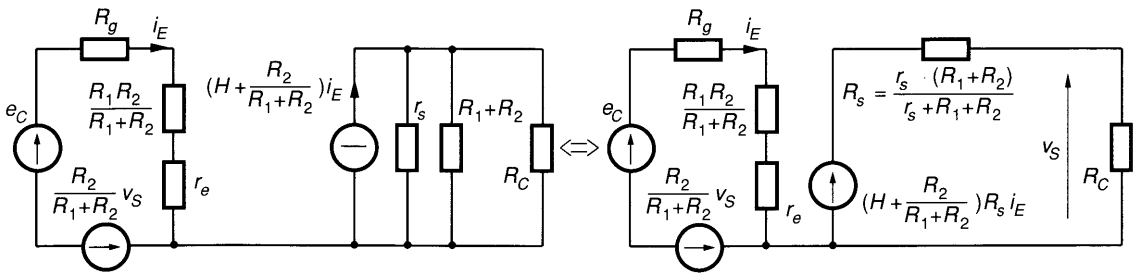


Fig. 13

4. RÉSISTANCE D'ENTRÉE

4.1. ÉTUDE QUALITATIVE

La résistance d'entrée du système bouclé est la résistance vue par le générateur de commande.

- Si le signal ramené en entrée est une tension qui s'oppose à la tension du générateur, il diminue le courant fourni par le générateur et augmente la résistance d'entrée.
- Si le signal ramené en entrée est un courant qui s'oppose au courant délivré par le générateur ($i_E = i_C - i_R$ soit $i_C = i_E + i_R$), il augmente le courant délivré par le générateur et diminue la résistance d'entrée.

4.2. CONTRE-RÉACTION TENSION-TENSION

Le schéma correspondant à ce type de contre-réaction (*fig.* 14) provient du schéma général de la figure 10, sur lequel l'entrée correspond au schéma 1 avec $x_S = v_S$.

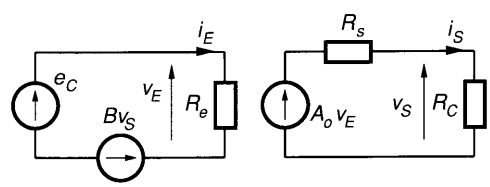


Fig. 14

Le transfert de la chaîne directe est le gain en tension $A = A_V = \frac{v_S}{v_E} = A_0 \frac{R_C}{R_s + R_C}$. Le générateur de contre-réaction maintient à ses bornes la tension $Bv_s = BAv_E = BAR_e i_E$.

Cette tension étant proportionnelle au courant i_E qui le traverse, on peut remplacer le générateur de tension Bv_S par la résistance ABR_e.

La résistance d'entrée de l'amplificateur avec contre-réaction est donc

$$\boldsymbol{R_{er} = R_e(1 + AB).}$$

4.3. CONTRE-RÉACTION COURANT-TENSION

Le schéma correspondant à ce type de contre-réaction (*fig.* 15) provient du schéma général de la figure 10, sur lequel l'entrée correspond au schéma 1 avec $x_S = i_S$.

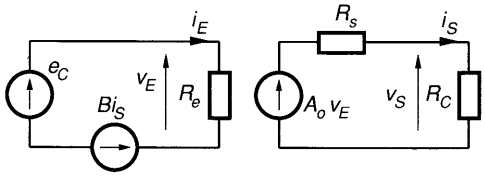


Fig. 15

Le transfert de la chaîne directe est la transconductance

$$A = G_M = \frac{i_S}{v_E} = \frac{A_0}{R_s + R_C}.$$

Le générateur de contre-réaction maintient à ses bornes la tension $Bi_S = BAv_E = BAR_e i_E$.

Cette tension étant porportionnelle au courant i_E qui le traverse, on peut remplacer le générateur de tension Bi_S par la résistance ABR_e.

La résistance d'entrée de l'amplificateur avec contre-réaction est donc

$$\boldsymbol{R_{er} = R_e(1 + AB).}$$

4.4. CONTRE-RÉACTION TENSION-COURANT

Le schéma correspondant à ce type de contre-réaction (*fig.* 16) provient du schéma général de la figure 10, sur lequel l'entrée correspond au schéma 2 avec $x_S = v_S$.

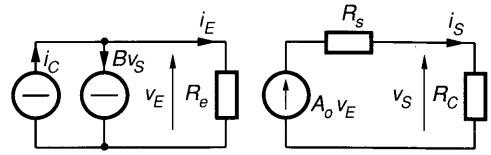


Fig. 16.

Le transfert de la chaîne directe est la transrésistance $A = R_M = \frac{v_S}{i_E} = A_0 R_e \frac{R_C}{R_C + R_s}$.

Le générateur de contre-réaction impose dans sa branche le courant $Bv_S = BAi_E = \frac{BA}{R_e} v_E$.

Ce courant étant proportionnel à la tension v_E à ses bornes, on peut remplacer le générateur Bv_S par la résistance $\frac{R_e}{AB}$.

La résistance d'entrée de l'amplificateur avec contre-réaction résulte de la mise en parallèle des résistances R_e et $\frac{R_e}{AB}$, soit

$$R_{er} = \frac{R_e^2/AB}{R_e + R_e/AB}$$

$$\boldsymbol{R_{er} = \frac{R_e}{1 + AB}}$$

4.5. CONTRE-RÉACTION COURANT-COURANT

Le schéma correspondant à ce type de contre-réaction (*fig.* 17) provient du schéma général de la figure 10, sur lequel l'entrée correspond au schéma 2 avec $x_S = i_S$.

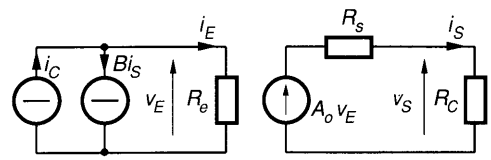


Fig. 17.

Le transfert de la chaîne directe est le gain en courant

$$A = A_I = \frac{i_S}{i_E} = \frac{A_0 R_e}{R_C + R_s}.$$

Le générateur de contre-réaction impose dans sa branche le courant $Bi_S = BAi_E = \frac{BA}{R_e} v_E$.

Ce courant étant proportionnel à la tension v_E à ses bornes, on peut remplacer le générateur de courant Bi_S par la résistance $\frac{R_e}{AB}$.

La résistance d'entrée de l'amplificateur avec contre-réaction résulte de la mise en parallèle des résistances R_e et $\frac{R_e}{AB}$, soit

$$R_{er} = \frac{R_e}{1 + AB}.$$

5. RÉSISTANCE DE SORTIE

5.1. ÉTUDE QUALITATIVE

La résistance de sortie est la résistance du générateur de Thévenin équivalent au système bouclé pour l'alimentation de la charge R_C. On la calcule en déconnectant la charge R_C et en remplaçant le générateur de commande e_C ou i_C par sa résistance interne.

- Si le signal détecté en sortie est la tension, la tension de sortie est stabilisée et dépend moins des variations de la charge : la résistance de sortie diminue.
- Si le signal détecté en sortie est le courant, le courant de sortie est stabilisé : la résistance de sortie augmente.

5.2. CONTRE-RÉACTION TENSION-TENSION

Le schéma sur lequel est effectué le calcul de la résistance de sortie (*fig.* 18) est obtenu à partir du schéma de la figure 14 en remplaçant le générateur de commande e_C par un court-circuit.

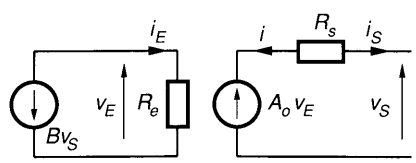


Fig. 18.

La résistance de sortie est obtenue par

$$R_{sr} = \frac{v_S}{i} = \frac{v_S}{v_S - A_0 v_E} \times R_s = \frac{v_S}{v_S + A_0 B v_S} \times R_s$$

soit $$R_{sr} = \frac{R_s}{1 + A_0 B}.$$

En remarquant que A_0 est la limite du transfert stabilisé $A = A_V = A_0 \times \frac{R_C}{R_s + R_C}$ lorsque la résistance R_C tend vers l'infini, il vient :

$$R_{sr} = \frac{R_s}{1 + A_\infty B}, \qquad \text{avec} \quad A_\infty = \lim_{R_C \to \infty} A.$$

5.3. CONTRE RÉACTION TENSION-COURANT

Le schéma correspondant au calcul de la résistance de sortie (*fig.* 19) est obtenu à partir du schéma de la figure 16 en remplaçant le générateur de commande i_C par un circuit ouvert.

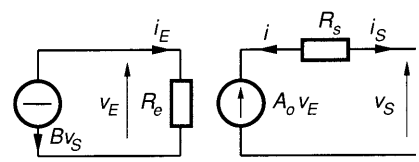


Fig. 19.

La résistance de sortie est obtenue par

$$R_{sr} = \frac{v_S}{i} = \frac{v_S}{v_S - A_0 v_E} \times R_s$$

$$= \frac{v_s}{v_s + A_0 B R_e v_s} \times R_s$$

soit $$R_{sr} = \frac{R_s}{1 + A_0 R_e B}.$$

En remarquant que $A_0 R_e$ est la limite du transfert stabilisé

$$A = R_M = A_0 R_e \frac{R_C}{R_s + R_C}$$

lorsque la résistance R_C tend vers l'infini, il vient :

$$R_{sr} = \frac{R_s}{1 + A_\infty B} \qquad \text{avec} \quad A_\infty = \lim_{R_C \to \infty} A.$$

5.4. CONTRE-RÉACTION COURANT-TENSION

Le schéma correspondant au calcul de la résistance de sortie (*fig.* 20) est obtenu à partir du schéma de la figure 15 en remplaçant le générateur de commande e_C par un court-circuit.

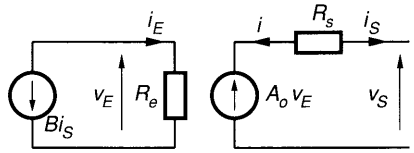


Fig. 20.

A partir de l'équation

$$v_s = R_s i + A_0 v_E = R_s i - A_0 B i_S = R_s i + A_0 B i,$$

on détermine la résistance de sortie

$$R_{sr} = \frac{v_S}{i} = R_s\left(1 + \frac{A_0 B}{R_s}\right).$$

En remarquant que $\dfrac{A_0}{R_s}$ est la limite du transfert stabilisé $A = G_M = \dfrac{A_0}{R_s + R_C}$ lorsque R_C tend vers zéro, il vient :

$$\boldsymbol{R_{sr} = R_s[1 + A_{CC}B]}, \quad \textbf{avec} \quad A_{CC} = \lim_{R_C \to 0} A.$$

5.5. CONTRE-RÉACTION COURANT-COURANT

Le schéma correspondant au calcul de la résistance de sortie (*fig.* 21) est obtenu à partir du schéma de la figure 17, en remplaçant le générateur de commande i_C par un circuit ouvert.

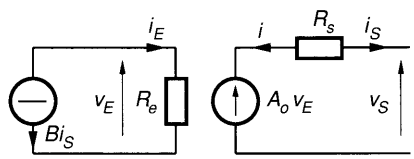


Fig. 21.

A partir de l'équation

$$v_s = R_s i + A_0 v_E = R_s i - A_0 B R_e i_s$$
$$= R_s i + A_0 B R_e i,$$

on détermine la résistance de sortie

$$R_{sr} = \frac{v_s}{i} = R_s\left(1 + \frac{A_0 B R_e}{R_s}\right)$$

En remarquant que $\dfrac{A_0 R_e}{R_s}$ est la limite du transfert stabilisé $A = A_I = \dfrac{A_0 R_e}{R_C + R_s}$, lorsque R_C tend vers zéro, il vient :

$$\boldsymbol{R_{sr} = R_s[1 + A_{CC}B]}, \quad \textbf{avec} \quad A_{CC} = \lim_{R_C \to 0} A.$$

REMARQUE

Les résultats concernant la résistance de sortie ont été établis en supposant que le transfert B de la chaîne de réaction est indépendant de la résistance de charge. Si tel n'est pas le cas, le calcul de la résistance de sortie doit être effectué directement sur le schéma complet.

6. EXEMPLES DE CONTRE-RÉACTION

6.1. CONTRE-RÉACTION TENSION-TENSION

Soit le dispositif de la figure 22 dont le schéma équivalent pour les petits signaux est donné à la figure 23.

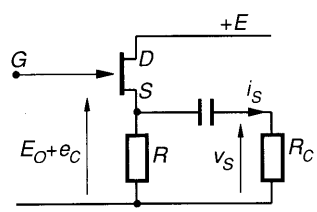


Fig. 22.

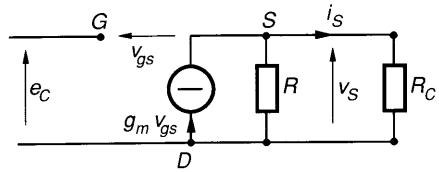


Fig. 23.

La grandeur détectée en sortie est la tension : $x_S = v_S$.

L'équation $e_C = v_{gS} + v_S$ permet d'identifier les signaux du schéma bloc :

$$x_E = v_{gS}, \qquad x_R = v_S.$$

Sur la figure 23 on détermine

$$A = \frac{x_S}{x_E} = \frac{v_S}{v_{gS}} = g_m \frac{RR_C}{R + R_C} \quad \text{et} \quad B = \frac{x_R}{x_S} = 1.$$

Le schéma bloc correspondant est donné à la figure 24.

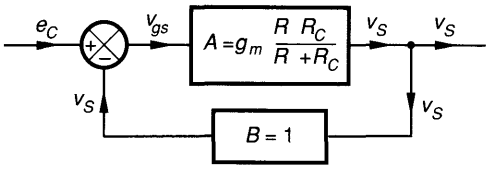


Fig. 24.

La résistance d'entrée de la chaîne directe, qui est la résistance soumise à la tension v_{gS}, est infinie.

La résistance de sortie de la chaîne directe, qui est la résistance vue entre les points de sortie lorsque la charge R_C est déconnectée et lorsque $x_E = v_{gS} = 0$ est $R_s = R$.

Nous en déduisons les résultats suivants pour le système bouclé :

Amplification en tension

$$A_{VR} = g_m \frac{\dfrac{RR_C}{R + R_C}}{1 + g_m \dfrac{RR_C}{R + R_C}}.$$

Résistance d'entrée $R_{er} = R_e[1 + AB]$: elle est infinie.

Résistance de sortie $R_{sr} = \dfrac{R_s}{1 + A_\infty B} = \dfrac{R}{1 + g_m R}$

car $\quad A_\infty = \lim_{R_C \to \infty} A = g_m R.$

Ces résultats peuvent être vérifiés simplement par une étude directe de la figure 23.

6.2. CONTRE-RÉACTION COURANT-TENSION

Soit le dispositif de la figure 25 dont le schéma équivalent pour les petits signaux est donné à la figure 26.

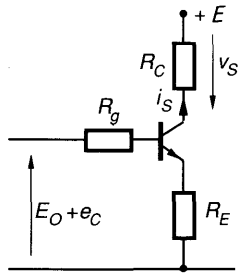


Fig. 25.

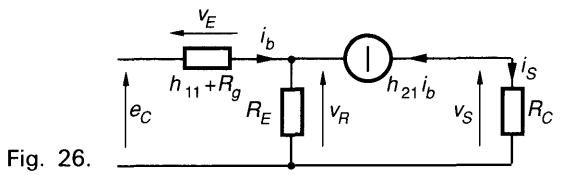


Fig. 26.

La grandeur détectée en sortie est le courant i_S.

L'équation $e_C = v_E + v_R$ permet d'identifier les signaux du schéma bloc

$$x_E = v_E, \qquad x_R = v_R.$$

Sur la figure 26, en négligeant 1 devant h_{21}, on détermine

$$A = G_M = \frac{i_S}{v_E} = -\frac{h_{21}}{R_g + h_{11}}$$

et $\quad B = \dfrac{v_R}{i_S} = -R_E.$

Le schéma bloc correspondant est donné à la figure 27.

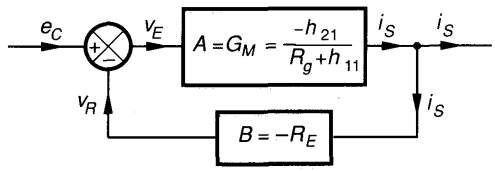


Fig. 27.

La résistance d'entrée de la chaîne directe, qui est la résistance soumise à la tension v_E est $R_e = R_g + h_{11}$.

La résistance de sortie de la chaîne directe, qui est la résistance vue entre les points de sortie lorsque $v_E = 0$ est infinie car la condition $v_E = 0$ impose $i_b = 0$ et le générateur $h_{21} i_b$ est un circuit ouvert.

Nous en déduisons les résultats suivants pour le système bouclé :

Transconductance :

$$G_{MR} = \frac{i_s}{e_C} = -\frac{h_{21}}{R_g + h_{11} + h_{21} R_E}.$$

Comme $v_S = R_C i_S$, l'amplification en tension s'écrit

$$A_{VR} = \frac{v_s}{e_C} = -\frac{h_{21} R_C}{R_g + h_{11} + h_{21} R_E};$$

Résistance d'entrée :

$R_{er} = R_e(1 + AB) = R_g + h_{11} + h_{21} R_E$;

Résistance de sortie : $R_{sr} = R_s(1 + BA_{CC})$. Elle est infinie.

6.3. CONTRE-RÉACTION TENSION-COURANT

Soit le schéma de la figure 28, sur lequel l'amplificateur opérationnel à une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle et une amplification en tension A_0. Le schéma équivalent du montage est donné à la figure 29.

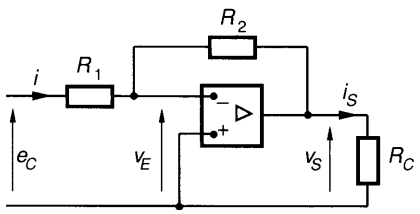


Fig. 28.

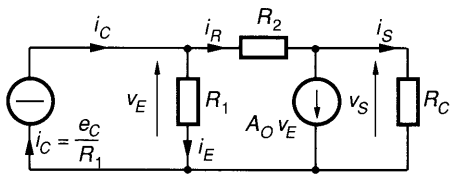


Fig. 29.

La grandeur détectée en sortie est la tension :

$$x_S = v_S.$$

A partir de l'équation $i_C = i_E + i_R$, on détermine les grandeurs du schéma bloc

$$x_E = i_E, \qquad x_R = i_R.$$

Sur la figure 29, on détermine

$$A = \frac{v_S}{i_E} = -A_0 R_1,$$

$$B = \frac{i_R}{v_S} = \frac{v_E - v_S}{v_S}\frac{1}{R_2} = -\frac{1 + A_0}{A_0}\frac{1}{R_2}.$$

Le schéma bloc correspondant est donné à la figure 30.

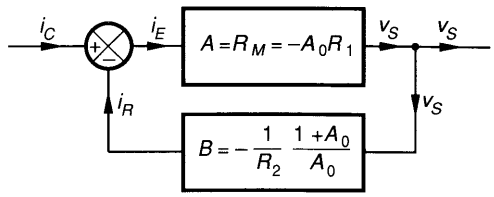


Fig. 30.

La résistance d'entrée de la chaîne directe qui est la résistance parcourue par le courant i_E est

$$R_e = R_1.$$

La résistance de sortie de la chaîne directe qui est la résistance vue entre les points de sortie lorsque $v_E = 0$ est nulle car le générateur de tension $A_0 v_E$ est alors un court-circuit.

Nous en déduisons les résultats suivants pour le système bouclé :

Transrésistance :

$$R_{MR} = \frac{v_S}{i_C} = -\frac{A_0 R_1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}(1 + A_0)}.$$

Comme $e_C = R_1 i_C$ l'amplification en tension s'écrit :

$$A_{VR} = \frac{v_S}{e_C} = -\frac{A_0 R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)}$$

Si A_0 devient infini, $A_{VR} = -\dfrac{R_2}{R_1}$, qui est bien l'amplification en tension du montage inverseur.

Résistance d'entrée :

$$R_{er} = \frac{R_e}{1 + BA} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)}.$$

Si A_0 devient infini, cette résistance devient nulle, ce qui semble incompatible avec la résistance d'entrée du montage inverseur qui est égale à R_1. Il n'en est rien. En effet, la tension d'entrée v_E du système bouclé est distincte de la tension d'entrée e_C du montage inverseur. On peut écrire

$$i = \frac{e_C - v_E}{R_1} \qquad (fig.\ 28)$$

$$v_E = R_{er} i_C = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)} \times \frac{e_C}{R_1}$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)} e_C \qquad (fig.\ 29)$$

Soit $i = \dfrac{e_C}{R_1}\left[1 - \dfrac{R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)}\right]$

$$= e_C \frac{(1 + A_0)}{R_2 + R_1(1 + A_0)}.$$

Ce qui correspond à la résistance d'entrée

$$\frac{e_C}{i} = \frac{R_2 + R_1(1 + A_0)}{(1 + A_0)}.$$

Si A_0 devient infini, cette résistance tend bien vers R_1.

Résistance de sortie : $R_{sr} = \dfrac{R_s}{1 + BA_\infty} = 0.$

6.4. CONTRE-RÉACTION COURANT-COURANT

Soit le schéma de la figure 31 dont le schéma équivalent pour les petits signaux est donné à la figure 32.

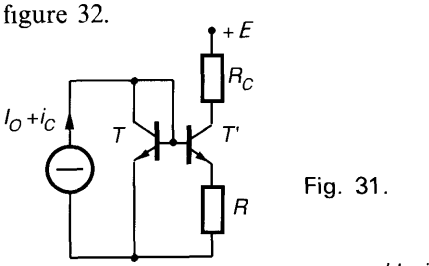


Fig. 31.

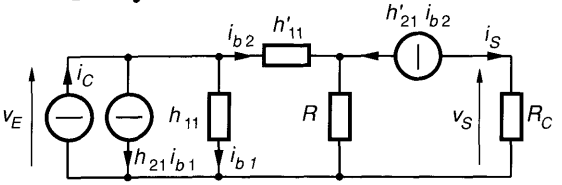


Fig. 32.

La grandeur détectée en sortie est le courant : $x_S = i_S$.

A partir de l'équation $i_C = (h_{21} + 1)i_{b_1} + i_{b_2}$, on détermine les grandeurs du schéma bloc

$$x_E = i_E = (h_{21} + 1)i_{b_1}, \qquad x_R = i_{b_2}.$$

(Ce n'est pas la seule hypothèse possible.)

Sur la figure 32 on détermine :

- $A = \dfrac{i_S}{i_E} = \dfrac{-h'_{21}}{1 + h_{21}} \dfrac{i_{b_2}}{i_{b_1}}$;

à partir de l'équation

$$h_{11} i_{b_1} = [h'_{11} + (h'_{21} + 1)R] i_{b_2}$$

il vient :

$$A = -\frac{h'_{21}}{1 + h_{21}} \times \frac{h_{11}}{h'_{11} + (h'_{21} + 1)R}.$$

- $B = \dfrac{x_R}{x_S} = \dfrac{i_{b_2}}{i_S} = -\dfrac{1}{h'_{21}}.$

Le schéma bloc correspondant au système bouclé est donné à la figure 33.

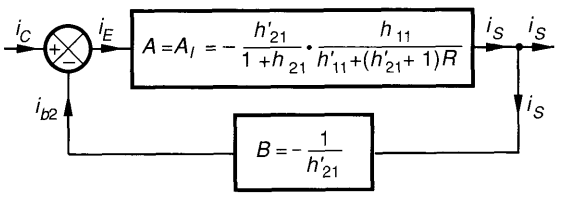


Fig. 33.

La résistance d'entrée, qui est la résistance parcourue par le courant $i_E = (1 + h_{21})i_{b_1}$ est égale à

$$R_e = \frac{v_E}{i_E} = \frac{h_{11} i_{b_1}}{(1 + h_{21})i_{b_1}} = \frac{h_{11}}{1 + h_{21}}.$$

La résistance de sortie, qui est la résistance vue entre les points de sortie lorsque $v_E = 0$, est infinie car, le courant i_{b_2} étant nul, le générateur de courant $h'_{21} i_{b_2}$ est un circuit ouvert.

Nous en déduisons les résultats suivants pour le système bouclé :

Amplification en courant :

$$A_{IR} = \frac{i_S}{i_C} = -\frac{h_{11} h'_{21}}{(1 + h_{21})[h'_{11} + (h'_{21} + 1)R] + h_{11}}$$

Si les deux transistors T et T' sont identiques (*fig.* 31) et si $R = 0$, on retrouve le schéma d'un « miroir de courant » et il vient :

$$\frac{i_S}{i_C} = -\frac{h_{21}}{2 + h_{21}} \approx -1.$$

Résistance d'entrée :

$$R_{er} = \frac{R_e}{1 + AB} = \frac{h_{11}}{1 + h_{21}} \times \frac{(1 + h_{21})[h'_{11} + (h'_{21} + 1)R]}{(1 + h_{21})[h'_{11} + (1 + h'_{21})R] + h_{11}} = \frac{h_{11}[h'_{11} + (h'_{21} + 1)R]}{(1 + h_{21})[h'_{11} + (h'_{21} + 1)R] + h_{11}}.$$

Pour un *miroir de courant*, $R = 0$, $h_{21} = h'_{21}$, $h_{11} = h'_{11}$, la résistance d'entrée devient

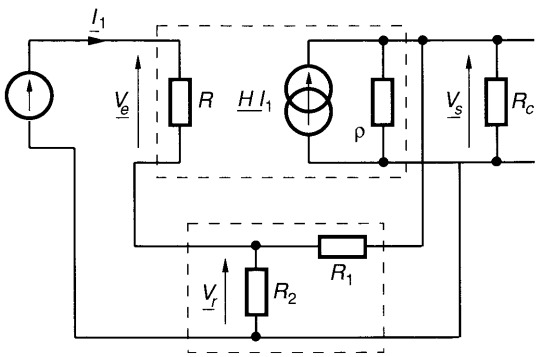
$$R_{er} = \frac{h_{11}}{2 + h_{21}}.$$

Résistance de sortie : $R_{sr} = R_s(1 + BA_{CC})$: elle est infinie.

EXERCICES

1. Amplificateur à réaction négative

On considère l'amplificateur représenté à la figure 1 où l'on a distingué l'amplificateur et le réseau de réaction. Le générateur d'attaque est un générateur sinusoïdal de fréquence variable.



On donne $\underline{H} = \dfrac{H_0}{\left(1 + \mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$.

$100 \leqslant H_0 \leqslant 500$; $f_0 = 1$ kHz; $R = 1$ kΩ; $\rho = 1$ kΩ; $R_1 = R_C = 10$ kΩ; $R_2 = 2$ kΩ.

Fig. 1.

1° Montrer que le réseau de réaction peut être représenté par le schéma de la figure 2. Calculer les valeurs littérales puis numériques de p, q, α et β.

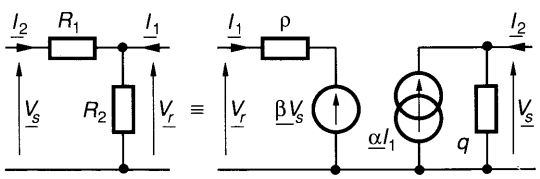


Fig. 2.

2° Donner le schéma complet de l'amplificateur tenant compte de la présence du réseau de réaction.

3° Mettre le schéma de l'amplificateur bouclé sous la forme fonctionnelle représentée à la figure 3. Déterminer $\underline{T}$ et $\underline{K}$ après avoir précisé la nature de $\underline{E}$, $\underline{E}_r$, $\underline{X}$ et $\underline{S}$. Que devient $\underline{T}$ si l'on suppose $|\alpha| \ll |\underline{H}|$.

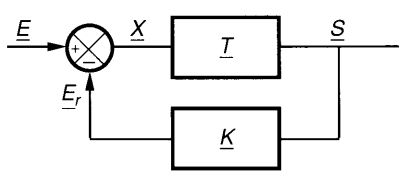


Fig. 3.

4° Calculer, aux fréquences basses, les résistances d'entrée et de sortie de l'amplificateur non bouclé mais tenant compte de la présence du réseau de réaction. En déduire les résistances d'entrée et de sortie de l'amplificateur bouclé.

5° Déterminer l'amplification $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ de l'amplificateur non bouclé. Représenter sa phase et son module dans le plan de Bode dans les cas extrêmes.

6° Calculer la transmittance en boucle fermée $\underline{T}'(\mathrm{j}f)$ et représenter son module dans le même système d'axes que précédemment.

2. 1° On considère le montage de la figure 1.

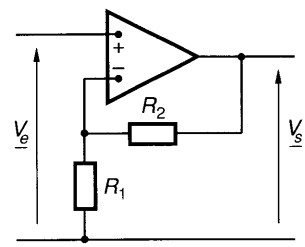


Fig. 1.

En supposant l'amplificateur opérationnel idéal, calculer $\dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ en fonction de R_1 et R_2.

2° L'approximation faite en supposant l'amplification infinie n'est valable que pour un signal d'entrée V_e continu ou de fréquence basse. Soit $\underline{A}$ la transmittance complexe de l'amplificateur opérationnel. La figure 2 donne le schéma électrique équivalent de l'amplificateur opérationnel en régime sinusoïdal.

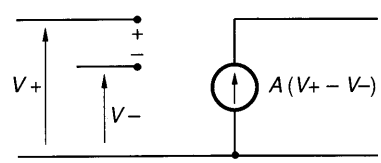


Fig. 2.

Pour le montage de la figure 1, établir le schéma fonctionnel ci-dessous, en précisant les grandeurs d'entrée et de sortie des chaînes directe et de retour.

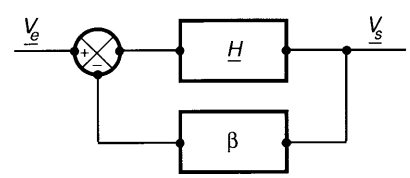


Fig. 3.

Déterminer $\underline{H}$ et β (établir la relation entre V^- et V_s, R_1, R_2).

3° Soit $\underline{A} = \dfrac{A_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

Pour les applications numériques on prendra :

$A_0 = 10^5$; $f_0 = 10$ Hz; $R_1 = 1$ kΩ; $R_2 = 99$ kΩ.

a) Calculer : $\underline{A'} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$. Mettre le résultat sous la forme :

$$\underline{A'} = \frac{A'_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_0}}.$$

b) Montrer que, compte tenu des valeurs numériques, A'_0 ne dépend pratiquement que de R_1 et R_2.

c) Tracer dans le même système d'axes (diagramme de Bode) :

$$G(f) = 20 \lg |\underline{A}| \quad \text{et} \quad G'(f) = 20 \lg |\underline{A'}|.$$

d) V_e est l'échelon de tension de hauteur E (*fig.*4); $V_s = 0$ pour $t < 0$. On prendra $E = 20$ mV. Donner et justifier l'équation différentielle permettant de déterminer $V_s(t)$.

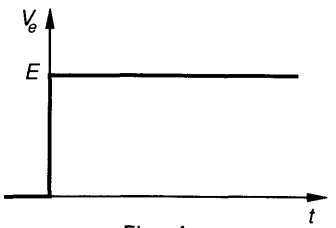


Fig. 4.

Tracer la représentation graphique de $V_s(t)$.

3. L'amplificateur opérationnel de l'exercice 2 a maintenant pour transmittance :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

Pour les applications numériques on prendra :

$$A_0 = 10^5; \quad f_1 = 100 \text{ kHz}; \quad f_2 = 1\,000 \text{ kHz};$$
$$R_1 = 1\,\text{k}\Omega;$$
$$R_2 = 99\,\text{k}\Omega.$$

1° Calculer $\underline{A'} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$; mettre sous la forme :

$$\underline{A'} = \frac{A'_0}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Calculer numériquement m et ω_0.

2° Tracer dans le même système d'axes (diagramme de Bode)

$$G(f) = 20 \lg |\underline{A}| \quad \text{et} \quad G'(f) = 20 \lg |\underline{A'}|.$$

Pour $G'(f)$, on précisera les asymptotes et le maximum.

3° V_e est l'échelon de hauteur E (fig. 4 exercice 2); à $t = 0$, $v_S = dv_S/dt = 0$. Établir l'équation différentielle de v_S. Résoudre cette équation et tracer l'allure de $v_S(t)$.

4° Pour améliorer la réponse en fréquence de cet amplificateur on diminue la pulsation ω_1 soit $f_1 = 1\,000$ Hz.

Tracer dans les mêmes axes (diagramme de Bode) :

$$G(f) = 20 \lg |\underline{A}| \quad \text{et} \quad G'(f) = 20 \lg |\underline{A'}|.$$

3 asservissements linéaires

Pour un asservissement, les grandeurs x_C, x_R, x_E, x_S (*fig.* 1) peuvent être des grandeurs physiques quelconques : courant, tension mais aussi, vitesse, déplacement, phase, fréquence, température, etc.

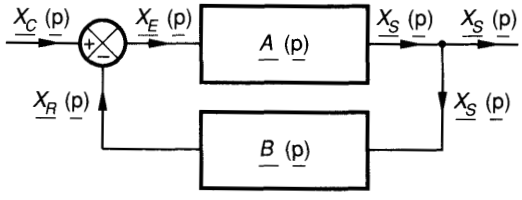


Fig. 1

Pour un asservissement linéaire, les transmittances $\underline{A}(\underline{P})$ et $\underline{B}(\underline{P})$ sont des fractions rationnelles en $\underline{P}$.

1. DÉFINITIONS

– Le système est dit en *boucle ouverte*, si on ouvre la boucle au niveau de la sortie de la chaîne de retour.

Dans ces conditions il vient

$$\underline{X}_C(\underline{P}) = \underline{X}_E(\underline{P}) \quad \text{et} \quad \underline{X}_R(\underline{P}) = \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})\underline{X}_C(\underline{P}).$$

La transmittance $\underline{T}(\underline{P}) = \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})$ est appelée **transmittance en boucle ouverte** ou **transmittance de boucle.**

– D'une manière générale, la transmittance en boucle ouverte peut se mettre sous la forme

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}^{\alpha}} \times \frac{1 + b_1\underline{P} + b_2\underline{P}^2 + \ldots}{1 + a_1\underline{P} + a_2\underline{P}^2 + \ldots},$$

où C, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., α sont des constantes.

Nous montrerons que les qualités du système bouclé dépendent fortement du coefficient α (nombre de mises en facteur de $\underline{P}$ au dénominateur). α est appelé **la classe** ou le **type** de l'asservissement.

2. INFLUENCE DES PERTURBATIONS

Soit le système en boucle ouverte dont le comportement, vis-à-vis des petites variations autour de l'état d'équilibre, est décrit par le schéma bloc de la figure 2.

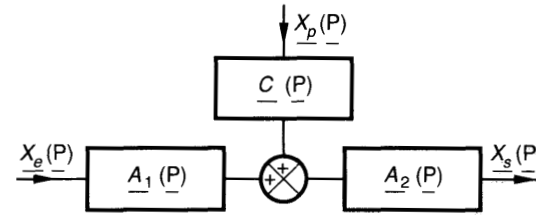


Fig. 2

Les petites variations x_s de la grandeur de sortie, dépendent, non seulement des petites variations x_e de la grandeur d'entrée (confondue ici avec la grandeur de commande) mais aussi des petites variations x_p de la perturbation. Pour un signal d'entrée constant ($x_e = 0$), le comportement du système est d'autant meilleur que la variation x_p de la perturbation engendre une variation plus faible de la grandeur de sortie x_s.

A partir du schéma de la figure 2, on écrit, pour $\underline{X}_e(\underline{P}) = 0$:

$$\underline{X}_s(\underline{P}) = \underline{C}(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})\underline{X}_p(\underline{P}).$$

Pour h_0 de $x_p\left(\underline{X}_p(\underline{P}) = \frac{h_0}{\underline{P}}\right)$, échelon d'amplitude, la transformée de Laplace $\underline{X}_s(\underline{P})$ de la variation x_0 de la grandeur de sortie s'écrit :

$$\underline{X}_s(\underline{P}) = \underline{C}(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})\frac{h_0}{\underline{P}}.$$

Après un régime transitoire, l'erreur résultant de la perturbation se fixe à une valeur ε_0 donnée par le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_0 = \lim_{\underline{P}\to 0} \underline{P}\underline{X}_s(\underline{P}) = h_0 \lim_{\underline{P}\to 0} [\underline{C}(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})]$$

Bouclons le système de la figure 2 conformément au schéma de la figure 3.

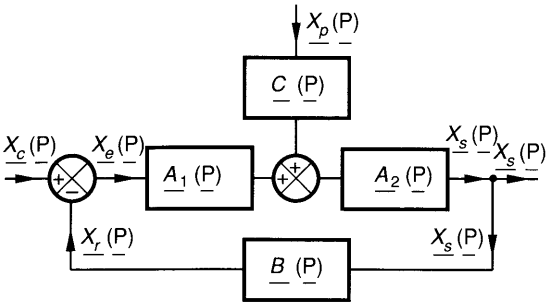


Fig. 3

Pour un signal de commande constant

$$(x_C = 0 \Rightarrow \underline{X}_C(\underline{P}) = 0),$$

et pour la même perturbation que précédemment $\left(\underline{X}_p(\underline{P}) = \dfrac{h_0}{\underline{P}}\right)$, on peut écrire

$$\underline{X}_s(\underline{P}) = \underline{A}_2(\underline{P})[\underline{C}(\underline{P})\underline{X}_p(\underline{P}) + \underline{A}_1(\underline{P})\underline{X}_e(\underline{P})]$$
$$= \underline{A}_2(\underline{P})[\underline{C}(\underline{P})\underline{X}_p(\underline{P}) - \underline{A}_1(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})\underline{X}_s(\underline{P})]$$

soit :

$$\underline{X}_s(\underline{P}) = \frac{\underline{A}_2(\underline{P})\underline{C}(\underline{P})}{1 + \underline{A}_1(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})} \times \frac{h_0}{\underline{P}}.$$

Après disparition du régime transitoire, l'erreur due à la perturbation se fixe à une valeur ε_r telle que :

$$\varepsilon_r = \lim_{\underline{P}\to 0} \underline{P}\underline{X}_s(\underline{P}) = h_0 \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\underline{C}(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})}{1 + \underline{A}_1(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})}.$$

La comparaison de ε_0 et ε_r nous permet de conclure que le système bouclé diminue l'influence de la perturbation et ce, d'autant plus que la limite, lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, de la transmittance de boucle

$$\underline{T}(\underline{P}) = \underline{A}_1(\underline{P})\underline{A}_2(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})$$

est plus grande.

Sachant que $\underline{T}(\underline{P})$ se met sous la forme générale

$$\frac{C}{\underline{P}^\alpha} \times \frac{1 \times b_1\underline{P} + b_2\underline{P}^2 + \ldots}{1 + a_1\underline{P} + a_2\underline{P}^2 + \ldots},$$

lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, $\underline{T}(\underline{P})$ augmente d'autant plus rapidement que les constantes C et α sont plus élevées.

En particulier, pour un système de classe égale ou supérieure à 1 ($\alpha \geqslant 1$) et si $\underline{C}(\underline{P})$ et $\underline{A}_2(\underline{P})$ ne contiennent pas d'intégration, la limite de $\underline{T}(\underline{P})$ est infinie et la perturbation est sans influence sur le système. Il est possible d'augmenter C par un accroissement de la sensibilité de la chaîne directe, mais nous avons vu que le système risquait alors de devenir instable.

3. EXEMPLES D'ASSERVISSEMENT

3.1. ASSERVISSEMENT DE TYPE ZÉRO : RÉGULATION DE VITESSE

Soit le dispositif de la figure 4.

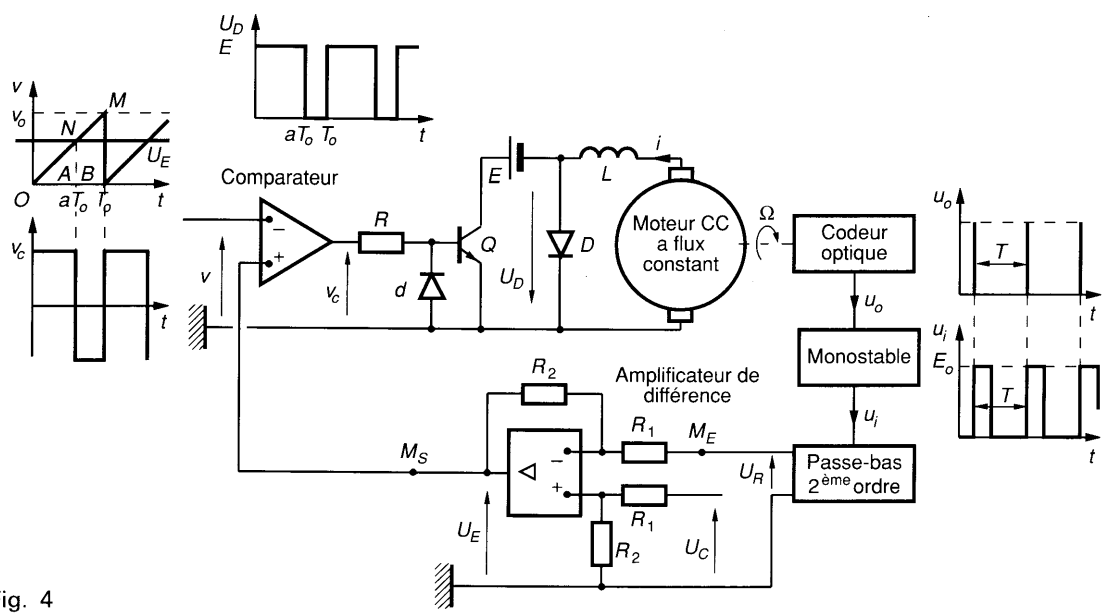


Fig. 4

3.1.1. La vitesse angulaire Ω du moteur est détectée par un codeur optique (*fig.* 5)

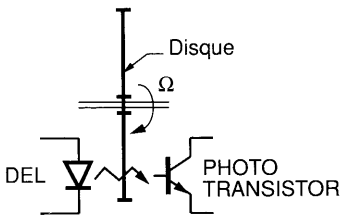


Fig. 5

Il est constitué par un disque, portant N lignes, solidaire de l'arbre du moteur, et qui coupe le flux lumineux entre une diode électroluminescente et un phototransistor. Il délivre une impulsion à chaque passage d'une ligne entre la DEL et le phototransistor. La tension u_0 à la sortie du codeur optique (*fig.* 4) est donc constituée d'une suite d'impulsions dont la période T dépend de la vitesse Ω du moteur. T étant l'intervalle de temps entre le passage de deux lignes consécutives du disque, on peut écrire

$\Omega T = \dfrac{2\pi}{N}$, avec Ω en rad/s et T en secondes;

soit : $T = \dfrac{2\pi}{N\Omega}$.

3.1.2. Le codeur optique est suivi d'un monostable (*fig.* 4)

A chaque impulsion de la tension u_0 d'entrée, le monostable fait correspondre, sur la tension u_i de sortie, un créneau d'amplitude E_0 et de durée τ.

En régime permanent, la tension u_i est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{N\Omega}$.

Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$u_i = U_{i_0} + U_{i_1} \cos(\omega_i t + \varphi_1) + \ldots$$

avec

U_{i_0} = valeur moyenne de $u_i = \dfrac{E_0\tau}{T} = \dfrac{E_0\tau}{2\pi} N\Omega$.

$\omega_i = \dfrac{2\pi}{T} = N\Omega$.

3.1.3. Le monostable est suivi d'un filtre passe-bas du deuxième ordre

Sa transmittance est $\underline{H}(\underline{P}) = \dfrac{1}{1 + 2m_0 \dfrac{\underline{P}}{\omega_0} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}}$

avec $\omega_i > 10\omega_0$.

Ce filtre passe-bas, élimine tous les harmoniques de la tension u_i et ne laisse passer que sa valeur moyenne U_{i_0}, soit :

$$u_R = \frac{E_0\tau N}{2\pi}\,\Omega.$$

La tension u_R est donc une image de la vitesse de rotation Ω.

REMARQUES

1. La condition $\omega_i = N\Omega > 10\omega_0$, ne peut être satisfaite à l'instant du démarrage car, alors, $\omega_i = \Omega = 0$. Le schéma bloc que nous allons établir ne sera valable que pour l'étude du régime établi et ne pourra pas être utilisé pour la mise en vitesse du moteur.

2. Si la vitesse Ω varie sinusoïdalement autour d'une valeur Ω_0 soit $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \sin \omega_1 t$, la valeur moyenne de u_i s'écrit

$$U_{i_0} = \frac{E_0\tau N}{2\pi}(\Omega_0 + \Omega_1 \sin \omega_1 t).$$

Si la pulsation ω_1 s'approche de ω_0, le filtre passe-bas perturbe la transmission des variations de la vitesse ω.

Au total, la relation entre la vitesse Ω et la tension u_R est traduite par le bloc de la figure 6.

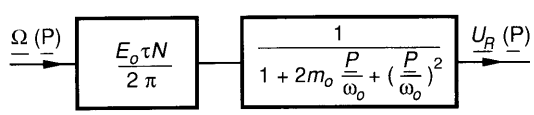


Fig. 6

3.1.4. L'amplificateur de différence (*fig.* 4) délivre une tension u_E

Cette tension est proportionnelle à la différence entre la tension de commande u_C et la tension u_R image de la vitesse :

$$u_E = \frac{R_2}{R_1}(u_C - u_R).$$

Son fonctionnement est décrit par le schéma de la figure 7.

Remarquons qu'à l'instant de la mise en vitesse du moteur par un échelon de tension U_{C_0}, la

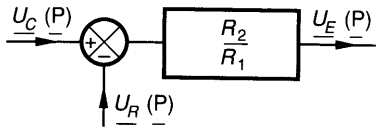


Fig. 7

tension u_R est nulle et l'amplificateur opérationnel est saturé si $\frac{R_2}{R_1} U_{C_0}$ est supérieur à la tension d'alimentation de l'amplificateur opérationnel. Le fonctionnement est alors non linéaire et ne peut pas être décrit par le schéma de la figure 7.

3.1.5. La tension u_E issue de l'amplificateur de différence est comparée à une rampe de tension v (*fig.* 4) d'amplitude v_0 et de période T_0

Le comparateur délivre une tension carrée v_C de rapport cyclique a.

L'application du théorème de Thalès au graphe de la tension v (*fig.* 4) conduit à

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AN}{BM} \quad \text{soit} \quad a = \frac{u_E}{V_0}.$$

Le rapport cyclique a de la tension v_C dépend donc de la tension u_E conformément au schéma de la figure 8.

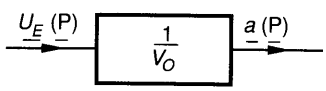


Fig. 8

3.1.6. La tension v_C commande la conduction du transistor Q (*fig.* 4)

• Lorsque la tension v_C est positive, la résistance R est suffisamment faible pour que le transistor Q soit saturé. La tension u_D aux bornes de la diode D est alors égale à E : $u_D = E$.

• Lorsque la tension v_C est négative, le transistor Q est bloqué (la diode d limite la tension inverse base-émetteur). L'inductance L, qui ne tolère aucune variation brutale de courant, prolonge le courant i qui se referme alors dans la diode D supposée parfaite. La diode D étant conductrice, la tension a ses bornes est nulle : $u_D = 0$.

Nous supposerons que l'inductance L est suffisamment élevée pour prolonger le courant i jusqu'à la prochaine mise en conduction du transistor Q.

La tension u_D est donc une tension carrée d'amplitude E et de rapport cyclique a.

Sa valeur moyenne $u_{D\,\text{moy}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_D \, dt = aE$ varie proportionnellement au rapport cyclique a, et la relation entre $u_{D\,\text{moy}}$ et a est décrite par le schéma bloc de la figure 9.

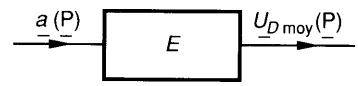


Fig. 9

3.1.7. Relation entre $u_{D\,\text{moy}}$ et Ω

La fréquence de découpage de la tension u_D, est de plusieurs dizaines de kilohertz.

Elle est fixée par la fréquence de la tension v. Compte tenu de l'inductance L et de l'inertie de la partie tournante du moteur, la vitesse Ω ne peut suivre les variations de la tension u_D. Elle se fixe à une valeur qui dépend uniquement de la valeur moyenne $u_{D\,\text{moy}}$ de u_D. L'alimentation du moteur est donc décrite par le schéma de la figure 10 avec $\begin{cases} e = k\Omega \\ \mathcal{C}_m = ki \end{cases}$ (voir annexe page 119).

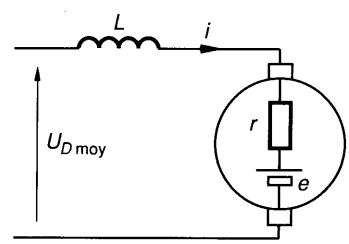


Fig. 10

Soit $\mathfrak{J}$ le moment d'inertie de la partie tournante. Nous supposerons que le couple résistant $\mathcal{C}_r$ est uniquement constitué d'un couple de frottements visqueux : $\mathcal{C}_r = f\Omega$ où f est une constante appelée coefficient de frottements visqueux.

La loi fondamentale de la dynamique conduit à

$$\mathfrak{J} \frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_r = ki - f\Omega.$$

L'écriture de la loi d'Ohm sur la figure 10 donne :

$$u_{D\,moy} = L\frac{di}{dt} + ri + e = L\frac{di}{dt} + ri + k\Omega.$$

Par élimination de i entre les équations précédentes, il vient :

$$u_{D\,moy} = L\left[\frac{\mathfrak{J}}{k}\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{f}{k}\frac{d\Omega}{dt}\right] + r\left[\frac{\mathfrak{J}}{k}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{f}{k}\Omega\right] + k\Omega$$

$$= \Omega\left[\frac{k^2 + rf}{k}\right] + \frac{d\Omega}{dt}\left[\frac{fL}{k} + \frac{r\mathfrak{J}}{k}\right] + \frac{d^2\Omega}{dt^2}\frac{L\mathfrak{J}}{k}$$

$$\frac{k}{L\mathfrak{J}}u_{D\,moy} = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt}\left[\frac{f}{\mathfrak{J}} + \frac{r}{L}\right] + \Omega\left[\frac{k^2 + fr}{L\mathfrak{J}}\right]$$

$$= \frac{d^2\Omega}{dt^2} + 2m\omega_m\frac{d\Omega}{dt} + \omega_m^2\Omega$$

avec $2m\omega_m = \frac{f}{\mathfrak{J}} + \frac{r}{L}$, $\omega_m^2 = \frac{k^2 + fr}{L\mathfrak{J}}$ et $H_m = \frac{k}{L\mathfrak{J}}$.

La transmittance de Laplace $\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{u}_{D\,moy}(\underline{P})}$ s'écrit donc :

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{H_m}{\underline{P}^2 + 2m\omega_m\underline{P} + \omega_m^2}$$

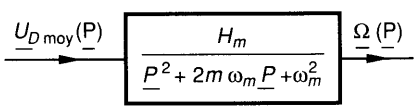


Fig. 11

La relation entre $u_{D\,moy}$ et Ω est décrite par le schéma bloc de la figure 11.

Analyse de la régulation de vitesse

Si, par suite d'une perturbation, la vitesse Ω diminue, la période de la tension u_i augmente provoquant une décroissance de la tension u_R. La tension u_E augmente ainsi que le rapport cyclique a de la tension v_C. La valeur moyenne $u_{D\,moy}$ de la tension u_D augmente entraînant un accroissement de la vitesse qui compense la diminution due à la perturbation.

Schéma bloc

En regroupant les blocs des figures 6, 7, 8, 9, 11, nous obtenons le schéma bloc de la figure 12. La transmittance de boucle $\underline{T}(\underline{P})$ s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{R_2}{R_1}\frac{E}{V_0}\frac{E_0\tau N}{2\pi}\frac{H_m}{\underline{P}^2 + 2m\omega_m\underline{P} + \omega_m^2}\frac{1}{1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \left(\frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}$$

Il s'agit bien d'un système de type zéro car la variable $\underline{P}$ ne peut pas être mise en facteur au dénominateur.

Couple de perturbation

En présence d'un couple de perturbation $\mathcal{C}p$, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit en transformées de Laplace.

$$\mathfrak{J}\underline{P}\underline{\Omega}(\underline{P}) = k\underline{I}(\underline{P}) - f\underline{\Omega}(\underline{P}) - \underline{\mathcal{C}}_p(\underline{P})$$

Compte tenu de la loi d'Ohm :

$$\underline{U}_{D\,moy}(\underline{P}) = (L\underline{P} + r)\underline{I}(\underline{P}) + k\underline{\Omega}(\underline{P})$$

il vient :

$$\underline{\Omega}(\underline{P})[f + \mathfrak{J}\underline{P}] = \frac{k}{L\underline{P} + r}[\underline{U}_{D\,moy}(\underline{P}) - k\underline{\Omega}(\underline{P})] - \underline{\mathcal{C}}_p(\underline{P}),$$

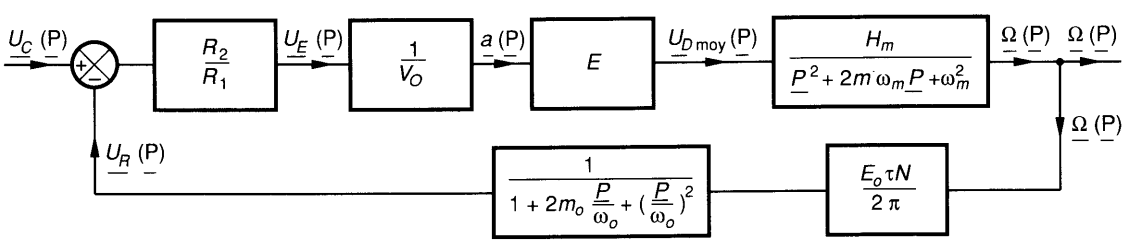


Fig. 12

soit

$$\underline{\Omega}(\underline{P})\left[\frac{k^2 + fL\underline{P} + r\mathfrak{J}\underline{P} + rf + L\mathfrak{J}\underline{P}^2}{r + L\underline{P}}\right] = \frac{k}{r + L\underline{P}}\,\underline{U}_{D\,\mathrm{moy}}(\underline{P}) - \underline{C}_p(\underline{P})$$

$$\underline{\Omega}(\underline{P}) = \frac{k\underline{U}_{D\,\mathrm{moy}}(\underline{P}) - (r + L\underline{P})\underline{C}_p(\underline{P})}{k^2 + rf + \underline{P}(fL + r\mathfrak{J}) + L\mathfrak{J}\underline{P}^2}.$$

Compte tenu des changements de variables précédents

$$\underline{\Omega}(\underline{P}) = \frac{1}{\underline{P}^2 + 2m\omega_m\underline{P} + \omega_m^2}\left[H_m\underline{U}_{D\,\mathrm{moy}}(\underline{P}) - \frac{r + L\underline{P}}{L\mathfrak{J}}\underline{C}_p(\underline{P})\right].$$

Entre $\underline{U}_{D\,\mathrm{moy}}(\underline{P})$ et $\underline{\Omega}(\underline{P})$ le schéma bloc de la figure 12 doit être modifié comme l'indique le schéma de la figure 13.

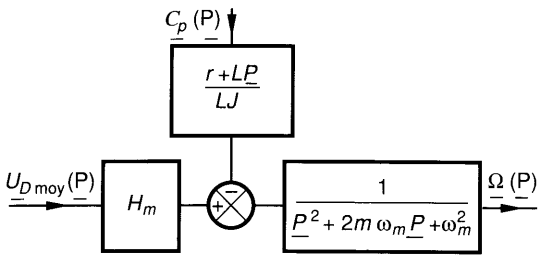


Fig. 13

L'influence du couple de perturbation est d'autant plus faible que la

$$\lim_{\underline{P}\to 0}\underline{T}(\underline{P}) = \frac{R_2}{R_1}\frac{E}{V_0}\frac{E_0\tau N}{2\pi}\frac{H_m}{\omega_m^2}$$

est plus grande.

3.2. ASSERVISSEMENT DE TYPE UN : ASSERVISSEMENT DE POSITION

Soit le dispositif de la figure 14

a) Les potentiomètres de commande et de recopie sont respectivement solidaires de l'arbre d'entrée et de l'arbre de sortie. Ils sont alimentés par la même source de tension constante E. Soit θ_{Max} l'excursion angulaire maximale du curseur de ces potentiomètres. Pour un angle de rotation θ, il apparaît entre le curseur et la masse une tension v égale à $E\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{Max}}}$, soit $v_E = \frac{E}{\theta_{\mathrm{Max}}}\theta_E$ et $v_S = \frac{E}{\theta_{\mathrm{Max}}}\theta_S$.

b) L'amplificateur de différence (qui inclue un amplificateur de puissance capable de fournir au moteur le courant *i*) délivre une tension u telle que

$$u = A(v_E - v_S) = A\frac{E}{\theta_{\mathrm{Max}}}(\theta_E - \theta_S)$$

L'ensemble potentiomètres-amplificateur est donc décrit par le bloc de la figure 15.

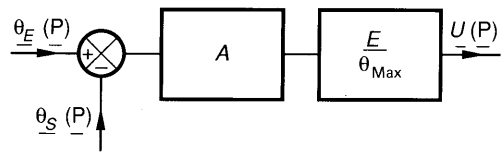


Fig. 15

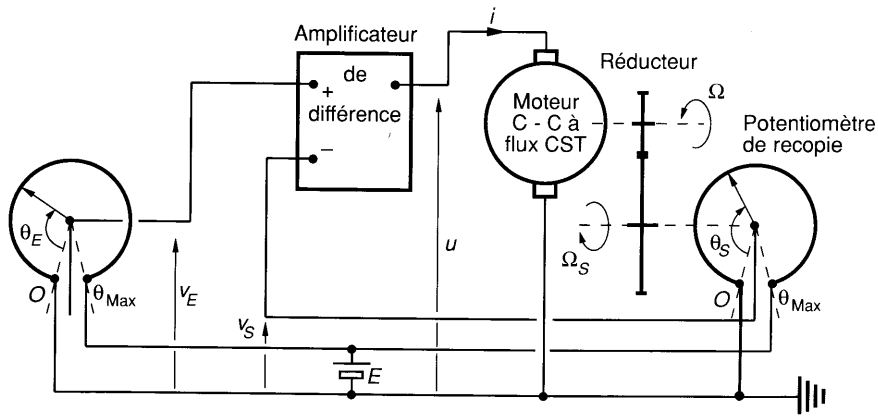


Fig. 14

c) Le moteur alimenté par la tension u entraîne l'arbre de sortie par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse. La présence du réducteur est la plupart du temps nécessaire, en effet :
– la charge placée sur l'arbre de sortie possède une grande inertie et doit se déplacer lentement. Le couple nécessaire à sa mise en vitesse est élevé;
– les dimensions et le prix d'un moteur sont sensiblement proportionnels au couple nominal qu'il développe sur son arbre. Sa vitesse de rotation est élevée (plusieurs dizaines de tours par seconde).

• Sachant que la puissance mécanique est le produit du couple par la vitesse de rotation ($P = \mathcal{C}\Omega$), il est nécessaire d'effectuer la transformation de puissance suivante :

MOTEUR		*CHARGE*
faible couple	→	fort couple
grande vitesse		faible vitesse

• Le réducteur permet de réaliser cette transformation de puissance. Il est constitué d'un ou plusieurs jeux d'engrenages (*fig.* 16).

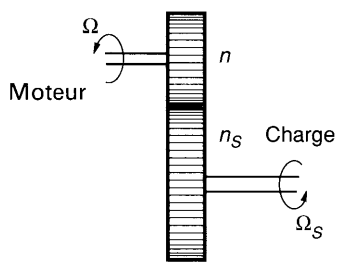


Fig. 16.

Soit n le nombre de dents porté par l'engrenage calé sur l'arbre moteur et n_S le nombre de dents de l'engrenage calé sur l'arbre de sortie. Les vitesses de rotation Ω et Ω_S sont liées par la relation

$$\frac{\Omega}{\Omega_S} = \frac{n_S}{n} = m.$$

m est le rapport de transformation du réducteur.
La conservation de la puissance au niveau des engrenages permet de conclure qu'il apparaît sur l'arbre moteur un couple résistant $\mathcal{C}_r$ et sur l'arbre de charge un couple moteur $\mathcal{C}_S$ tels que

$$\mathcal{C}_r\Omega = \mathcal{C}_S\Omega_S, \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{C}_r}{\mathcal{C}_S} = \frac{\Omega_S}{\Omega} = \frac{1}{m}.$$

• Soient $\mathfrak{J}$ et f respectivement le moment d'inertie et le coefficient de frottements visqueux de l'équipage mobile solidaire de l'axe moteur (arbre et engrenage moteur compris) et soit $\mathcal{C}_m$ le couple exercé par le moteur. La loi fondamentale de la dynamique conduit à l'équation :

$$\mathfrak{J}\frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_r - f\Omega.$$

• Nous supposerons que le couple résistant exercé par la charge se réduit à un couple de frottements visqueux $f_S\Omega_S$.
Soit $\mathfrak{J}_S$ le moment d'inertie de l'équipage mobile solidaire de l'arbre de sortie (arbre et engrenage de sortie compris). On peut écrire

$$\mathfrak{J}_S\frac{d\Omega_S}{dt} = \mathcal{C}_S - f_S\Omega_S.$$

• En regroupant les équations précédentes il vient :

$$\mathfrak{J}\frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{C}_m - \frac{\mathcal{C}_S}{m} - f\Omega$$
$$= \mathcal{C}_m - f\Omega - \frac{1}{m}\left(\mathfrak{J}_S\frac{d\Omega_S}{dt} + f_S\Omega_S\right)$$
$$= \mathcal{C}_m - f\Omega - \frac{1}{m^2}\left(\mathfrak{J}_S\frac{d\Omega}{dt} + f_S\Omega\right),$$

soit $\left(\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}_S}{m^2}\right)\frac{d\Omega}{dt} + \left(f + \frac{f_S}{m^2}\right)\Omega = \mathcal{C}_m.$

Tout se passe comme si l'équipage mobile solidaire de l'axe moteur possédait le moment d'inertie $\mathfrak{J}_e = \mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}_S}{m^2}$ et le coefficient de frottements visqueux $f_e = f + \frac{f_S}{m^2}$.

• En négligeant l'inductance de l'induit, le fonctionnement du moteur est décrit par le schéma de la figure 17 (annexe page 119),

avec $\begin{cases} \mathcal{C}_m = ki \\ e = k\Omega \\ u = ri + e \end{cases}$

$$\mathfrak{J}_e\frac{d\Omega}{dt} + f_e\Omega = ki = \frac{k}{r}(u - e) = \frac{k}{r}u - \frac{k^2}{r}\Omega$$

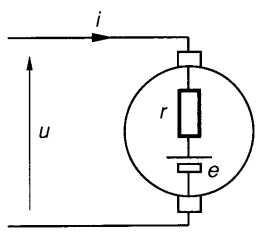


Fig. 17

soit $\mathfrak{J}_e \dfrac{d\Omega}{dt} + \left(f_e + \dfrac{k^2}{r}\right)\Omega = \dfrac{k}{r}u.$

La transmittance de Laplace $\underline{H}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U}(\underline{P})}$ s'écrit

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{H_e}{1 + \tau_e \underline{P}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_e = \dfrac{\dfrac{k}{r}}{f_e + \dfrac{k^2}{r}} \\ \tau_e = \dfrac{\mathfrak{J}_e}{f_e + \dfrac{k^2}{r}} \end{cases}$$

Compte tenu de l'équation $\Omega_S = \dfrac{\Omega}{m}$ la relation entre la tension u et la vitesse Ω_S de l'arbre de sortie est traduite par le bloc de la figure 18.

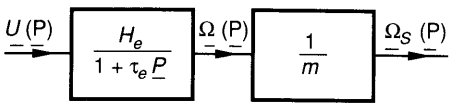


Fig. 18

REMARQUE

Il est possible de déterminer une valeur optimale du rapport de transformation m, dans le cas où l'on souhaite avoir une accélération maximale au démarrage.

L'équation générale de la vitesse Ω_S s'écrit

$$\left(\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}_S}{m^2}\right)m\frac{d\Omega_S}{dt} + \left(f + \frac{f_S}{m^2}\right)m\Omega_S = C_m.$$

À l'instant du démarrage ($\Omega_S = 0$, $e = 0$), C_m s'écrit $C_m = \dfrac{ku}{r}$ et l'équation de la vitesse Ω_S devient :

$$\left(m\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{J}_S}{m}\right)\frac{d\Omega_S}{dt} = \frac{ku}{r}$$

Soit $\dfrac{d\Omega_S}{dt} = \dfrac{ku}{r}\dfrac{1}{m\mathfrak{J} + \dfrac{\mathfrak{J}_S}{m}}.$

Pour une valeur donnée de la tension u, l'accélération $\dfrac{d\Omega_S}{dt}$ est maximale lorsque

$$\frac{d}{dm}\left[\frac{1}{m\mathfrak{J} + \dfrac{\mathfrak{J}_S}{m}}\right] = \frac{-\left(\mathfrak{J} - \dfrac{\mathfrak{J}_S}{m^2}\right)}{\left(m\mathfrak{J} + \dfrac{\mathfrak{J}_S}{m}\right)^2} = 0,$$

c'est-à-dire pour $m = \sqrt{\dfrac{\mathfrak{J}_S}{\mathfrak{J}}}$.

d) La loi physique reliant l'angle et la vitesse de rotation conduit à

$$\Omega_S = \frac{d\theta_S}{dt} \quad \text{soit} \quad \underline{\Omega_S}(\underline{P}) = \underline{P\theta_S}(\underline{P}),$$

d'où le schéma bloc de la figure 19.

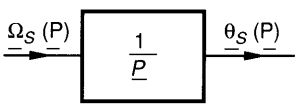


Fig. 19

En regroupant les schémas des figures 15, 18 et 19, nous obtenons le schéma bloc du système (*fig.* 20).

La transmittance de boucle s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\dfrac{AEH_e}{m\theta_{max}}}{\underline{P}(1 + \tau_e \underline{P})}.$$

Il s'agit bien d'un système de type 1 car la variable $\underline{P}$ est en facteur une fois au dénominateur.

Remarquons que dans ce cas particulier, la grandeur de retour est égale à la grandeur de sortie : **la boucle** est **à retour unitaire.**

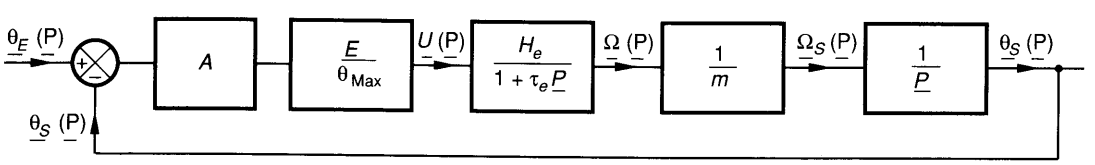


Fig. 20

3.3. ASSERVISSEMENT DE TYPE 1 : BOUCLE À VERROUILLAGE DE PHASE

Le schéma synoptique d'une boucle à verrouillage de phase est donné à la figure 21.

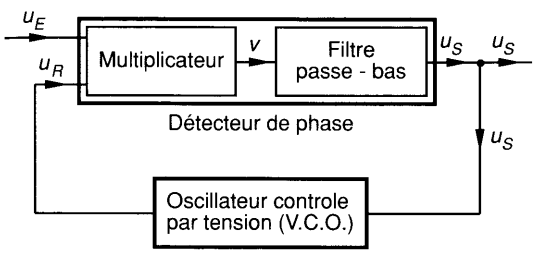


Fig. 21

a) Le détecteur de phase comprend :

- un multiplicateur : il délivre en sortie une tension v proportionnelle au produit des deux tensions d'entrée u_E et u_R :

$$v = ku_E u_R$$

(k est un coefficient mesuré en V^{-1});

- un filtre passe-bas du premier ordre dont la pulsation de coupure est ω_0. Sa transmittance complexe s'écrit $\underline{F}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

Les tensions d'entrée et de sortie s'écrivent respectivement

$$u_E = U_E \sin [\omega_C t + \varphi_E(t)]$$

et $$u_R = U_R \cos [\omega_C t + \varphi_R(t)].$$

Leurs phases, respectivement $\varphi_E(t)$ et $\varphi_R(t)$, sont susceptibles de varier au cours du temps. La pulsation ω_C est constante.

D'une manière générale, on appelle pulsation instantanée de la grandeur $x = X \cos [\theta(t)]$ la quantité $\omega = \left|\dfrac{d\theta(t)}{dt}\right|$.

• Pour une grandeur sinusoïdale :

$$\theta(t) = \omega t + \varphi,$$

avec ω et φ constantes. La pulsation instantanée est bien égale à ω.

• Les pulsations instantanées des tensions u_E et u_R s'écrivent respectivement

$$\omega_E = \left|\omega_C + \frac{d\varphi_E(t)}{dt}\right| \quad \text{et} \quad \omega_R = \left|\omega_C + \frac{d\varphi_R(t)}{dt}\right|.$$

La tension v à la sortie du multiplicateur s'écrit :

$$\begin{aligned} v &= ku_E u_R \\ &= kU_E U_R \sin [\omega_C t + \varphi_E(t)] \cos [\omega_C t + \varphi_R(t)] \\ &= \frac{kU_E U_R}{2} [\sin [2\omega_C t + \varphi_E(t) + \varphi_R(t)] \\ &\qquad + \sin [\varphi_E(t) - \varphi_R(t)]]. \end{aligned}$$

La pulsation instantanée du premier terme est $\left|2\omega_C + \dfrac{d\varphi_E(t)}{dt} + \dfrac{d\varphi_R(t)}{dt}\right|$ celle du second terme est : $\left|\dfrac{d\varphi_E(t)}{dt} - \dfrac{d\varphi_R(t)}{dt}\right|$.

La pulsation ω_C est suffisamment élevée pour vérifier les inéquations

$$\left|\frac{d\varphi_E(t)}{dt}\right| \ll \omega_C \quad \text{et} \quad \left|\frac{d\varphi_R(t)}{dt}\right| \ll \omega_C$$

dans ces conditions,

$$\left|2\omega_C + \frac{d\varphi_E(t)}{dt} + \frac{d\varphi_R(t)}{dt}\right| \approx 2\omega_C$$

$$\left|\frac{d\varphi_E(t)}{dt} - \frac{d\varphi_R(t)}{dt}\right| \leqslant \left|\frac{d\varphi_E(t)}{dt}\right| + \left|\frac{d\varphi_R(t)}{dt}\right| \ll \omega_C.$$

La tension v contient donc deux termes : l'un dont la pulsation instantanée varie peu autour de $2\omega_C$, l'autre dont la pulsation instantanée est très faible par rapport à ω_C.

La pulsation de coupure ω_0 du filtre passe-bas est très inférieure à $2\omega_C$ si bien que la tension u_S, à la sortie du filtre passe-bas, s'écrit :

$$u_S = \frac{kU_E U_R}{2} \sin [\varphi_E(t) - \varphi_R(t)]$$

De plus, lorsque la boucle est verrouillée, les phases $\varphi_E(t)$ et $\varphi_R(t)$ restent suffisamment proches pour que leur différence $\varphi_E(t) - \varphi_R(t)$ soit très faible.

Dans ces conditions, la tension u_S s'écrit :

$$u_S \approx \frac{kU_E U_R}{2} [\varphi_E(t) - \varphi_R(t)].$$

Le détecteur de phase peut ainsi être décrit par le bloc de la figure 22.

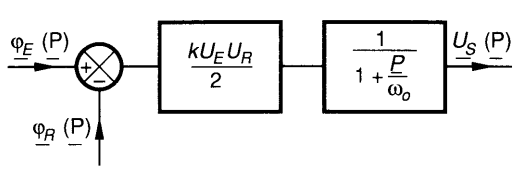


Fig. 22

b) L'oscillateur contrôlé par tension (en anglais : *voltage controlled oscillator* ou V.C.O.) délivre une tension u_R dont la pulsation instantanée, $\omega_C + \dfrac{d\varphi_R(t)}{dt}$, dépend de la tension de commande u_S, par

$$\frac{d\varphi_R(t)}{dt} = k_0 u_S.$$

La transmittance de Laplace $\dfrac{\underline{\varphi_R}(\underline{P})}{\underline{U_S}(\underline{P})}$ s'écrit donc

$$\frac{\underline{\varphi_R}(\underline{P})}{\underline{U_S}(\underline{P})} = \frac{k_0}{\underline{P}}$$

La relation entre φ_R et u_S est donc décrite par le bloc de la figure 23.

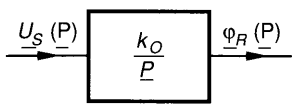


Fig. 23

En regroupant les schémas des figures 22 et 23, nous obtenons (*fig.* 24) le schéma bloc de la boucle à verrouillage de phase :

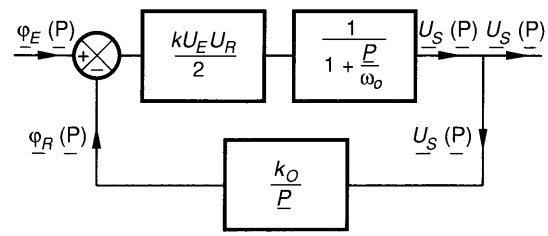


Fig. 24

La transmittance de boucle s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\dfrac{kk_0 U_E U_R}{2}}{\underline{P}\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_0}\right)}$$

Il s'agit bien d'un système de classe 1.

EXERCICES

1. Un moteur à courant continu dont le flux d'excitation est constant est alimenté par une source de tension continue de f.e.m. E et de résistance interne r. On néglige, dans tout ce problème, la réaction magnétique d'induit et les pertes du moteur autres que les pertes par effet Joule.
Le moteur est accouplé directement à un récepteur mécanique qui lui oppose un couple résistant Γ_r.
On donne :

$$E = 16 \text{ volts};$$

résistance interne de la source : $r = 1\ \Omega$;
résistance de l'induit du moteur : $\rho = 3\ \Omega$.

On posera $R = r + \rho$. On désignera par J le moment d'inertie des pièces tournantes.
L'inductance de l'induit du moteur est supposée négligeable.

1° Donner la relation liant le couple moteur Γ_m développé par le moteur et le courant d'induit I absorbé. On désigne par E' la f.c.é.m. du moteur et par Ω sa vitesse angulaire; on pose $\alpha = \dfrac{E'}{\Omega}$ (en V . s/rd).

2° *On se place en régime permanent ;* le couple Γ_r est constant. Écrire les équations caractérisant le fonctionnement du moteur; en déduire l'expression de la vitesse angulaire Ω du moteur en fonction de E, α, R et Γ_r.

Application numérique :

a) Le couple Γ_r étant nul, on a relevé $\Omega = \Omega_0 = 400$ rd/s. En déduire la valeur de constante α.
Quel est le courant I absorbé par le moteur?

b) Le couple Γ_r prend la valeur $\Gamma_r = 8 \cdot 10^{-2}$ m . N. Donner (en régime permanent) :

— la vitesse Ω du moteur;
— le courant d'induit I.

3° *Étude du moteur en régime transitoire :* Le couple résistant Γ_r étant nul depuis un temps infini, on applique à un instant pris comme origine des temps, un couple résistant Γ_r égal à $8 \cdot 10^{-2}$ m . N (échelon de couple).

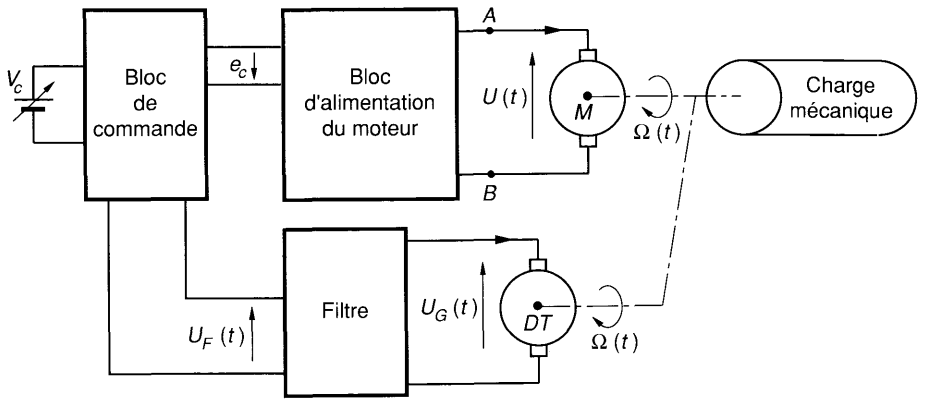
a) Écrire les équations caractérisant le fonctionnement du moteur.

b) En déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de $\Omega(t)$.
Quelle en est la constante de temps τ?

Application numérique : on a mesuré $\tau = 0{,}5$ s. En déduire le moment d'inertie J des pièces tournantes.

c) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $I(t)$. Quelle en est la nouvelle constante de temps? Conclusion.

d) Représenter graphiquement les évolutions de $I(t)$ et de $\Omega(t)$. Quel est le temps de réponse (10 %-90 %) du moteur?

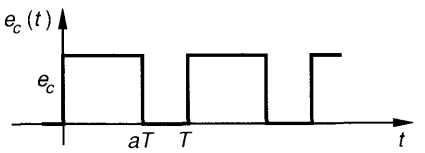


2. L'objet de ce problème est d'étudier le fonctionnement de certains sous-ensembles de l'asservissement de vitesse décrit par le schéma d'ensemble.

Première partie : étude du bloc d'alimentation (*fig.* 1.*a*)

On désire connaître le fonctionnement du bloc d'alimentation du moteur à courant continu qui, en rotation, peut être simulé par le dipôle r, l, E (*fig.* 1.*b*).
Dans le montage de la figure 1, la tension $e_C(t)$ est un signal carré périodique de rapport cyclique a variable tel que :

- pour $e_C = 0$ le transistor T est bloqué,
- pour $e_C = E_C$ le transistor est saturé et la tension collecteur-émetteur de saturation est nulle.



Les conditions de fonctionnement du montage imposent un courant $i(t)$ ininterrompu et positif.

1° Montrer que lorsque le transistor T est saturé, la diode D est bloquée.

2° Justifier physiquement l'affirmation suivante : lorsque le transistor est bloqué, la diode est passante.

3° Trouver deux schémas simples symbolisant les deux modes de fonctionnement du montage suivant l'instant considéré ($0 < t < aT$ ou $aT < t < T$) : on remplacera le transistor T et la diode D par un circuit ouvert ou un court-circuit suivant leurs états.

4° Faire la synthèse des deux schémas en remplaçant la partie de schéma située en amont des points A et B par un générateur de tension délivrant un signal dont on donnera la représentation graphique dans le cas suivant : $U_0 = 150$ V, $f = 10$ kHz, $a = \frac{2}{3}$.

5° Calculer la valeur moyenne U_{moy} de $u(t)$ en fonction de a et U_0. Montrer que, si l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs moyennes des différentes grandeurs, le schéma du montage est équivalent à une maille ne comprenant que trois éléments. Calculer littéralement et numériquement la valeur de E sachant que la valeur moyenne de $i(t)$ est $I_{moy} = 0{,}2$ A ; $r = 50\ \Omega$ et le rapport cyclique $a = \frac{2}{3}$.

6° Écrire l'équation différentielle de $i(t)$ lorsque le transistor T est saturé.
Écrire l'équation différentielle de $i(t)$ lorsque le transistor T est bloqué.
Déterminer l'expression de $i(t)$:
pour $0 < t < aT$ en posant $i(t = 0) = I_1$,
pour $aT < t < T$ en posant $i(t = aT) = I_2$.

7° La fréquence f de découpage étant égale à 10 kHz, établir, en justifiant les approximations, les expressions suivantes :

$$\text{pour } 0 < t < aT : i(t) \approx I_1 - \left(I_1 - \frac{U_0 - E}{r}\right)\frac{r}{l}t ;$$

$$\text{pour } aT < t < T : i(t) \approx I_2 - \left(I_2 + \frac{E}{r}\right)\frac{r}{l}(t - aT)$$

(on rappelle que $r = 50\ \Omega$ et $l = 0{,}1$ H).
Indiquer l'allure de la représentation graphique de $i(t)$ pour $a = \frac{2}{3}$.

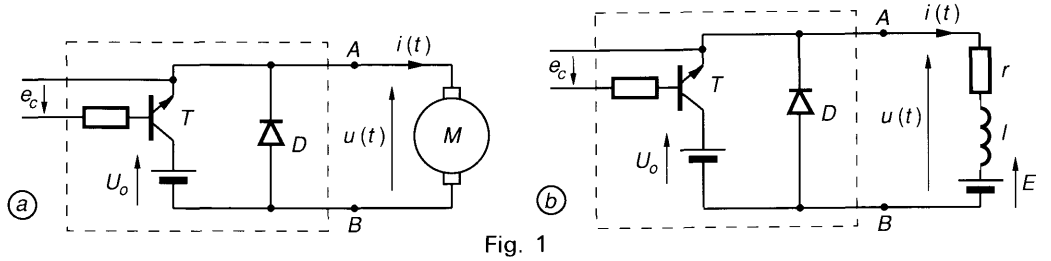


Fig. 1

8° Calculer I_1 et I_2.

Deuxième partie : étude du moteur (*fig.* 2).

On s'intéresse maintenant à la vitesse du moteur dont l'induit est assimilé au modèle r, l et E (de la figure 1.*b*); E est la force électromotrice du moteur qui est liée à la vitesse de rotation Ω (exprimée en radians par seconde) par la relation :

$$E = k\,\Omega; \qquad k = 0{,}5 \text{ V . s/rad} = 0{,}5 \text{ Nm/A}.$$

Tous les frottements sont négligés.

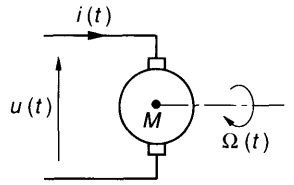


Fig. 2.

Le couple moteur disponible sur l'arbre est donné par la relation : $C_m = ki$.
Le couple résistant est négligeable.
Le moment d'inertie de la partie tournante ramené à l'arbre moteur est $J = 4 \,.\, 10^{-3}$ kg . m^2.

1° Établir l'équation différentielle liant $\Omega(t)$ à $u(t)$.

2° Montrer que la fonction de transfert $T_M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$ est :

$$\underline{T_M}(\underline{p}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{Jr}{k^2}\,\underline{p} + \dfrac{Jl}{k^2}\,\underline{p}^2}.$$

Cette fonction peut aussi s'écrire $T_M(p) = \dfrac{T_0}{1 + 2m\dfrac{\underline{p}}{\omega_0} + \dfrac{\underline{p}^2}{\omega_0^2}}$.

Calculer littéralement ω_0 et m. Calculer la valeur numérique de m.

3° Lorsque $u(t)$ est un échelon de tension, rappeler la forme de l'expression de la solution $\Omega(t)$ dans le cas où $m > 1$. Déterminer les racines de l'équation caractéristique (que l'on prendra sous la forme $\omega_0^2 + 2m\omega_0 x + x^2 = 0$), en fonction de ω_0 et m. Montrer que, si l'on suppose $m \gg 1$, les expressions de ces racines se réduisent respectivement à $-\dfrac{\omega_0}{2m}$ et $-2m\omega_0$ auxquelles correspondent deux constantes de temps, que l'on calculera numériquement.

4° En fait $u(t)$ est produit par le bloc d'alimentation du moteur (fig. 1). Justifier que l'on puisse considérer la vitesse, et donc la force électromotrice du moteur, comme constantes sur une période lorsque la fréquence de découpage est de 10 kHz.

Troisième partie : étude du filtre (*fig.* 3).

La différence de potentiel délivrée par la génératrice tachymétrique présente une ondulation gênante. Il est nécessaire d'intercaler entre cette génératrice et le bloc de commande le filtre équipé d'un amplificateur opérationnel supposé idéal.

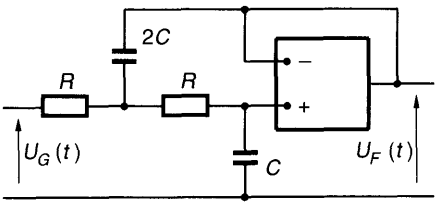


Fig. 3.

1° Établir l'expression de la transmittance $\underline{T_F}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_F}}{\underline{U_G}}$ de ce filtre.

2° Tracer le diagramme asymptotique de Bode (gain et argument) de $\underline{T_F}$. Afin d'esquisser l'allure de la courbe réelle du gain, calculer la valeur de cette grandeur pour la pulsation ω_c correspondant à un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$ et préciser si cette courbe présente ou non un maximum.

3° Le moteur tournant à une vitesse constante, l'expression de la différence de potentiel délivrée par la génératrice peut s'écrire, en première approximation, sous la forme : $u_G(t) = U_{GO} + U_{gM} \sin \omega_G t$. Quelle est l'expression de la tension de sortie du filtre $U_F(t)$ dans le cas particulier où $\omega_G = 10\omega_C$?

3. Un asservissement de température est représenté sur la figure 1.
L'étude qui suit est destinée à modéliser le comportement thermique du système que l'on a observé expérimentalement, elle comprend quatre parties *pratiquement indépendantes* :

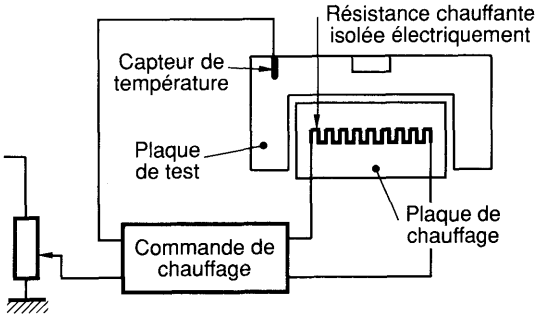


Fig. 1.

A) Étude de la mesure de température

La chaîne de mesure de la température de la plaque de test utilise comme capteur une résistance de platine de valeur R_{pt}.
En notant θ la température exprimée en degrés Celsius, R_{pt} varie selon la loi :

$$R_{pt} = R_0(1 + \alpha\theta).$$

Dans cette expression, R_0, résistance à 0 °C, vaut 100 Ω; α, coefficient de température, a pour valeur $3{,}9 \,.\, 10^{-3}$.

La résistance R_{pt} est insérée dans le montage représenté sur la figure 2 où l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

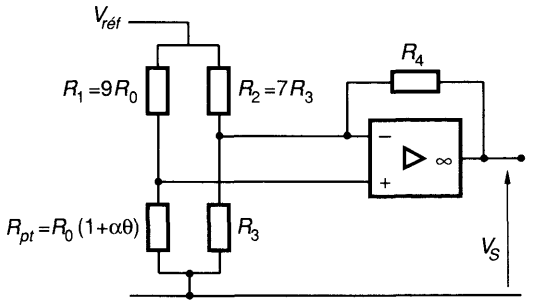


Fig. 2

1° Montrer que ce montage est équivalent à celui de la figure 3.
En effectuant un développement limité au premier ordre, montrer que la f.é.m. équivalente E^+ peut se mettre sous la forme $E^+ = kV_{réf}(1 + \alpha'\theta)$.

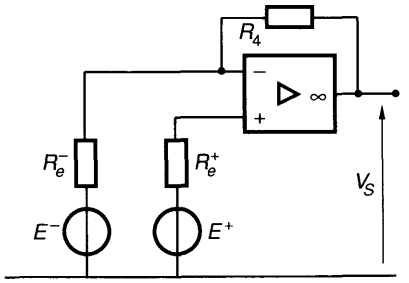


Fig. 3

Calculer la valeur numérique de k, ainsi que celle de α' en fonction de α.
Déterminer l'expression de E^- en fonction de la tension de référence $V_{réf}$, et de R_e^- en fonction de R_3.

2° Établir l'expression de v_s en fonction de E^-, E^+, R_e^- et R_4.

3° Déterminer la valeur du rapport $\frac{R_4}{R_e^-}$, puis celle de $\frac{R_4}{R_3}$ pour que la tension de sortie v_s soit nulle lorsque la température θ est égale à 0 °C.

4° En supposant la condition précédente réalisée, déterminer la valeur de $V_{réf}$ pour que v_s soit égale à 10 V lorsque la température θ vaut 200 °C.

B) Détermination d'un modèle thermique

La résistance de chauffage (1) de la figure 4 reçoit une puissance électrique $p(t)$ dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}[p(t)]$ est notée $P(p)$.
La température θ_3 de la plaque de test (3) est supposée uniforme, comme la température ambiante θ_a; θ_3 varie en fonction du temps t tandis que θ_a est supposée constante.

La transformée de Laplace de la différence $\Phi_3(t) = (\theta_3 - \theta_a)$ est notée $\underline{T_3}(\underline{p})$.
L'action de la puissance électrique $p(t)$ sur la différence de température $\Phi_3(t)$ peut être représentée par la transmittance :

$$\underline{H}(\underline{p}) = \frac{\underline{T_3}(\underline{p})}{\underline{P}(\underline{p})}.$$

Les températures θ_1 de la résistance de chauffage et θ_2 de la plaque chauffante étant également supposées uniformes, on prend comme modèle thermique du dispositif de chauffage un modèle à constantes localisées qui admet pour analogue électrique le montage représenté sur la figure 5.

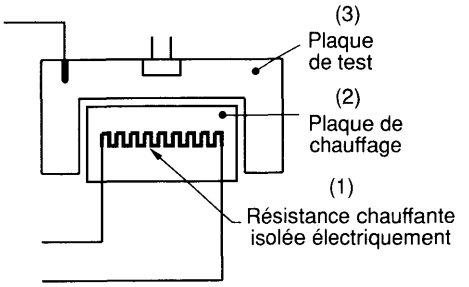


Fig. 4.

Pour ce modèle les mesures ont donné :

$R_{th1} = 2$ K/W; $R_{th2} = 4$ K/W; $R_{th3} = 1$ K/W;
$R_{th4} = 0{,}5$ K/W; $C_1 = 50$ J/K; $C_2 = 400$ J/K;
$C_3 = 1\,000$ J/K.

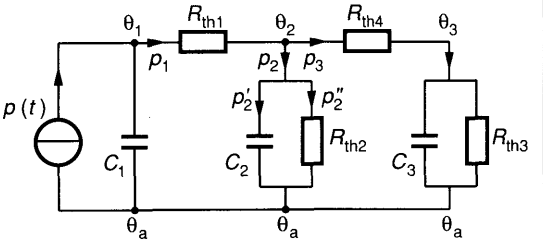


Fig. 5.

1° Qualifier R_{th1}, R_{th2} et C_2.

2° Écrire les équations des branches et du nœud concernant les puissances thermiques p_1, p_2, p_2', p_2'' et p_3.
On pose :

$\Phi_2(t) = (\theta_2 - \theta_a)$; $\underline{T_2}(\underline{p}) = L[\Phi_2(t)]$; $\underline{P_2}(\underline{p}) = L[p_2(t)]$;
$\underline{P_3}(\underline{p}) = L[p_3(t)]$; $\tau_2 = R_{th2}C_2$; $\tau_3 = R_{th3}C_3$.

La capacité calorifique C_1 de la résistance de chauffage est, en première approximation, considérée elle-même comme négligeable.
Exprimer $\underline{P}(\underline{p})$ en fonction de $\underline{T_2}(\underline{p})$ et de $\underline{T_3}(\underline{p})$... et de τ_2, τ_3, R_{th2} et R_{th3}.
Exprimer $\underline{T_2}(\underline{p})$ en fonction de $\underline{T_3}(\underline{p})$... et de R_{th3}, R_{th4} et τ_3.

3° La fonction de transfert $\underline{H}(\underline{p})$ peut être mise sous la forme :

$$\underline{H}(\underline{p}) = \frac{H_0}{\frac{\underline{p}^2}{\omega_0^2} + 2m\frac{\underline{p}}{\omega_0} + 1}.$$

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve :

$H_0 = 0{,}727$ K/W; $\omega_0 = 2{,}62\ 10^{-3}$ rad/s; $m = 1{,}64$.

Dessiner l'allure des diagrammes de Bode de $\underline{H}(j\omega)$. Quelle est la valeur de $\underline{H}(j\omega)$ pour $\omega = 0$?

4° Lorsque la température ambiante θ_a est constante, la représentation graphique de la puissance $p(t)$ a la forme représentée sur la figure 6.
Calculer la valeur moyenne P_m de $p(t)$ en fonction de P_{Max} et du rapport cyclique δ.

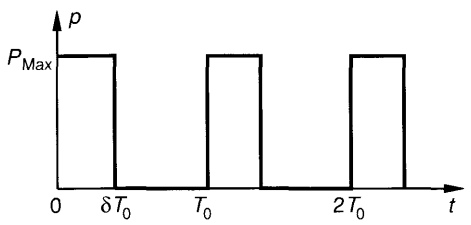


Fig. 6.

Application numérique : $P_{Max} = 300$ W; les données de la question précédente restent valables; calculer δ pour que la valeur moyenne de $\Phi_3 = (\theta_3 - \theta_a)$ soit égale à 105 °C.

C) Étude de la commande de puissance

Le chauffage est commandé par un comparateur de type *« tout ou rien »*.
Lorsque la température θ_3 de la plaque de test est inférieure à la température de consigne θ_C, la puissance $p(t)$ est constante et égale à P_{Max}; en revanche lorsque la différence $d = \theta_C - \theta_3$ est négative, la résistance de chauffage n'est pas alimentée (*fig.* 7).

Dans le but d'établir un modèle linéaire pour cette fonction non linéaire, on utilise l'approximation du premier harmonique sachant que les harmoniques de $p(t)$ seront fortement atténués par l'inertie thermique du système.

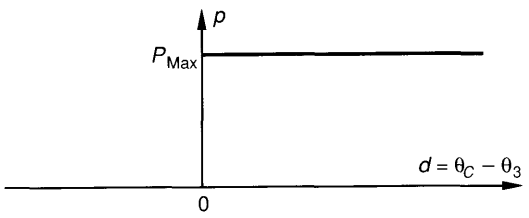


Fig. 7.

1° On suppose ainsi que la différence $d = \theta_C - \theta_3$ est une fonction sinusoïdale du temps, d'expression $d = D_M \sin \omega t$. Représenter $d(t)$ et $p(t)$ sur le même graphique.

2° Calculer l'expression de l'harmonique fondamental $p_1(t)$ de $p(t)$; montrer qu'il est en phase avec $d(t)$. Calculer son amplitude P_{1M}.

3° La transformée de Laplace de $d(t)$ est notée $\underline{D}(\underline{p})$, celle de $p_1(t)$ est appelée $\underline{P}_1(\underline{p})$.
Exprimer la fonction de transfert $\underline{A}_1 = \underline{P}_1(\underline{p})/\underline{D}(\underline{p})$, puis son inverse $1/A_1$ en fonction de D_M.

D) Étude du système asservi

On se place dans le cadre de l'approximation du premier harmonique, qui consiste à remplacer la puissance $p(t)$ par son premier harmonique $p_1(t)$, et θ_3 par sa variation $\delta\theta_3$ autour de sa valeur moyenne qu'on supposera pour simplifier égale à θ_C.
Dans ces conditions, le schéma fonctionnel de la chaîne de régulation de température est donné par la figure 8.

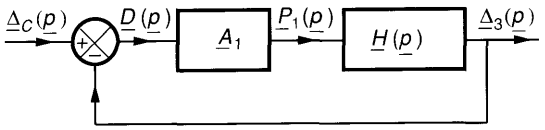


Fig. 8.

$\underline{\Delta}_3(\underline{p})$ est la transformée de Laplace de $\delta\theta_3(t)$; $\underline{\Delta}_C(\underline{p})$ est la transformée de Laplace de $\delta\theta_C(t)$, variation éventuelle de la tension de consigne θ_C; $\underline{A}_1$ est la fonction de transfert étudiée à la question C, 3°.
Calculer $\underline{\Delta}_3(\underline{p})$ en fonction de $\underline{\Delta}_C(\underline{p})$, de $\underline{H}(\underline{p})$ et de $\underline{A}_1$.

4 stabilité des systèmes bouclés linéaires

1. CONDITION GÉNÉRALE DE STABILITÉ

Un système physique est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté.

Considérons un système pour lequel la grandeur de commande x_C et la grandeur de sortie x_S sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n\frac{d^n x_S}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_S}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x_S = b_m\frac{d^m x_C}{dt^m} + \ldots + b_0 x_C.$$

La transmittance de Laplace correspondante s'écrit :

$$\frac{\underline{X}_S(\underline{P})}{\underline{X}_C(\underline{P})} = \frac{\underline{N}(\underline{P})}{\underline{D}(\underline{P})} = \frac{b_m\underline{P}^m + b_{m-1}\underline{P}^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Supposons que, toutes les conditions initiales étant nulles $\left(x_S = x_C = \frac{dx_S}{dt} = \ldots = 0\right)$, on commande le système par une impulsion de Dirac ($\underline{X}_C(\underline{P}) = X_0$). Dès lors, la grandeur de sortie s'écarte de son état d'équilibre. Afin d'étudier la stabilité du système, il faut déterminer les conditions permettant à la grandeur de sortie x_S de retrouver son état d'équilibre ($x_S = 0$).

La traduction de l'équation différentielle en transformées de Laplace conduit à :

$$\underline{X}_S(\underline{P}) = X_0\frac{b_m\underline{P}^m + b_{m-1}\underline{P}^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Le dénominateur

$$\underline{D}(\underline{P}) = a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0,$$

polynôme de degré n en $\underline{P}$, possède n racines $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2 \ldots \underline{P}_n$, et peut être écrit sous la forme

$$\underline{D}(\underline{P}) = a_n(\underline{P} - \underline{P}_1)(\underline{P} - \underline{P}_2)\ldots(\underline{P} - \underline{P}_n)$$

$\underline{P}_1, \underline{P}_2 \ldots \underline{P}_n$ sont appelés *les zéros de* $\underline{D}(\underline{P})$ où les **pôles de** $\underline{X}_S(\underline{P})$. Afin de déterminer les variations, en fonction du temps, de la grandeur de sortie x_S, il faut décomposer $\underline{X}_S(\underline{P})$ en éléments simples :

$$\underline{X}_S(\underline{P}) = \frac{A_1}{\underline{P} - \underline{P}_1} + \frac{A_2}{\underline{P} - \underline{P}_2} + \ldots + \frac{A_n}{\underline{P} - \underline{P}_n}$$

puis déterminer l'originale de chaque terme (voir tome 1, chapitre 4).

– Un pôle réel $\underline{P}_k$ conduit à une originale de la forme $A_k\,e^{P_k t}$. Lorsque le temps t tend vers l'infini, la fonction $e^{P_k t}$ tend vers zéro si le pôle P_k est négatif, alors qu'elle tend vers l'infini si le pôle P_k est positif.

– L'ensemble de deux pôles complexes conjugués

$$\underline{P}_i = a + j\omega \quad \text{et} \quad \underline{P}_i^* = a - j\omega$$

conduit à une originale de la forme

$$A\,e^{at}\cos(\omega t + \varphi).$$

Il s'agit d'une sinusoïde dont l'amplitude $A\,e^{at}$ varie au cours du temps.

Si a est négatif l'amplitude de la sinusoïde tend vers zéro et le signal correspondant disparaît, alors que l'amplitude reste constante si a est nul, et croît indéfiniment si a est positif.

Le système étant stable si la grandeur de sortie x_S retrouve sa valeur d'équilibre, c'est-à-dire $x_S = 0$, nous en déduisons la propriété suivante :

Un système de transmittance $\frac{\underline{N}(\underline{P})}{\underline{D}(\underline{P})}$ est stable si la partie réelle de tous les zéros de $\underline{D}(\underline{P})$ est strictement négative.

REMARQUES

a) L'équation $a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, à partir de laquelle sont calculés les zéros de $\underline{D}(\underline{P})$ est identique à l'équation caractéristique de l'équation différentielle initiale. Sachant que cette équation

caractéristique permet de déterminer la solution de l'équation sans second membre

$$(x_S = A_1\, e^{\underline{P}_1 t} + \ldots + A_n\, e^{\underline{P}_n t}),$$

nous pouvons conclure qu'un système est stable si la ***solution de l'équation sans second membre*** *disparaît au cours du temps. Elle représente ainsi le* ***régime transitoire.*** *Après disparition de ce régime transitoire, seule subsiste* ***la solution particulière*** *qui constitue donc* ***le régime permanent.***

b) Considérons en particulier le système qui obéit à l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2x_S}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dx_S}{dt} + \omega_0^2 x_S = \omega_0^2 x_C$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\underline{P}^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \omega_0^2 = 0.$$

Les solutions sont

$$\underline{P}_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

et $\underline{P}_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$.

- *Si* $|m| > 1$, *les racines* $\underline{P}_1$ *et* $\underline{P}_2$ *sont réelles. Elles sont positives si m est négatif et négatives si m est positif.*
- *Si* $|m| < 1$ *les racines* $\underline{P}_1$ *et* $\underline{P}_2$ *sont imaginaires conjuguées. Leur partie réelle* $(-m\omega_0)$ *est positive si m est négatif.*

Le système est donc stable si le coefficient d'amortissement m est strictement positif. Pour $m = 0$, *la solution de l'équation sans second membre est une sinusoïde d'amplitude constante.*

Soit le système bouclé de la figure 1.

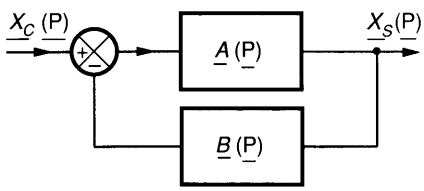


Fig. 1

Sa transmittance en boucle fermée s'écrit

$$\underline{A}_R(\underline{P}) = \frac{\underline{A}(\underline{P})}{1 + \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})}.$$

$\underline{T}(\underline{P}) = \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})$ est la transmittance du système en boucle ouverte. A partir des résultats précédents nous pouvons énoncer la propriété suivante.

Un système bouclé, dont la transmittance en boucle ouverte est $\underline{T}(\underline{P})$, est stable en boucle fermée si tous les zéros de $1 + \underline{T}(\underline{P})$ ont une partie réelle strictement négative.

2. CRITÈRES DE STABILITÉ

Ces critères permettent de prévoir la stabilité du système en boucle fermée à partir de l'étude en boucle ouverte. Cette opération est rendue possible par le fait que la condition de stabilité fait intervenir la transmittance $\underline{T}(\underline{P})$ en boucle ouverte.

Il s'agit de déterminer, à partir de l'expression (où d'une représentation graphique) de $\underline{T}(\underline{P})$, les conditions dans lesquelles la partie réelle de tous les zéros de $1 + \underline{T}(\underline{P})$ est négative. Dans le cas général la transmittance en boucle ouverte se met sous la forme $\underline{T}(\underline{P}) = C\dfrac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{G}(\underline{P})}$ où C est un coefficient réel réglable par la sensibilité de la chaîne directe, pour les asservissements où par le taux de contre-réaction, pour les amplificateurs. Le problème se ramène ainsi à la détermination des valeurs de C pour lesquelles le système bouclé est stable.

2.1. CRITÈRE DE ROUTH

Ce critère est basé sur l'étude mathématique des polynômes. On montre que, pour une équation du $n^{\text{ème}}$ degré,

$$(\alpha_0 \underline{P}^n + \alpha_1 \underline{P}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\underline{P} + \alpha_n = 0)$$

la partie réelle des racines est négative si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) aucun des coefficients α_i ne doit être nul;
b) tous les coefficients α_i doivent être de même signe;
c) on construit le tableau suivant :

- première ligne $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2i}, \ldots$
- deuxième ligne $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots, \alpha_{2i+1}, \ldots$

Les coefficients des lignes suivantes sont calculées par récurrence à partir des lignes précédentes d'une manière analogue au calcul d'un déterminant.

- troisième ligne

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3}{\alpha_1},\ \beta_2 = \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5}{\alpha_1},\ \ldots$$

- quatrième ligne

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1\alpha_3 - \beta_2\alpha_1}{\beta_1},\ \gamma_2 = \frac{\beta_1\alpha_5 - \beta_3\alpha_1}{\beta_1},\ \ldots \text{ etc.}$$

Le système est stable si tous les coefficients de la première colonne du tableau sont de même signe.

Exemple d'application

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 4 (du chapitre 3) pour lequel la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{H_m}{\omega_m^2}\dfrac{E}{V_0}E_0\dfrac{\tau N}{2\pi}}{\left(\dfrac{\underline{P}^2}{\omega_m^2} + 2m\dfrac{\underline{P}}{\omega_m} + 1\right)\left(1 + 2m_0\dfrac{\underline{P}}{\omega_0} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec

$$H_0 = \frac{H_m}{\omega_m^2}\frac{E}{V_0}E_0\frac{\tau N}{2\pi} = 1, \quad \omega_m = 91{,}4 \text{ rad/s},$$

$$m = 1{,}82; \quad m_0 = 1, \quad \omega_0 = 628 \text{ rad/s}.$$

Déterminons les valeurs de l'amplification $A = \dfrac{R_2}{R_1}$ pour lesquelles le système est stable.

En posant $C = H_0 A$, les zéros de $1 + \underline{T}(\underline{P})$ sont les racines de l'équation :

$$\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right) + C = 0.$$

Soit

$$303 \,.\, 10^{-12}\underline{P}^4 + 482 \,.\, 10^{-9}\underline{P}^3 + 249 \,.\, 10^{-6}\underline{P}^2 + 43 \,.\, 10^{-3}\underline{P} + 1 + C = 0.$$

a) aucun coefficient n'est nul

b) tous les coefficients sont positifs.

c) Le tableau de Routh est le suivant :

$303 \,.\, 10^{-12}$,	$249 \,.\, 10^{-6}$,	$1 + C$,	0;
$482 \,.\, 10^{-9}$,	$43 \,.\, 10^{-3}$,	0,	0;
$222 \,.\, 10^{-6}$,	$1 + C$,	0,	0;
$(40{,}8 - 2{,}17C)10^{-3}$,	0,	0,	0;
$1 + C$,	0,	0,	0;

Tous les coefficients de la première colonne sont positifs si $40{,}8 - 2{,}17C > 0$ soit $C < 18{,}8 \approx 19$.

Le système est donc stable en boucle fermée si l'amplification $A = \dfrac{R_2}{R_1}$ est inférieure à 19.

Notons, d'ores et déja, les conditions contradictoires suivantes :

– La stabilité du système bouclé impose une valeur de A inférieure à 19.

– Les perturbations ont d'autant moins d'influence que A est plus grand.

Le critère de Routh donne lieu à des calculs compliqués et suppose connue l'expression mathématique de $\underline{T}(\underline{P})$. Cependant, avec le développement des moyens informatiques, il est possible d'établir un programme succeptible de résoudre le problème.

2.2. LIEU DES RACINES

La transmittance en boucle ouverte s'écrivant sous la forme générale $\underline{T}(\underline{P}) = C\dfrac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{G}(\underline{P})}$, les zéros de $1 + \underline{T}(\underline{P})$ sont les racines de l'équation $\underline{G}(\underline{P}) + C\underline{H}(\underline{P}) = 0$. Chaque racine, qui dépend de la valeur de C, possède un point représentatif dans le plan complexe. Lorsque C varie de zéro à l'infini, les points images des racines se déplacent et décrivent une courbe appelée « Lieu des racines ».

Soit par exemple $\underline{T}(\underline{P}) = \dfrac{C}{\underline{P}(\underline{P} + a)}$; les racines de l'équation

$\underline{G}(\underline{P}) + C\underline{H}(\underline{P}) = \underline{P}^2 + a\underline{P} + C = 0$ sont

$$\underline{P}_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - C}$$

$$\underline{P}_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - C}$$

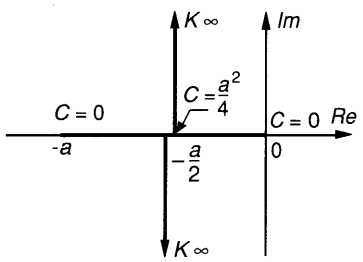


Fig. 2

Pour $C = 0$, les racines sont respectivement $\underline{P}_1 = 0$ et $\underline{P}_2 = -a$.

Puis, lorsque C augmente, elles viennent se confondre en $\underline{P}_1 = \underline{P}_2 = -\dfrac{a}{2}$, pour $C = \dfrac{a^2}{4}$.

Elles sont ensuite complexes conjuguées : leur partie imaginaire croît avec C, alors que leur

partie réelle reste constante et égale à $-\frac{a}{2}$. Le lieu des racines est donné à la figure 2.

Dans le cas général, la détermination des racines (et *a fortiori* celle de leurs variations) semble relativement complexe dans la mesure où l'ordre du polynôme $\underline{G}(\underline{P}) + C\underline{H}(\underline{P})$ peut être élevé (ordre 4 pour l'asservissement de vitesse traité précédemment). La méthode d'Evans, que nous ne développerons pas ici, permet de déterminer les éléments caractéristiques du lieu des racines. Le problème peut être traité numériquement au moyen de l'ordinateur : il existe en effet des programmes utilitaires capables de résoudre des équations de degré élevé. L'appel à un de ces programmes permet de déterminer les racines de l'équation $\underline{G}(\underline{P}) + C\underline{H}(\underline{P}) = 0$ et d'obtenir numériquement le tracé exact du lieu des racines.

La stabilité du système bouclé, imposant que la partie réelle des racines de l'équation $\underline{G}(\underline{P}) + C\underline{H}(\underline{P}) = 0$ soit strictement négative, interdit au lieu des racines de pénétrer dans la partie du plan complexe située à droite de l'axe imaginaire (nous pouvons en particulier en conclure que le système dont la transmittance en boucle ouverte est $\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}(\underline{P} + a)}$ et dont le lieu des racines est donné à la figure 2, est stable en boucle fermée, quelle que soit la valeur de C).

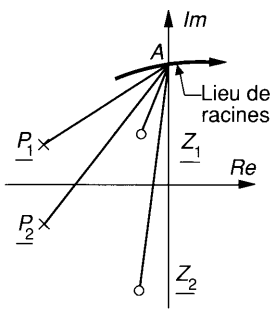


Fig. 3

La limite de stabilité correspond à la valeur de C pour laquelle le lieu des racines coupe l'axe imaginaire (*fig.* 3). $\underline{T}(\underline{P})$ peut être écrit sous la forme

$$\underline{T}(\underline{P}) = C\frac{(\underline{P} - \underline{z}_1)(\underline{P} - \underline{z}_2)\ldots(\underline{P} - \underline{z}_m)}{(\underline{P} - \underline{P}_1)(\underline{P} - \underline{P}_2)\ldots(\underline{P} - \underline{P}_n)}$$

$\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ sont les zéros de $\underline{T}(\underline{P})$. Leurs points images sont représentés par un 0 sur la figure 3.

$\underline{P}_1, \underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_n$ sont les pôles de $\underline{T}(\underline{P})$. Leurs points images sont représentés par un X sur la figure 3.

En tout point du lieu des racines on peut écrire

$$1 + \underline{T}(\underline{P}) = 1 + C\frac{(\underline{P} - \underline{z}_1)(\underline{P} - \underline{z}_2)\ldots(\underline{P} - \underline{z}_m)}{(\underline{P} - \underline{P}_1)(\underline{P} - \underline{P}_2)\ldots(\underline{P} - \underline{P}_n)} = 0$$

Soit en module :

$$C\frac{|\underline{P} - \underline{z}_1|\,|\underline{P} - \underline{z}_2|\ \ldots\ |\underline{P} - \underline{z}_m|}{|\underline{P} - \underline{P}_1|\,|\underline{P} - \underline{P}_2|\ \ldots\ |\underline{P} - \underline{P}_n|} = 1$$

Ce qui se traduit sur la figure 3 par

$$\mathbf{C} = \frac{\boldsymbol{AP}_1 \,.\, \boldsymbol{AP}_2 \,.\, \ldots \,.\, \boldsymbol{AP}_n}{\boldsymbol{AZ}_1 \,.\, \boldsymbol{AZ}_2 \,.\, \ldots \,.\, \boldsymbol{AZ}_m}.$$

La mesure graphique des longueurs des segments $AP_1, \ldots, AP_n, AZ_1, \ldots, AZ_m$ permet de déterminer la valeur de C qui correspond à la limite de stabilité.

Exemple d'application

Considérons, à nouveau, l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3. La transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$, $\omega_m = 91{,}4$ rad/s $\quad m = 1{,}82$

$\omega_0 = 628$ rad/s $\quad m_0 = 1$.

En posant $C = AH_0$, il faut tracer le lieu des racines de l'équation

$$\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right) + C = 0$$

ou en valeurs numériques :

$$303 \,.\, 10^{-12}\underline{P}^4 + 482 \,.\, 10^{-9}\underline{P}^3 + 249 \,.\, 10^{-6}\underline{P}^2 + 43 \,.\, 10^{-3}\underline{P} + 1 + C = 0.$$

Le lieu des racines (donné à la figure 4) a été tracé à l'aide du programme EUREKA disponible pour les ordinateurs compatibles I.B.M. PC.

La transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{P})$ n'a pas de zéro.

Les pôles :

$$P_0 = -\omega_0 = -628 \text{ (deux fois)},$$
$$P_1 = -m\omega_m + \omega_m\sqrt{m^2 - 1} = -27{,}4,$$
$$P_2 = -m\omega_m - \omega_m\sqrt{m^2 - 1} = -305,$$

sont représentés sur la figure 4 par les points P_0, P_1, P_2.

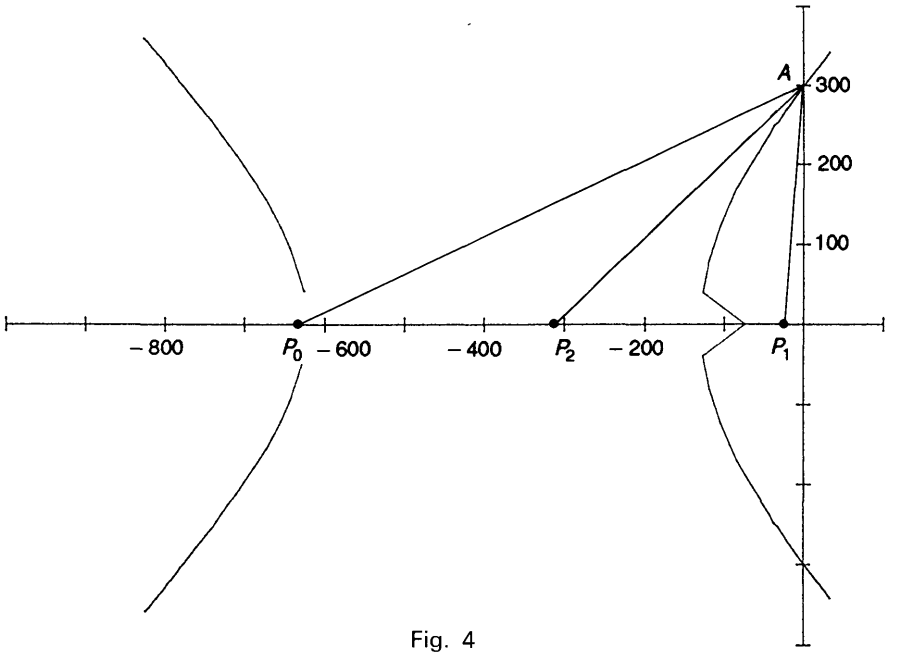


Fig. 4

La valeur limite de C est donnée par :

$$C = (AP_0)^2(AP_1)(AP_2)\frac{1}{\omega_0^2\omega_m^2} = 18{,}8.$$

La stabilité impose donc une valeur limite de $A = \frac{R_2}{R_1}$ égale à 18,8 ce qui correspond au résultat obtenu par le critère de Routh.

2.3. CRITÈRE DE NYQUIST

Soit $\underline{T}(\underline{P})$ la transmittance en boucle ouverte.

A chaque valeur de la variable complexe $\underline{P}$ correspond une valeur de $\underline{T}(\underline{P})$, et un point image de $\underline{T}(\underline{P})$ dans le plan complexe. Si la variable $\underline{P}$ varie, le point image de $\underline{T}(\underline{P})$ se déplace et décrit une courbe.

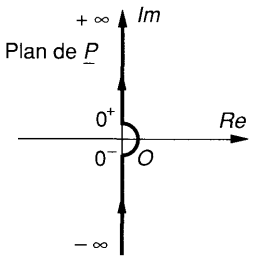


Fig. 5

On montre mathématiquement que :

a) Lorsque le point image de $\underline{P}$ se déplace sur l'axe imaginaire de $-\infty$ à $+\infty$ en excluant l'origine par un demi-cercle infinitésimal placé du côté des réels positifs (*fig.* 5), le point représentatif de $\underline{T}(\underline{P})$ décrit une courbe fermée appelée *diagramme de Nyquist* (*fig.* 6).

***b*) Toutes les racines de $1 + \underline{T}(\underline{P}) = 0$ ont une partie réelle strictement négative (système stable), si le diagramme de Nyquist n'entoure pas le point -1.**

2.3.1. Conséquences

a) Le point image de $\underline{P}$ décrivant l'axe imaginaire, on peut écrire $\underline{P} = j\omega$ avec $-\infty < \omega < +\infty$. Sachant que la transformation $\underline{P} \rightarrow j\omega$ permet de passer de la transmittance de Laplace à la

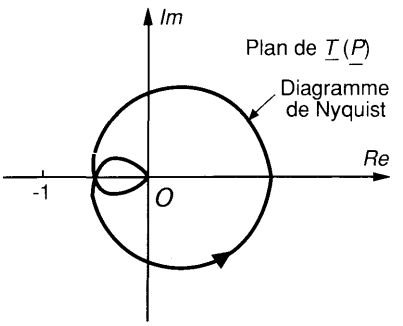


Fig. 6

transmittance complexe valable en régime harmonique (régime sinusoïdal permanent), le tracé du diagramme de Nyquist peut être obtenu par l'une des méthodes suivantes.

Méthode numérique

Si l'expression mathématique de $\underline{T}(\underline{P})$ est connue, on remplace $\underline{P}$ par $j\omega$ et on trace point par point le diagramme de Nyquist en calculant, pour chaque valeur de ω, les parties réelles et imaginaires de $\underline{T}(j\omega)$. On peut ainsi obtenir simplement le tracé automatique du diagramme par ordinateur.

Méthode expérimentale

Le déplacement de $\underline{P}$ de 0_+ à l'infini sur le demi-axe imaginaire supérieur correspond en pratique à l'attaque du système en régime sinusoïdal permanent dont la fréquence varie de 0 à l'infini. Le diagramme de Nyquist expérimental est obtenu en ouvrant la boucle au niveau de la grandeur de retour (*fig.* 7), en appliquant une grandeur de commande x_C sinusoïdale et en relevant pour chaque fréquence, le rapport des valeurs efficaces $\dfrac{X_R}{X_C} = |\underline{T}(j\omega)|$ et $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{T}(j\omega))$ angle d'avance de x_R sur x_C.

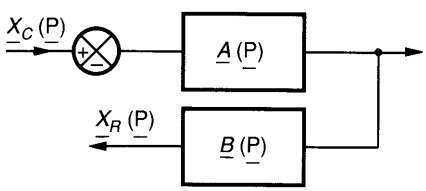


Fig. 7

Les coefficients de $\underline{T}(\underline{P})$ étant réels, deux valeurs complexes conjuguées de $\underline{P}$ conduisent à deux valeurs de $\underline{T}(\underline{P})$ elles-mêmes complexes conjuguées. Le diagramme de Nyquist s'obtient donc en complétant la courbe expérimentale par son symétrique par rapport à l'axe réel.

Le critère de Nyquist permet ainsi d'étudier expérimentalement la stabilité d'un système dont on ne connaît pas de modèle mathématique.

b) Si le diagramme de Nyquist passe par le point -1, le système est à la limite de l'instabilité. Il existe alors une pulsation ω_{C_0} pour laquelle $\underline{T}(j\omega_{C_0}) = \underline{A}(j\omega_{C_0}) \cdot \underline{B}(j\omega_{C_0}) = -1$.

En l'absence de signal de commande, le système bouclé de la figure 8, fait apparaître un signal de retour $\underline{X}_R(j\omega_{C_0})$ tel que

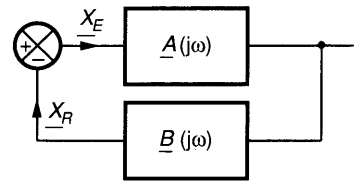


Fig. 8

$$\underline{X}_R(j\omega_{C_0}) = \underline{A}(j\omega_{C_0})\underline{B}(j\omega_{C_0})\underline{X}_E(j\omega_{C_0}) = -\underline{X}_E(j\omega_{C_0}).$$

Après le changement de signe dû au comparateur, le signal de retour x_R conduit à un signal d'entrée x_E juste égal à la valeur nécessaire à l'entretien des oscillations. Le système bouclé est instable et oscille sinusoïdalement avec la pulsation ω_{C_0} pour laquelle le diagramme de Nyquist passe par le point -1.

Si, partant de là, on augmente le facteur C par un accroissement de la sensibilité de la chaîne directe, on augmente le signal de retour x_R (qui est alors plus que suffisant pour entretenir les oscillations) et le diagramme de Nyquist se gonfle, englobant ainsi le point -1. C'est une justification, *a posteriori*, du critère de Nyquist.

c) Lors de la circulation de $\underline{P}$ sur l'axe imaginaire (*fig.* 5), il est nécessaire d'exclure le point O par un déplacement sur un cercle de rayon infiniment petit. En effet, la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{P})$, admettant pour expression générale

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}^{\alpha}} \frac{1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n}$$

peut ne pas être définie pour $\underline{P} = 0$. Le point correspondant sur le diagramme de Nyquist partant alors à l'infini, il est impératif de savoir comment le diagramme se referme à l'infini. Au voisinage de $\underline{P} = 0$, $\underline{T}(\underline{P})$ s'écrit $\dfrac{C}{\underline{P}^{\alpha}}$.

Lorsque $\underline{P}$ passe de 0_- à 0_+ sur le cercle de la figure 5, l'argument de $\underline{P}$ passe de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique et l'argument de $\underline{T}(\underline{P})$ passe de $\alpha\dfrac{\pi}{2}$ à $-\alpha\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire), soit :

Sur le diagramme de Nyquist, on passe du point correspondant à $\underline{P} = 0-$, au point correspondant à $\underline{P} = 0+$ en effectuant une rotation de $\alpha\pi$ dans le sens horaire

Exemple 1

- $\underline{T}(\underline{P}) = \dfrac{C}{\underline{P}(\underline{P}+a)}$ soit $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\dfrac{C}{a}}{j\omega\left(1 + j\dfrac{\omega}{a}\right)}$

pour $\omega \to +\infty$, $|\underline{T}(j\omega)| \to 0$

$\arg \underline{T}(j\omega) \to -(\pi -)$;

pour $\omega \to 0_+$, $|\underline{T}(j\omega)| \to \infty$

$\arg T(j\omega) \to -\left(\dfrac{\pi}{2}+\right)$,

la partie réelle de $\underline{T}(j\omega)$:

$R_e[\underline{T}(j\omega)] = \dfrac{-C}{a^2+\omega^2}$ tend vers $-\dfrac{C}{a^2}$

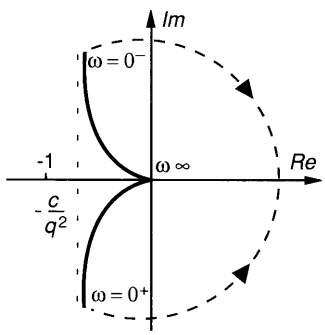


Fig. 9

Le diagramme de Nyquist correspondant est donné à la figure 9. À l'infini on passe du point correspondant à $\omega = 0_-$ au point correspondant à 0_+ par une rotation de $\alpha\pi = \pi$ dans le sens horaire. Quelles que soient les valeurs de C et de a, le diagramme n'entoure pas le point -1. Le système bouclé est donc inconditionnellement stable comme nous l'avions prévu à l'aide du lieu des racines.

Exemple 2

- $\underline{T}(\underline{P}) = \dfrac{C}{\underline{P}^2(\underline{P}+a)}$ soit $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{-C}{\omega^2(a+j\omega)}$.

Pour $\omega \to +\infty$, $|\underline{T}(j\omega)| \to 0$,

$\arg \underline{T}(j\omega) \to -\left(\dfrac{3\pi}{2_-}\right)$;

Pour $\omega \to 0_+$, $|\underline{T}(j\omega)| \to \infty$,

$\arg \underline{T}(j\omega) \to -(\pi_+)$.

Le diagramme de Nyquist correspondant est donné à la figure 10. À l'infini, on passe du point correspondant à $\omega = 0_-$ au point correspondant à $\omega = 0_+$ par une rotation de $\alpha\pi = 2\pi$ dans le sens horaire. Quelles que soient les valeurs de C et a, le diagramme de Nyquist entoure le point -1 et le système bouclé est instable.

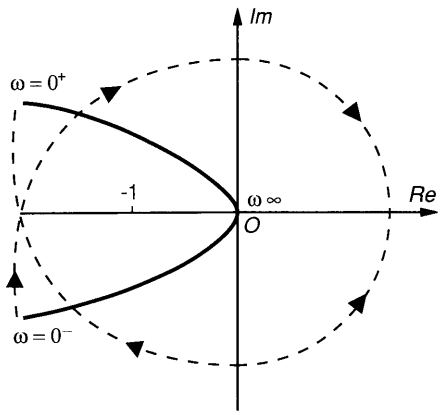


Fig. 10.

Exemple 3

- $\underline{T}(\underline{P}) = \dfrac{C}{\underline{P}(\underline{P}+a)(\underline{P}+b)}$,

soit $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{C}{j\omega(a+j\omega)(b+j\omega)}$.

Pour $\omega \to +\infty$, $|\underline{T}(j\omega)| \to 0$,

$\arg \underline{T}(j\omega) \to -\left(\dfrac{3\pi}{2_-}\right)$;

Pour $\omega \to 0_+$, $|\underline{T}(j\omega)| \to \infty$,

$\arg \underline{T}(j\omega) \to -\left(\dfrac{\pi}{2_+}\right)$.

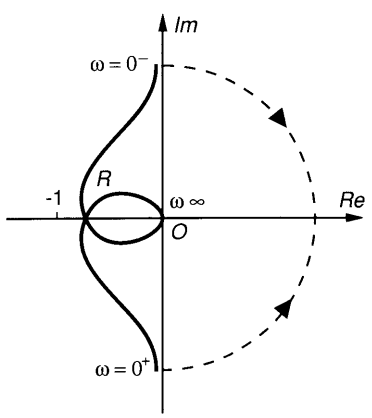


Fig. 11.

Le diagramme de Nyquist correspondant est donné à la figure 11. À l'infini, on passe du point correspondant à $\omega = 0_-$ au point correspondant à $\omega = 0_+$ par une rotation de $\alpha\pi = \pi$ dans le sens horaire.

La stabilité impose $\overline{OR} > -1$. Afin de déterminer la valeur algébrique $\overline{OR}$, calculons la partie réelle de $\underline{T}(j\omega)$ à la pulsation ω_C pour laquelle sa partie imaginaire est nulle.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{C(a - j\omega)(b - j\omega)}{j\omega(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)}$$

soit $$R_e[\underline{T}(j\omega)] = \frac{-C(a+b)}{(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)}$$

et $$I_m[\underline{T}(j\omega)] = \frac{C(ab - \omega^2)}{j\omega(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)}.$$

Pour $\omega = \omega_C = \sqrt{ab}$:

$$I_m[\underline{T}(j\omega_C)] = 0 \quad \text{et} \quad R_e[\underline{T}(j\omega_C)] = \frac{-C}{ab(a+b)}.$$

Le système bouclé est donc stable pour

$$C < ab(a + b)$$

Afin d'éviter l'inconvénient que présente la non-définition de $\underline{T}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, on remplace parfois le critère de Nyquist par le critère de revers.

Critère du revers :
Le système est stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist de la transmittance $\underline{T}(j\omega)$ en boucle ouverte laisse le point -1 sur sa gauche lorsque la pulsation ω varie de 0_+ à l'infini.

Le critère peut être vérifié sur les trois exemples précédents.

2.3.2. Exemple d'application

Reprenons l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3 pour lequel la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$, $\omega_m = 91{,}4$ rad/s, $m = 1{,}82$;
$\omega_0 = 628$ rad/s, $m_0 = 1$.

Le tracé, à l'aide de l'ordinateur, du diagramme de Nyquist de

$$\underline{T}_0 = \frac{H_0}{\left[1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_m} + \left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]\left[1 + 2jm_0\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

est donné à la figure 12. Ce diagramme coupe l'axe réel au point d'abscisse $\overline{OR} = -0{,}053$. Le système en boucle fermée est donc stable si $A \cdot \overline{OR} > -1$, soit $A < 18{,}9$. Ce résultat correspond aux valeurs déterminées à partir du critère de Routh et à partir du lieu des racines.

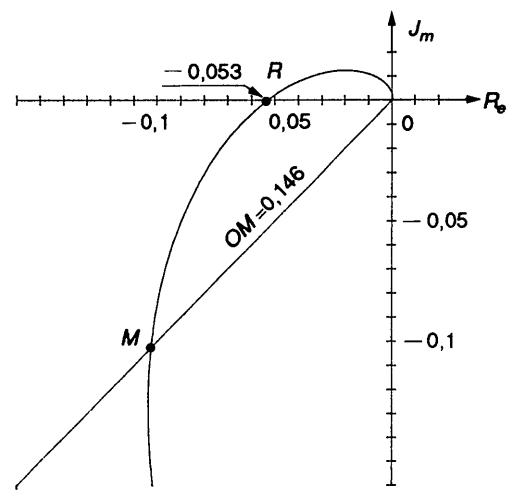


Fig. 12

2.4. DIAGRAMMES DE BODE

Soit un système bouclé dont la transmittance en boucle ouverte est $\underline{T}(\underline{P})$. Considérons le diagramme de Nyquist de $\underline{T}(j\omega)$ en régime harmonique. Soit ω_c la pulsation pour laquelle **arg $\underline{T}(j\omega) = \pi$,** nous pouvons conclure à la stabilité du système si le module de $\underline{T}(j\omega)$ est inférieur à 1 à la pulsation ω_c, soit **$|\underline{T}(j\omega_c)| < 1$.** Nous sommes ainsi conduits à représenter arg $[\underline{T}(j\omega)]$ et $|\underline{T}(j\omega)|$ en fonction de la pulsation ω. Les diagrammes de Bode (voir tome I) permettent d'obtenir rapidement un tracé sim-

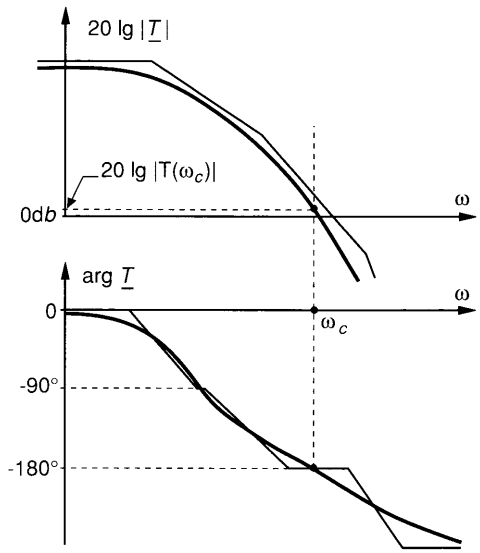


Fig. 13.

plifié des courbes correspondantes. Ils sont obtenus en représentant $20 \lg |\underline{T}(j\omega)|$ et $\arg \underline{T}(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω repérée en échelle logarithmique. La valeur de $20 \lg |\underline{T}(j\omega)|$ est la mesure de $|\underline{T}(j\omega)|$ en décibels.

Ces diagrammes, dont l'allure est donnée à la figure 13, peuvent, en première approximation, être assimilés à leurs asymptotes.

L'étude de la stabilité s'effectue de la manière suivante.

a) Repérer la pulsation ω_C pour laquelle

$$\arg [\underline{T}(j\omega)] = -180°.$$

b) Déterminer sur le diagramme du module $20 \lg |\underline{T}(j\omega_C)|$:

- si $20 \lg |\underline{T}(j\omega_C)| > 0$, soit $|\underline{T}(j\omega_C)| > 1$ le système bouclé est instable;
- si $20 \lg |\underline{T}(j\omega_C)| < 0$, soit $|\underline{T}(j\omega_C)| < 1$ le système bouclé est stable.

À titre d'exemple, le système dont le diagramme de Bode est donné à la figure 13 est instable, car $20 \lg |\underline{T}(j\omega_C)| > 0$.

L'étude peut être réalisée :

– **théoriquement,** à partir de l'expression mathématique de $\underline{T}(j\omega)$:

- de façon approximative en assimilant les courbes aux asymptotes quite à réaliser une correction en estimant la position des courbes;
- de façon exacte, en traçant par ordinateur les courbes $20 \lg |\underline{T}|$ et $\arg \underline{T}$;

– **pratiquement,** à partir du relevé expérimental des diagrammes de Bode.

Exemple d'application

Considérons à nouveau l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3, dont la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2m \frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0 \frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$: $m = 1{,}82$, $\omega_m = 91{,}4$ rad/s;
$m_0 = 1$, $\omega_0 = 628$ rad/s.

Sachant que :

$$1 + 2j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_m} + \left(j \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

avec $\omega_2 = \omega_m[m + \sqrt{m^2 - 1}] = 305$ rad/s;
$\omega_2 = \omega_m[m - \sqrt{m^2 - 1}] = 27{,}4$ rad/s.

La transmittance complexe s'écrit

$$\underline{T} = \frac{AH_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Sur la figure 14 sont reportées les asymptotes du diagramme de Bode de la transmittance

$$\underline{T}_0 = \frac{H_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

ainsi que la courbe expérimentale qui peut être relevée de la façon suivante (voir *fig.* 4 chap. 3) :

– déconnecter l'amplificateur de différence au niveau des points M_E et M_S;

– alimenter l'entrée + du comparateur par une tension u_B de la forme $U_B = U_{B_0} + U_{B_1} \cos \omega t$. L'offset U_{B_0} et l'amplitude U_{B_1} sont réglés de telle sorte que $0 < u_B < V_0$. La vitesse du moteur varie alors sinusoïdalement autour d'une valeur moyenne, si bien que la tension u_R, image de la vitesse, s'écrit :

$$u_R = U_{R_0} + U_{R_1} \cos (\omega t + \varphi)$$

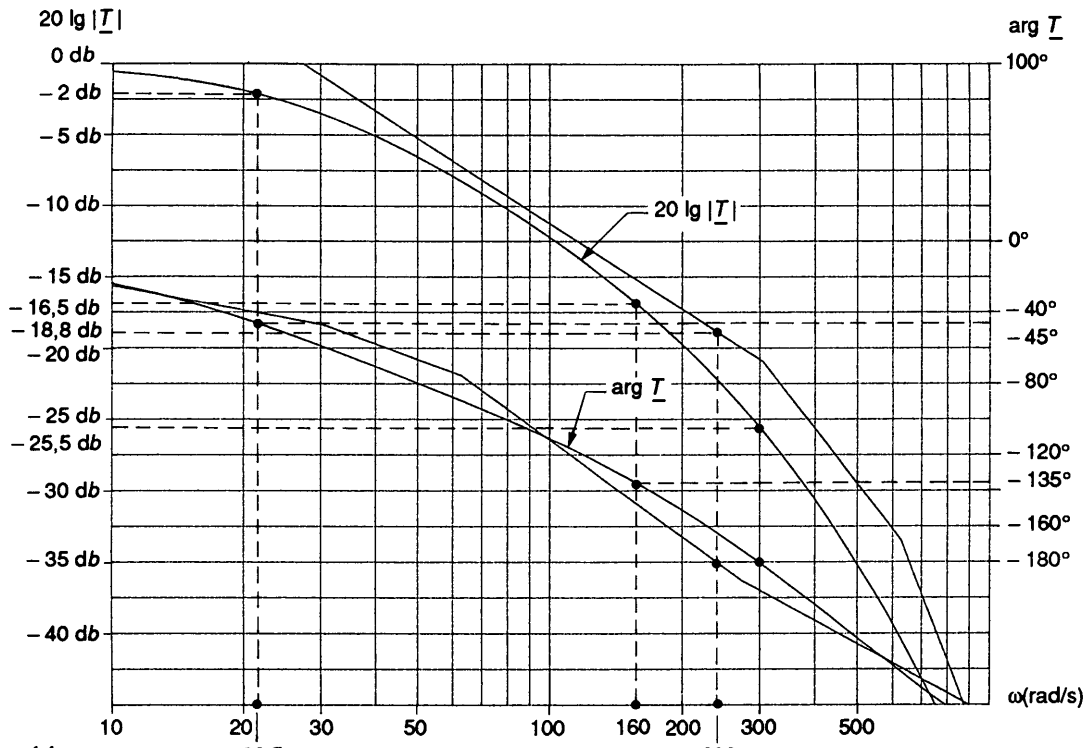


Fig. 14

— relever $|\underline{T}_0(j\omega)| = \dfrac{U_{R_1}}{U_{B_1}}$ et $\arg [\underline{T}_0(j\omega)] = \varphi$ et tracer les diagrammes de Bode.

• En assimilant les diagrammes de Bode aux asymptotes, on relève pour la pulsation $\omega_C = 220$ rad/s,

$$20 \lg |\underline{T}_0(j\omega_C)| = -18{,}8 \text{ db.}$$
$$\arg [\underline{T}_0(j\omega_C)] = -180°.$$

La condition de stabilité impose

$$20 \lg A + 20 \lg |\underline{T}_0(j\omega_c)| < 0,$$

soit $20 \lg A < 18{,}8$ donc $A < 8{,}7$.

• A partir du tracé expérimental, on relève $\omega_C = 300$ rad/s, $20 \lg |\underline{T}_0(j\omega_C)| = -25{,}5$ db.

La condition de stabilité impose

$$20 \lg A < -20 \lg |\underline{T}_0(j\omega_c)| = 25{,}5 \text{ db};$$

soit $A < 18{,}8$, ce qui correspond aux calculs précédents.

3. MARGES DE STABILITÉ

Si les critères qui viennent d'être étudiés permettent de savoir que le système est inutilisable (en tant qu'amplificateur ou en tant qu'asservissement) lorsqu'il est instable, ils ne garantissent pas qu'il soit techniquement utilisable lorsqu'il est stable.

3.1. CAS PARTICULIER : ASSERVISSEMENT DE POSITION

Le schéma bloc de l'asservissement de position est rappelé à la figure 15 avec

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}(1 + \tau \underline{P})}$$

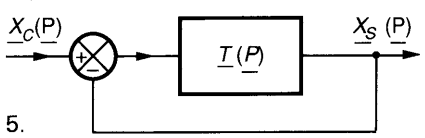


Fig. 15.

La transmittance du système bouclé s'écrit

$$\underline{A}_R(\underline{P}) = \frac{\underline{T}(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$$

soit $$\underline{A}_R(\underline{P}) = \frac{\underline{X}_S(\underline{P})}{\underline{X}_C(\underline{P})} = \frac{C}{C + \underline{P} + \tau \underline{P}^2}$$

a) Réponse indicielle

Le système étant initialement au repos

$$\left(x_S = x_C = \frac{dx_S}{dt} = \ldots = 0 \right),$$

on lui applique un signal de commande x_C en

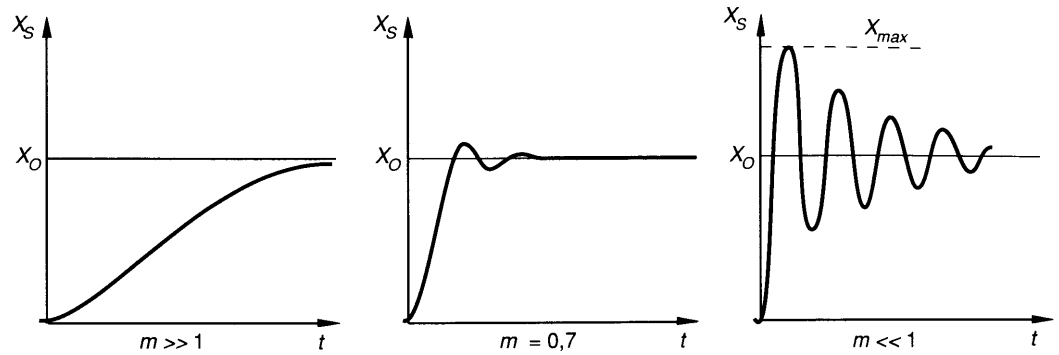


Fig. 16.

échelon d'amplitude X_0. À partir de l'équation $\underline{X}_S(\underline{P})[C + \underline{P} + \tau \underline{P}^2] = C\underline{X}_C(\underline{P})$, on détermine l'équation différentielle

$$\tau \frac{d^2x_S}{dt^2} + \frac{dx_S}{dt} + Cx_S = Cx_C = CX_0.$$

En posant $\begin{cases} \dfrac{1}{\tau} = 2m\omega_0 \\ \dfrac{C}{\tau} = \omega_0^2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} m = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau C}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{\tau}} \end{cases}$

il vient $\dfrac{d^2x_S}{dt^2} + 2m\omega_0 \dfrac{dx_S}{dt} + \omega_0^2 x_S = \omega_0^2 X_0.$

La forme de la réponse $x_S(t)$ (voir *fig.* 16) dépend de la valeur du coefficient d'amortissement m (voir tome 1, chap. 1).

Rappelons :

- ***Temps de réponse à 5 %***

C'est l'instant à partir duquel la réponse diffère de moins de 5 % de sa valeur finale.

- il est minimal et vaut $0{,}44 \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ pour $m = 0{,}7$;
- pour $m \gg 1$ il est peu différent de $\dfrac{6m}{\omega_0}$;
- pour $m \ll 1$ il est peu différent de $\dfrac{3}{m\omega_0}$.

Les variations de $\dfrac{t_{r5\%} \cdot \omega_0}{2\pi}$ en fonction de m sont rappelées à la figure 17.

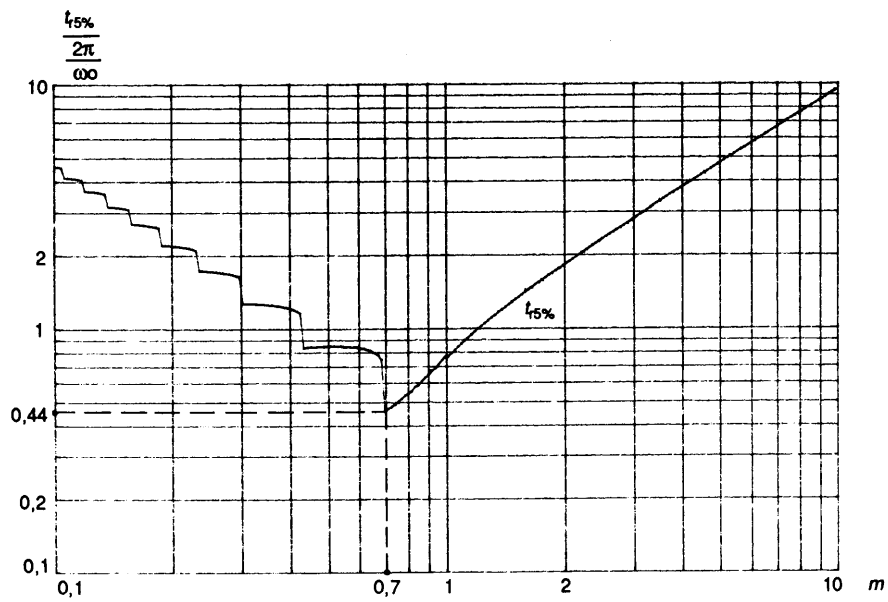


Fig. 17

• ***Dépassement***

Soit X_{max} la valeur maximale de x_S pour une réponse sinusoïdale amortie. On définit le dépassement d par $d = \dfrac{X_{max} - X_0}{X_0}$.

Il varie en fonction de m suivant l'expression $d = e^{-\pi \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}$.

Bien que, comme nous l'avons montré précédemment, le système soit inconditionnellement stable, il peut être techniquement inutilisable, en effet (voir *fig.* 16 et 17) :

- pour $m \gg 1$, le temps de réponse du système est trop grand;
- pour $m \ll 1$, les oscillations sont trop importantes.

En pratique, on tolère un dépassement de **20 %.** (Il est à remarquer que le tolérable dépend du système à mettre en œuvre : on peut admettre un dépassement pour l'asservissement de position d'une antenne de poursuite; par contre, pour l'asservissement de position d'un outil, tout dépassement conduit à un défaut d'usinage.) Déterminons la valeur de m qui correspond à un dépassement de 20 % : il faut, pour cela, résoudre l'équation :

$$0{,}2 = e^{-\pi \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

soit $\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} = \dfrac{1}{\pi} \lg 5 = 0{,}512$

d'où l'on tire $\boldsymbol{m = 0{,}45.}$

b) Réponse harmonique

En régime sinusoïdal permanent, la transmittance complexe s'écrit :

$$\underline{A}_R(j\omega) = \frac{\underline{X}_S}{\underline{X}_C} = \frac{C}{C + j\omega + \tau(j\omega)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $m = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau C}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{\tau}}$.

Le diagramme de Bode du module de la transmittance $\dfrac{1}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ est rappelé à la figure 18.

Pour $m < 0{,}7$. il présente une remontée égale à $-20 \lg 2m\sqrt{1-m^2}$ décibels.

Pour $m = 0{,}45$, cette remontée est égale à

$$-20 \lg 0{,}9\sqrt{1-(0{,}45)^2} = 1{,}9 \text{ db} \approx \mathbf{2\ db.}$$

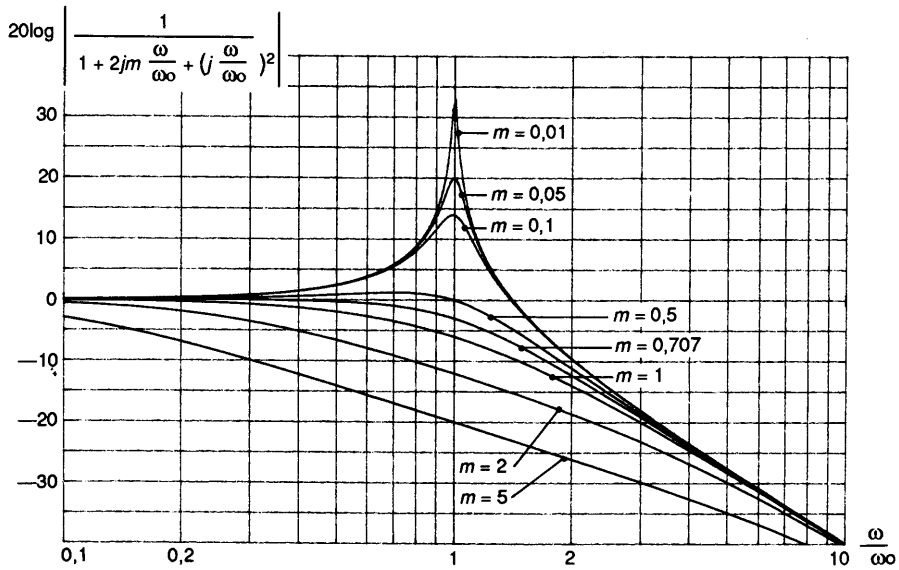


Fig. 18.

c) Étude de la boucle ouverte en régime harmonique

Pour que le système soit stable en boucle fermée, il faut éviter pour la transmittance en boucle ouverte, $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{C}{j\omega(1 + j\omega\tau)}$. La condition suivante :

$$|\underline{T}(j\omega)| = 1 \quad \text{avec} \quad \arg \underline{T}(j\omega) = -180°.$$

La pulsation ω_u pour laquelle $|\underline{T}(j\omega)| = 1$ est telle que $\dfrac{C}{\omega_u\sqrt{1 + (\omega_u\tau)^2}} = 1$

soit $\omega_u^4\tau^2 + \omega_u^2 - C^2 = 0$ d'où l'on tire

$$\omega_u = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\tau^2C^2}}{2\tau^2}}.$$

Pour cette pulsation,

$$\arg [\underline{T}(j\omega_u)] = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_u\tau,$$

soit $\arg [\underline{T}(j\omega_u)]$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\tau^2C^2}}{2}}.$$

Compte tenu du changement de variable $m = \dfrac{1}{2\sqrt{C\tau}}$, il vient :

$$\arg \underline{T}(j\omega_u) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{4m^4}}}{2}}.$$

Pour la valeur particulière $m = 0{,}45$, on trouve $\arg \underline{T}(j\omega_u) = -133°$. Par rapport à la valeur de $-180°$, qui provoquerait l'instabilité, le système présente une marge de $180° - 133° = 47° \approx \mathbf{45°}$.

3.2. MARGE DE PHASE

La marge de phase permet de chiffrer la marge de sécurité que l'on prend par rapport à l'instabilité du système ($|\underline{T}(j\omega)| = 1$ avec $\arg \underline{T}(j\omega) = -180°$). Soit ω_u la pulsation pour laquelle $|\underline{T}(j\omega)| = 1$ en boucle ouverte. On définit la marge de phase M_φ par

$$M_\varphi = 180° + \arg \underline{T}(j\omega_u)$$

En regroupant les résultats établis, pour l'asservissement de position, dans le cas où $m = 0{,}45$, nous constatons que pour une marge de phase de 45°, la réponse indicielle présente un dépassement de 20 % et la réponse harmonique présente une remontée de 2 décibels.

Ce résultat, consigné dans le tableau suivant

Marge de phase de 45° → Boucle ouverte

Dépassement de 20 % sur la réponse indicielle
Remontée de 2 db sur la réponse harmonique → Boucle fermée

et qui a été établi dans le cas particulier de l'asservissement de position, peut être admis avec une bonne approximation pour la plupart des systèmes bouclés.

Ainsi, dans la plupart des cas une marge de phase de 45° garantit un fonctionnement correct du système.

La marge de phase peut être mise en évidence sur les diagrammes utilisés pour l'étude de la stabilité.

Diagramme de Nyquist

La marge de phase M_φ (*fig.* 19) apparaît à l'intersection du diagramme de Nyquist et du cercle de rayon 1 centré à l'origine.

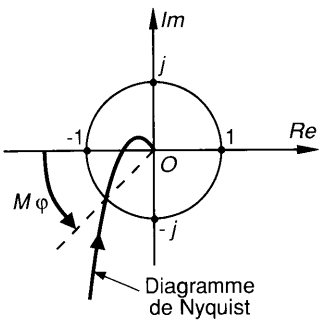


Fig. 19.

Pour $M_\varphi > 0$ le système est stable,
pour $M_\varphi < 0$ le système est instable.

Diagramme de Bode

La marge de phase M_φ (*fig.* 20) apparaît sur la verticale du point correspondant à la pulsation ω_u pour laquelle $20 \lg |\underline{T}| = 0$ db.

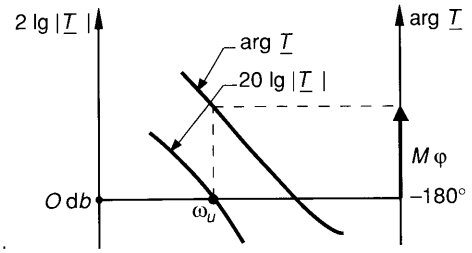


Fig. 20.

Exemples d'application

Exemple 1 : asservissement de vitesse

Reprenons l'asservissement de vitesse dont la transmittance en boucle ouverte est :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$, $m = 1{,}82$, $\omega_m = 91{,}4$ rad/s, $m_0 = 1$, $\omega_0 = 628$ rad/s,

et déterminons la valeur de l'amplification A conduisant à une marge de phase de 45°. À la pulsation ω_u pour laquelle $|\underline{T}(j\omega_u)| = 1$, l'argument doit être tel que $180° + \arg \underline{T}(j\omega_u) = 45°$ soit, $\arg \underline{T}(j\omega_u) = -135°$.

• Sur le diagramme de Bode de la figure 14, on relève pour la pulsation $\omega = 160$ rad/s, $\arg \underline{T}(j\omega) = \arg \underline{T}_0(j\omega) = -135°$ et

$$20 \lg |\underline{T}_0(j\omega)| = -16{,}5 \text{ db}.$$

Sachant que pour cette pulsation on doit avoir

$$20 \lg |\underline{T}| = 20 \lg A + 20 \lg |\underline{T}_0| = 0 \text{ db},$$

il vient $20 \lg A = 16{,}5$ db, soit $A = 6{,}7$.

• Sur le diagramme de Nyquist de la figure 12, on trace la demi droite correspondant à $\arg \underline{T}_0(j\omega) = -135°$ qui coupe le diagramme de Nyquist au point M pour lequel on relève $|\underline{T}_0(j\omega)| = 0{,}146$. Sachant, qu'en ce point, on souhaite avoir $A\,|T_0(j\omega)| = 1$, il vient $A = 6{,}85$.

Exemple 2 : amplificateur

Considérons l'amplificateur (*fig.* 21) de transmittance

$$\underline{A} = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}$$

sur lequel on réalise une contre-réaction à l'aide d'un réseau de transmittance réelle positive $\underline{B} = K$.

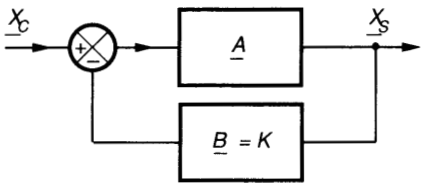


Fig. 21.

On donne $A_0 = 10^3$, $f_1 = 1$ MHz, $f_2 = 10$ MHz, $f_3 = 50$ MHz et on se propose de déterminer les valeurs de K conduisant à une marge de phase supérieure à 45°.

Sur la figure 22 sont reportés les diagrammes asymptotiques (module et argument) de la transmittance $\underline{A}$. (On rappelle qu'entre les fréquences $\frac{f_0}{10}$ et $10f_0$, la courbe d'argument de

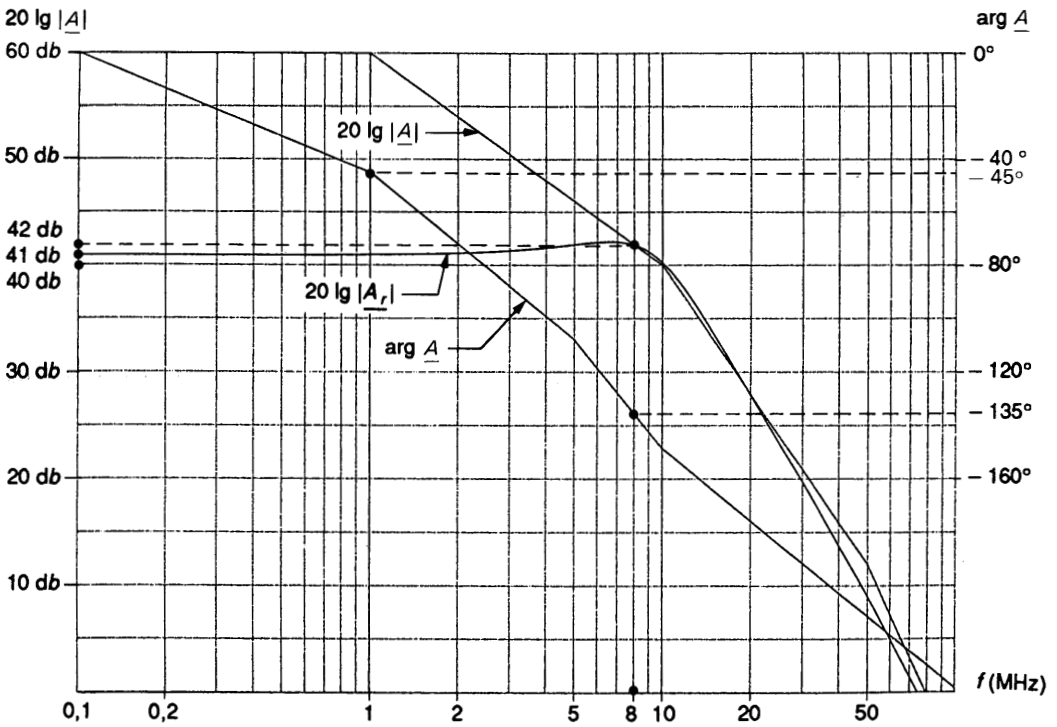


Fig. 22

la transmittance $\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}}$ peut être assimilée à une oblique passant par les points $\left(\dfrac{f_0}{10},\ 0°\right)$ et $\left(10f_0,\ -90°\right)$.

Une marge de phase supérieure à 45° impose la condition suivante :

$$\begin{cases} 20 \lg |\underline{T}| = 20 \lg |\underline{A}| + 20 \lg K < 0 \\ \arg |\underline{T}| = \arg \underline{A} + \arg K = -135° \end{cases}$$

soit $\begin{cases} 20 \lg K < -20 \lg |\underline{A}| \\ \arg \underline{A} = -135°. \end{cases}$

Pour la fréquence $f_C = 8$ MHz, on relève $\arg \underline{A} = -135°$ et $20 \lg |\underline{A}| = 42$ db. La condition précédente se traduit par $20 \lg K < -42$ db, soit $K < 8 \times 10^{-3}$.

La fonction de transfert en boucle fermée (*fig.* 22), tracée pour $K = 8 \times 10^{-3}$, égale à $20 \lg \dfrac{A_0}{1 + A_0 K} = 41$ db en basse fréquence, présente une remontée de 1,4 db.

3.3. MARGE DE GAIN

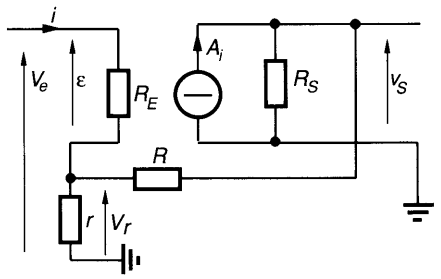
On peut aussi chiffrer la marge de sécurité, par rapport à l'instabilité, par la marge de gain. Soit ω_C la pulsation pour laquelle $\arg \underline{T}(\mathrm{j}\omega) = -180°$. On définit la marge de gain M_G par $M_G = -20 \lg |\underline{T}(\mathrm{j}\omega_C)|$:

- si $M_G > 0$, le système est stable en boucle fermée;
- si $M_G < 0$, le système est instable en boucle fermée.

EXERCICES

1. Contre-réaction tension-tension

La figure ci-dessous représente le schéma équivalent, pour les petits signaux, d'un amplificateur de tension à contre-réaction tension-tension.



1° Dessiner le schéma-bloc du montage, en donnant l'expression de la transmittance G de la chaîne directe et celle de la transmittance H de la chaîne de retour.

2° On donne $R \gg R_S$, $A \gg \dfrac{r}{(R+r)}$, $\dfrac{A}{R} \gg \dfrac{1}{R_S}$.

Simplifier les expressions de G et H et montrer que

$$G = \frac{A \,.\, R_S}{R_E} \quad \text{et} \quad H = \frac{r}{(R+r)}.$$

3° Calculer la résistance d'entrée R_e de l'amplificateur sans contre-réaction ainsi que sa résistance de sortie R_s. Simplifier R_s compte tenu de $R \gg R_S$.

4° Déterminer, pour l'amplificateur avec contre-réaction :

- la résistance d'entrée R_{er};
- la résistance de sortie R_{sr};
- l'amplification en tension A_{vr}.

5° On donne $R_E = 10$ kΩ, $R_S = 1$ kΩ, $R = 100$ kΩ, $r = 1$ kΩ. L'expression de $\underline{A}$ en fonction de la fréquence est :

$$\underline{A} = \frac{10^5}{\left(1 + \dfrac{\mathrm{j}f}{1\,000}\right)\left(1 + \dfrac{\mathrm{j}f}{100\,000}\right)}.$$

Tracer le diagramme asymptotique de la transmittance en boucle ouverte, $20 \,.\, \lg |GH|$ et $\arg (\underline{GH})$.

En assimilant les courbes aux asymptotes, quelle est la marge de phase?

6° Calculer la marge de phase exacte.

2. Soit le montage de test figure 1. Les amplificateurs opérationnels présentent une impédance d'entrée infinie et un gain

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{\left(1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 10 \text{ Hz} \\ \mu_0 = 10^5 \end{cases}$$

On donne : $R_0 = 100\ \Omega$; $R_1 = 10$ kΩ.

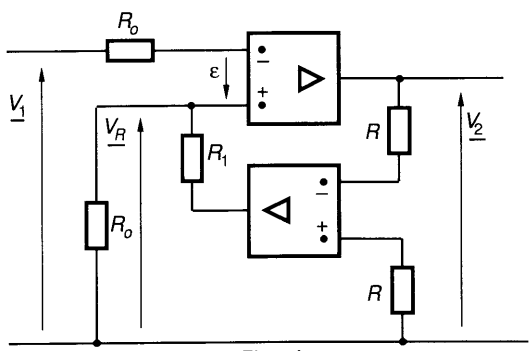


Fig. 1

1° *Étude de la stabilité du montage.*

a) Montrer que le montage peut être décrit par le schéma bloc de la figure 2.

b) Calculer $\underline{A}$ et $\underline{\beta}$ en fonction de $\underline{\mu}$, R_0, R_1.

c) Calculer le gain en boucle ouverte $\underline{T_0}$.

d) Tracer les courbes d'équation 20 lg $|\underline{T_0}|$ et arg $(\underline{T_0})$ en fonction de f.

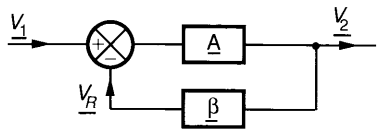


Fig. 2

e) Quelle est la marge de phase du montage? Est-il stable en boucle fermée?

2° *Compensation :* On modifie le montage comme l'indique la figure 3.

a) Le circuit pouvant toujours être décrit par le schéma bloc de la figure 2, calculer la nouvelle valeur de $\underline{\beta}$ en fonction des éléments du montage et la simplifier compte tenu de $|\mu| \gg 1$.

b) Calculer la nouvelle expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $\underline{T'_0}$ et la simplifier compte tenu de $\mu_0 RC\omega_0 \gg 1$.

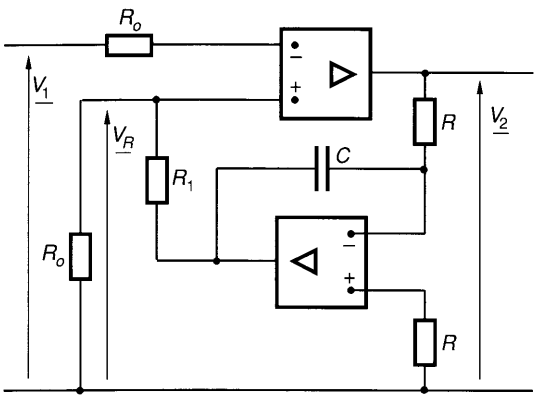


Fig. 3

c) Compte tenu de $\mu_0 RC\omega_0 \gg 1$, tracer l'allure des courbes 20 lg $|\underline{T'_0}|$ et arg $(\underline{T'_0})$ en fonction de f_0.

d) Calculer la valeur du produit RC pour que la marge de phase soit de 45°.

3. Une chaîne d'asservissement de position comporte les éléments suivants (*fig.* 1) :

• *Un système de deux potentiomètres* P_1 *et* P_2 donnant une rotation totale de 6 radians et alimentés par une tension commune de 6 V. On obtient ainsi entre les deux curseurs des potentiomètres et la masse générale du système, deux tensions V_1 et V_2 proportionnelles aux angles de rotation des potentiomètres, soit :

$$V_1 = k\theta_e \qquad \text{et} \qquad V_2 = k\theta_s.$$

• *Un moteur à courant continu M*, à flux constant (aimant permanent) et à vitesse lente, délivrant un couple moteur dont le moment est proportionnel au courant dans l'induit, soit :

$$C_m = K_C i, \quad \text{avec} \quad K_C = 0{,}2 \text{ m . N/A.}$$

La résistance de l'induit du moteur est $R_m = 25\ \Omega$, sa réactance est négligée et on ne tiendra pas compte de la réaction magnétique de l'induit.
Par ailleurs, sa force contre-électromotrice, E, est proportionnelle à sa vitesse angulaire de rotation, soit :

$$E = K_e\,\Omega, \quad \text{avec} \quad K_e = 0{,}2 \text{ V/rd/s.}$$

• *Une chaîne d'amplification composée :*

— d'un amplificateur opérationnel A_1, de gain infini, de résistance d'entrée infinie et de résistance de sortie négligeable devant sa charge,

— un amplificateur de puissance A_2, dont l'amplification en tension *à vide* est égale à 1 et dont la résistance de sortie est $R_s = 5\ \Omega$. On donne la valeur des résistances R_1 et R_2 :

$$R_1 = 1\ \text{k}\Omega, \quad R_2 = 100\ \text{k}\Omega$$

ainsi que celle du moment d'inertie de l'ensemble des parties mobiles en rotation, par rapport à l'axe de rotation du système, soit :

$$J = 1{,}06 \times 10^{-4} \text{ kg . m}^2.$$

1° Exprimer la tension de sortie à vide, V_{s_0}, le moteur étant débranché, en fonction de $U \equiv V_1 - V_2$ et des éléments du montage.
Proposer alors un schéma équivalent à l'ensemble (moteur + amplificateur), le moteur tournant à la vitesse angulaire Ω. En déduire l'expression du courant de sortie, $i = f(U)$.

2° En appliquant la loi fondamentale de la dynamique au moteur en rotation, soit $C_m = J\dfrac{d\Omega}{dt}$, toutes les causes de

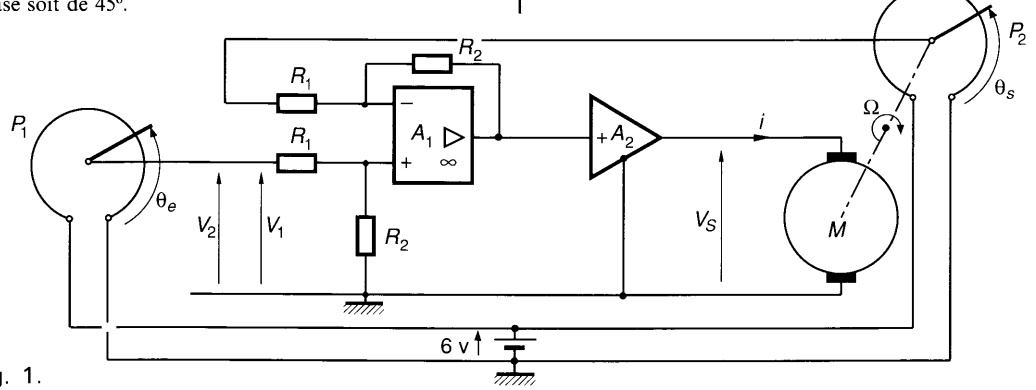


Fig. 1.

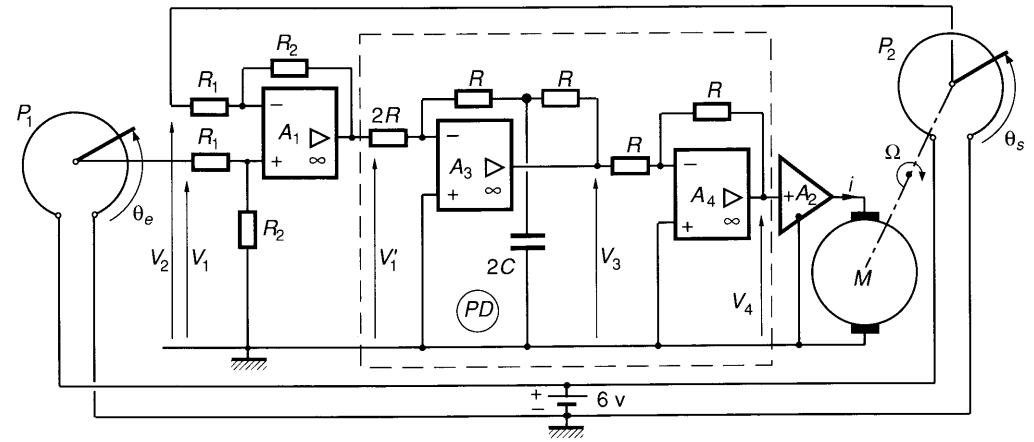


Fig. 2

frottements mécaniques étant négligées, exprimer la relation entre Ω (et sa dérivée) et U.

a) En déduire la transmittance opérationnelle de l'ensemble (amplificateur + moteur) :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{p})}{\underline{U}(\underline{p})}$$ où $\underline{p}$ désigne la variable de Laplace confondue avec $j\omega$ en régime sinusoïdal.

b) Montrer que l'on peut mettre $\underline{T}(\underline{P})$ sous la forme :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{a}{1 + \mathcal{C}\underline{P}}.$$

Expliciter a et $\mathcal{C}$.

3° *a*) Donner le schéma fonctionnel (schéma blocs) de l'ensemble et montrer que la transmittance de la *chaîne directe* (système en boucle ouverte), est

$$\underline{H}_{(p)} = \frac{\underline{\theta}_s(\underline{p})}{\underline{\theta}_e(\underline{p})} = \frac{ak}{\underline{p}(1 + \underline{p}\tau)}$$

b) Quelle est alors la transmittance, $\underline{H}'(\underline{P})$, du système en chaîne fermée?

4° *En chaîne directe*, on étudie le comportement du système en régime sinusoïdal.

a) Montrer que la transmittance du système se met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}} \times \frac{1}{j\dfrac{f}{f_1}}.$$

b) Expliciter et calculer numériquement les fréquences f_0 et f_1.

c) Calculer pour quelle fréquence on a $|\underline{H}| = 1$. Définir et calculer la marge de phase, m_φ, du système. Est-elle suffisante?

5° Afin d'améliorer le résultat précédent, on place entre A_1 et A_2, un circuit correcteur *PD* suivant le schéma de la figure 2. Les amplificateurs opérationnels A_3 et A_4 sont supposés parfaits.

a) Calculer la transmittance $\dfrac{\underline{V}_3}{\underline{V}'_1}$. Quel est le rôle de A_4?

b) Formuler la nouvelle transmittance $\underline{H}_1$ de la chaîne directe ainsi corrigée.
Calculer la valeur de la capacité $2C$, si $R = 39$ kΩ, pour que $\underline{H}_1$ se réduise à $\underline{H}_1 = \dfrac{1}{j\dfrac{f}{f_1}}$.
Que devient alors la marge de phase du système?

c) Quelle est maintenant l'expression de la transmittance $\underline{H}'(\underline{P})$ du système en boucle fermée?

6° Le système étant initialement dans un état de repos tel que $\theta_e = \theta_s = 0$, on applique un échelon de position $\theta_e = \dfrac{\pi}{2}$ à partir de l'instant 0 pris comme origine.

a) Quelle est la réponse $\theta_s = f(t)$?

b) Calculer l'instant t_r au bout duquel le système atteint sa position d'équilibre à 5 % près.

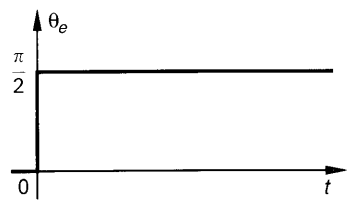


Fig. 3

5 précision des systèmes bouclés linéaires

1. DÉFINITIONS

Soit le système bouclé de la figure 1.

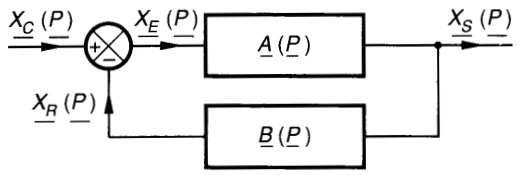


Fig. 1.

Rappelons que l'on souhaite que la grandeur de sortie x_S soit une image fidèle et précise de la grandeur de commande x_C. Dans le cas général, les grandeurs x_S et x_C, n'étant pas de même nature, ne peuvent pas être comparées.

Afin de chiffrer la précision, on compare la grandeur de commande x_C à la grandeur de retour x_R, image de la sortie, et de même nature que x_C. L'erreur est donc définie dans un premier temps par

$$x_C - x_R = x_E.$$

Nous avons vu que, tout de suite après l'application d'un signal de commande, les grandeurs x_R, x_S et x_E font apparaître un régime transitoire qui s'annule dans le temps si le système est stable. La précision du système étant mesurée en régime permanent, l'erreur ε est définie par

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} x_E(t).$$

A partir de la figure 1 il vient :

$$\underline{X}_E(\underline{P}) = \underline{X}_C(\underline{P}) - \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})\underline{X}_E(\underline{P})$$

soit

$$\underline{X}_E(\underline{P}) = \frac{\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{A}(\underline{P})\underline{B}(\underline{P})} = \frac{\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$$

où $\underline{T}(\underline{P})$ est la transmittance en boucle ouverte.

Par application du théorème de la valeur finale il vient :

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} x_E(t) = \lim_{\underline{P} \to 0} \frac{\underline{P}\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})}.$$

L'erreur ε dépend donc de :

a) la limite de $\underline{T}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro. L'erreur est d'autant plus faible que cette limite est plus grande. Sachant que $\underline{T}(\underline{P})$ se met sous la forme générale

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}^{\alpha}} \frac{1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n},$$

lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, $\underline{T}(\underline{P})$ croît d'autant plus rapidement que les constantes C et α sont plus grandes. Or cette condition est incompatible avec une bonne stabilité du système, en effet :

- lorsque C augmente, le diagramme de Nyquist s'enfle et risque d'englober le point -1;
- lorsque α est supérieur à 2, le diagramme de Nyquist tourne, à l'infini, d'un angle supérieur à 2π et englobe donc le point -1 (sauf dans des cas très particuliers qui excluent le point -1).

Ceci nous confirme que *précision* et *stabilité* sont deux exigences contradictoires.

b) la forme du signal de commande x_C :

- Pour une commande par un échelon, l'erreur ε, notée ε_p est appelée **erreur statique** ou **erreur de position.**
- Pour une commande par une rampe, l'erreur ε, notée ε_T est appelée **erreur de trainage.**
- Pour une commande par une parabole, l'erreur ε, notée ε_a est appelée **erreur en accélération.**

2. MÉTHODES DE CALCUL

2.1. THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE

L'erreur est calculée par $\varepsilon = \lim_{\underline{P}\to 0} \dfrac{\underline{P}\,\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$.

2.2. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

A partir de l'équation $\underline{X}_E(\underline{P}) = \dfrac{\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$, et sachant que $\underline{T}(\underline{P})$ s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}^\alpha} \frac{1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n},$$

il vient :

$$\underline{X}_E(\underline{P})[\underline{P}^\alpha(1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n) + C(1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m)] = \underline{X}_C(\underline{P})[\underline{P}^\alpha(1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n)]$$

On écrit alors l'équation différentielle liant les grandeurs x_E et x_C. Sachant que l'erreur ε est la valeur de x_E en régime permanent, on calcule la solution particulière de cette équation différentielle.

3. PRÉCISION D'UN SYSTÈME DE CLASSE ZÉRO

La transmittance en boucle ouverte d'un système de classe zéro s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = C \cdot \frac{1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n}.$$

Les grandeurs d'erreur x_E et de commande x_C sont liées par l'équation différentielle

$$x_E(1 + C) + \frac{\mathrm{d}x_E}{\mathrm{d}t}(a_1 + b_1C) + \frac{\mathrm{d}^2x_E}{\mathrm{d}t^2}(a_2 + b_2C) + \ldots = x_C + \frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}a_1 + \frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}a_2 + \ldots$$

3.1. ERREUR DE POSITION

La grandeur de commande $x_C(t)$ est un échelon d'amplitude X_0 (*fig.* 2). Sa transformée de Laplace est $\underline{X}_C(\underline{P}) = \dfrac{X_0}{\underline{P}}$.

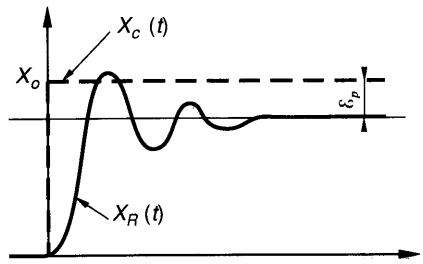


Fig. 2.

Calcul par le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_p = \lim_{\underline{P}\to 0} \underline{P}\,\frac{\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})} = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{X_0}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$$

soit $\varepsilon_p = \dfrac{X_0}{1 + C}$.

Calcul par l'équation différentielle :

$x_C(t) = X_0$, soit $\dfrac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2} = \ldots = 0$.

$x_E(t)$ obéit donc à l'équation différentielle

$$x_E(1 + C) + \frac{\mathrm{d}x_E}{\mathrm{d}t}(a_1 + b_1C) + \ldots = X_0$$

dont le second membre est constant et égal à X_0. La solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante, est bien $x_E = \varepsilon_P = \dfrac{X_0}{1 + C}$.

Après disparition du régime transitoire (*fig.* 2), $x_R(t)$ se fixe à $X_0 - \varepsilon_P$. L'erreur de position est d'autant plus faible que C est plus grand par rapport à 1.

3.2. ERREUR DE TRAINAGE

La grandeur de commande $x_C(t)$ est une rampe $x_C(t) = X'_0t$ (*fig.* 3). Sa transformée de Laplace est $\underline{X}_C(\underline{P}) = \dfrac{X'_0}{\underline{P}^2}$.

Calcul par le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_T = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\underline{P}\,\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})} = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\dfrac{X'_0}{\underline{P}}}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$$

soit $\varepsilon_T \to \infty$.

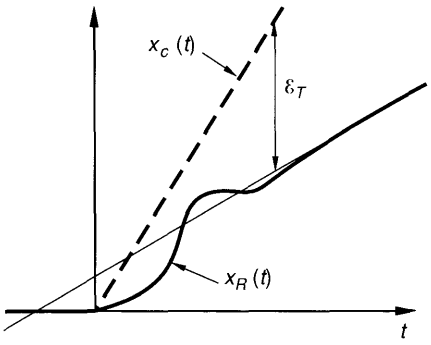


Fig. 3

Calcul par l'équation différentielle :

$$x_C(t) = X'_0 t$$

soit $\dfrac{dx_C}{dt} = X'_0$ et $\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = \dfrac{d^3x_C}{dt^3} = ... = 0.$

$x_E(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$x_E(1 + C) + (a_1 + b_1 C)\frac{dx_E}{dt} + ... = X'_0 t + a_1 X'_0,$$

dont le second membre $X'_0 t + a_1 X'_0$, est une fonction linéaire du temps. La solution particulière est alors cherchée sous la forme $x_E(t) = \alpha t + \beta$, soit $\dfrac{dx_E}{dt} = \alpha$ et

$$\frac{d^2x_E}{dt^2} = \frac{d^3x_E}{dt^3} = ... = 0.$$

α et β doivent vérifier, quel que soit t :

$$(\alpha t + \beta)(1 + C) + \alpha(a_1 + b_1 C) = X'_0 t + a_1 X'_0,$$

soit : $\begin{cases} \alpha(1 + C) = X'_0 \\ \beta(1 + C) + \alpha(a_1 + b_1 C) = a_1 X'_0 \end{cases}$

où $\begin{cases} \alpha = \dfrac{X'_0}{1 + C} \\ \beta = \dfrac{CX'_0}{(1 + C)^2}(a_1 - b_1) \end{cases}$

Finalement : $\varepsilon_T = \dfrac{X'_0}{1 + C}\left[t + \dfrac{C}{1 + C}(a_1 - b_1)\right].$

Lorsque t tend vers l'infini, cette erreur devient bien infinie. Ici l'équation différentielle présente l'avantage de donner l'expression de ε_T.

Après disparition du régime transitoire, $x_R(t)$ se fixe à

$$x_C(t) - \varepsilon_T = X'_0 t - \frac{X'_0 t}{1 + C} - \frac{CX'_0}{(1 + C)^2}(a_1 - b_1)$$

$$= \frac{CX'_0}{1 + C}\left[t - \frac{a_1 - b_1}{1 + C}\right]$$

La pente de $x_R(t)$ est plus faible que celle de $x_C(t)$ mais elle en est d'autant plus proche que C est grand par rapport à 1.

4. PRÉCISION D'UN SYSTÈME DE CLASSE UN

La transmittance en boucle ouverte d'un système de classe un s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}} \frac{1 + b_1\underline{P} + ... + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + ... + a_n\underline{P}^n}$$

Les grandeurs d'erreur x_E et de commande x_C sont liées par l'équation différentielle

$$x_E C + \frac{dx_E}{dt}(1 + b_1 C) + \frac{d^2x_E}{dt^2}(a_1 + b_2 C) + ...$$

$$= \frac{dx_C}{dt} + a_1\frac{d^2x_C}{dt^2} + ...$$

4.1. ERREUR DE POSITION

La grandeur de commande $x_C(t)$ est un échelon d'amplitude X_0 (*fig.* 4).

Sa transformée de Laplace est $\dfrac{X_0}{\underline{P}}$.

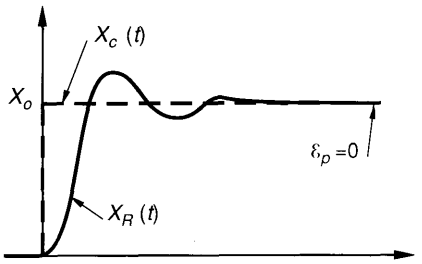


Fig. 4

Calcul par le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_p = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\underline{P}\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})} = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{X_0}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$$

Lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro $\underline{T}(\underline{P})$ tend vers l'infini, soit :

$$\varepsilon_p = 0.$$

Calcul par l'équation différentielle :

$$x_C(t) = X_0, \text{ soit } \frac{dx_C}{dt} = \frac{d^2x_C}{dt^2} = ... = 0$$

$x_E(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$Cx_E + (1 + b_1 C)\frac{dx_E}{dt} + ... = 0,$$

dont le second membre est nul ainsi que la solution particulière, soit $\varepsilon_p = 0$.

4.2. ERREUR DE TRAINAGE

La grandeur de commande $x_C(t)$ est une rampe : $x_C(t) = X'_0 t$ (*fig.* 5).

Sa transformée de Laplace est $\underline{X}_C(\underline{P}) = \dfrac{X'_0}{\underline{P}^2}$.

Calcul par le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_T = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\underline{P}\,\underline{X}_C(\underline{P})}{1 + \underline{T}(\underline{P})} = \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{\dfrac{X'_0}{\underline{P}}}{1 + \dfrac{C}{\underline{P}}}$$

$$= \lim_{\underline{P}\to 0} \frac{X'_0}{\underline{P} + C} = \frac{X'_0}{C}$$

soit $$\varepsilon_T = \frac{X'_0}{C}.$$

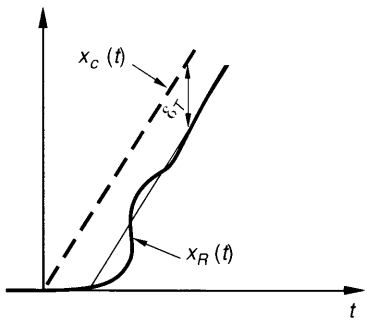


Fig. 5

Calcul par l'équation différentielle :

$$x_C(t) = X'_0 t,$$

soit $\dfrac{dx_C}{dt} = X'_0$ et $\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = \dfrac{d^3x_C}{dt^3} = \ldots = 0.$

$x_E(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$Cx_E + (1 + b_1 C)\frac{dx_E}{dt} + \ldots = X'_0$$

dont le second membre est constant et égal à X'_0. La solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante est $x_E = \dfrac{X'_0}{C}$, soit $\varepsilon_T = \dfrac{X'_0}{C}$.

L'erreur de trainage est donc constante et d'autant plus faible que C est plus grand. Après disparition du régime transitoire, la grandeur de retour $x_R(t)$ suit une évolution parallèle à $x_C(t)$ mais décalée vers le bas de $\varepsilon_T = \dfrac{X'_0}{C}$ (*fig.* 5).

5. TABLEAU RÉCAPITULATIF

La transmittance en boucle ouverte s'écrivant :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{C}{\underline{P}^\alpha} \cdot \frac{1 + b_1\underline{P} + \ldots + b_m\underline{P}^m}{1 + a_1\underline{P} + \ldots + a_n\underline{P}^n}.$$

Les différentes erreurs sont consignées dans le tableau suivant

	Classe 0	Classe 1	Classe 2
ε_P	$\dfrac{X_0}{1 + C}$	0	0
ε_T	∞	$\dfrac{X'_0}{C}$	0
ε_a	∞	∞	$\dfrac{X''_0}{C}$

La lecture du tableau précédent nous confirme que les erreurs sont d'autant plus faibles que C et la classe α sont plus élevées.

6 corrections d'un système bouclé

1. PROBLÈME

Le but d'une correction est de concilier les deux exigences jusqu'ici contradictoires : stabilité et précision. Cela semble possible car :

Si l'on considère l'équation différentielle

- la stabilité dépend du régime transitoire qui est déterminé par la solution de l'équation sans second membre;
- la précision est déterminée, en régime permanent, par la solution particulière.

Si l'on considère la transformée de Laplace

- La précision fait intervenir la limite de la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro. Elle dépend donc du comportement du système vis-à-vis des faibles pulsations en régime sinusoïdal permanent.
- la stabilité dépend du comportement du système en boucle ouverte aux pulsations pour lesquelles le diagramme de Nyquist passe au voisinage du point -1.

Ainsi donc, que ce soit sur la transformée de Laplace, où sur l'équation différentielle, la stabilité et la précision interviennent en des points différents. Il semble donc possible de pouvoir améliorer l'un sans trop détériorer l'autre.

2. CORRECTION PÔLE DOMINANT

2.1. PRINCIPE

Considérons le système dont la transmittance $\underline{T}(j\omega)$ en boucle ouverte est représentée dans les diagrammes de Bode de la figure 1.

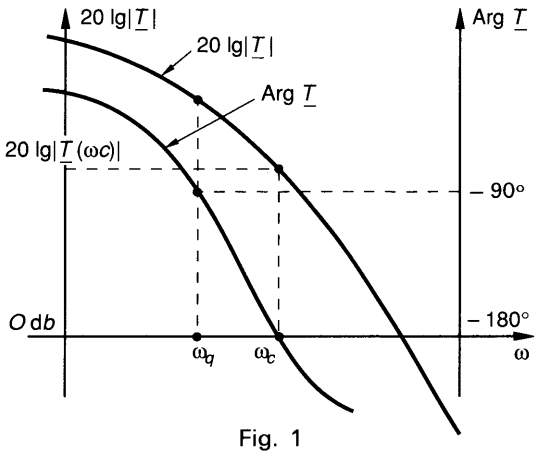


Fig. 1

Pour la pulsation $\omega = \omega_C$,

$$\begin{cases} \text{Arg } \underline{T}(\omega_C) = -180^\circ \\ 20 \lg |\underline{T}(\omega_C)| > 0. \end{cases}$$

Le système est donc instable en boucle fermée.

Afin de rendre au système sa stabilité, on peut translater vers le bas la courbe de gain 20 lg $|\underline{T}|$ en diminuant à l'aide de l'amplification, la sensibilité de la chaîne directe. Cette solution est inacceptable car elle conduirait à une décroissance de $|\underline{T}|$ pour les faibles pulsations, c'est-à-dire à une diminution de $\lim_{\underline{P}\to 0} \underline{T}(\underline{P})$, ce qui provoquerait une dégradation de la précision.

Il faut donc prévoir un dispositif qui impose une décroissance de 20 lg $|\underline{T}|$ au voisinage de la pulsation ω_C, tout en lui conservant sa valeur pour les très faibles pulsations. Pour cela, on place, en cascade dans la chaîne directe, un correcteur dont la transmittance est

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{1}{1 + \tau \underline{P}},$$

ce qui correspond en régime harmonique à la transmittance complexe $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}$, où $\omega_d = \dfrac{1}{\tau}$.

La transmittance en boucle ouverte devient ainsi : $T_C(P) = T(P)H(P)$ soit

$$T_C = T \times \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}.$$

Soit ω_q la pulsation pour laquelle $\arg T = -90°$ (*fig.* 1). La pulsation de coupure ω_d du correcteur est choisie de telle sorte que $\omega_d \ll \omega_q$.

• Pour les fréquences basses ($\omega < \omega_d$),

$$\lim_{P\to 0} T_C(P) = \lim_{P\to 0} H(P)T(P) = \lim_{P\to 0} T(P)$$

La précision est donc inchangée.

• Pour les hautes fréquences, et en particulier pour $\omega = \omega_q$, il vient :

$$* \arg T_C(\omega_q) = \arg T(\omega_q) + \arg \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_q}{\omega_d}}$$

compte tenu de $\arg T(\omega_q) = -90°$ et $\omega_q \gg \omega_d$. On peut écrire $\arg T_C(\omega_q) \approx -180°$.

$$* 20 \lg |T_C(\omega_q)| = 20 \lg |T(\omega_q)| + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_q}{\omega_d}} \right|.$$

Compte tenu de $\omega_q \gg \omega_d$, on peut écrire

$$20 \lg |T_C(\omega_q)| \approx 20 \lg |T(\omega_q)| + 20 \lg \frac{\omega_d}{\omega_q}$$

$$= 20 \lg |T(\omega_q)| \frac{\omega_d}{\omega_q}.$$

Soit globalement

$$\begin{cases} \arg T_C(\omega_q) = -180° \\ 20 \lg |T_C(\omega_q)| = 20 \lg |T(\omega_q)| \dfrac{\omega_d}{\omega_q} \end{cases}$$

Le système est donc stable si

$$|T(\omega_q)| \frac{\omega_d}{\omega_q} < 1, \quad \text{soit} \quad \omega_d < \frac{\omega_q}{|T(\omega_q)|}.$$

2.2. RÉALISATION DU CORRECTEUR

Le correcteur peut simplement être réalisé par le circuit RC de la figure 2.

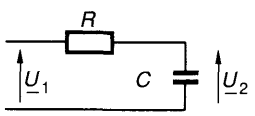


Fig. 2.

$$H = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

soit $H(P) = \dfrac{1}{1 + \tau P}$ et $H = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}$ avec

$$\omega_d = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$

2.3. PREMIER EXEMPLE : ASSERVISSEMENT DE VITESSE

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3, dont la transmittance en boucle ouverte est

$$T(P) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2\dfrac{mP}{\omega_m} + \dfrac{P^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\dfrac{P}{\omega_0} + \dfrac{P^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$; $m = 1{,}82$; $\omega_m = 91{,}4$ rad/s; $m_0 = 1$; $\omega_0 = 628$ rad/s.

La représentation de $T_0(P) = \dfrac{T(P)}{A}$ dans les diagrammes de Bode est donnée à la figure 14 du chapitre 4.

Nous avons montré, au chapitre 4 (3.2), que pour obtenir une marge de phase de 45°, il faut limiter l'amplification A à 6,7.

Supposons que l'on veuille que l'erreur statique relative $\dfrac{\varepsilon_P}{X_0}$ soit inférieure à 1 %.

Sachant que $\varepsilon_P = \lim\limits_{P\to 0} \dfrac{X_0}{1 + T(P)}$, il vient

$$AH_0 > 100 \quad \text{soit} \quad A > 100.$$

Déterminons, dès lors, le réseau correcteur qui permet d'obtenir une marge de phase de 45° avec $A = 100$.

Sur le diagramme de la figure 14 du chapitre 4, on relève pour $\omega = \omega_a = 20{,}6$ rad/s

$$\begin{cases} \arg T_0(\omega_a) = -45° \\ 20 \lg |T_0(\omega_a)| = -2 \text{ db}. \end{cases}$$

Sachant que la pulsation de coupure ω_d du réseau correcteur est très inférieure à ω_a, la transmittance corrigée $\underline{T_C}$ en boucle ouverte est telle que :

$$\arg \underline{T_C}(\omega_a) = \arg A + \arg \underline{T_0}(\omega_a) + \arg \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_a}{\omega_d}} \approx -135^\circ$$

$$20 \lg |\underline{T_C}(\omega_a)| = 20 \lg A + 20 \lg |T_0(\omega_a)| + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_a}{\omega_d}} \right| = 38 - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_d}\right)^2}.$$

Pour obtenir une marge de phase de 45°, il est donc nécessaire que

$$20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_d}\right)^2} = 38,$$

soit $\omega_d = \dfrac{\omega_d}{79{,}8} = 0{,}26$ rad/s.

Si le réseau correcteur est réalisé à partir du schéma de la figure 2, les éléments R et C doivent être tels que $RC = \dfrac{1}{0{,}26} = 3{,}85$ s.

Temps de réponse à 5 %

La transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit

$$\frac{\underline{T_C}(\underline{P})}{} = \frac{AH_0}{\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_d}\right)\left(1 + \dfrac{2m\underline{P}}{\omega_m} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + \dfrac{2m_0\underline{P}}{\omega_0} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}.$$

D'après le schéma bloc de la figure 12 du chapitre 3, la transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A_R}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U_C}(\underline{P})} = \frac{K_0}{\left(1 + \dfrac{2m\underline{P}}{\omega_m} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)} \times \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_d}\right)} \times \frac{1}{1 + \underline{T_C}(\underline{P})}$$

avec $K_0 = A\dfrac{E}{V_0}\dfrac{H_m}{\omega_m^2}$, soit

$$\underline{\Omega}(\underline{P})\left[AH_0 + \left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_d}\right)\left(1 + \frac{2m\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + \frac{2m_0\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)\right] = \underline{U_C}(\underline{P})K_0\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right).$$

Pour une attaque en échelon $u_C = U_{C_0}$, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, on peut écrire l'équation différentielle :

$$\Omega[1 + AH_0] + \frac{d\Omega}{dt}\left(\frac{1}{\omega_d} + \frac{2m}{\omega_m} + \frac{2m_0}{\omega_0}\right) + \frac{d^2\Omega}{dt^2}\left(\frac{2m}{\omega_m\omega_d} + \frac{2m_0}{\omega_0\omega_d} + \frac{4mm_0}{\omega_m\omega_0} + \frac{1}{\omega_m^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\right) = K_0 U_{C_0}.$$

Soit en valeur numérique :

$$101\ \Omega + 3{,}89\frac{d\Omega}{dt} + 0{,}165\frac{d^2\Omega}{dt^2} = K_0 U_{C_0}$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + 2m'\omega_0'\frac{d\Omega}{dt} + \omega_0'^2\Omega = \frac{K_0}{0{,}165}U_{C_0}$$

avec $\begin{cases} m' = 0{,}48 \\ \omega_0' = 24{,}7 \text{ rad/s.} \end{cases}$

Considérant la courbe donnant le temps de réponse à 5 % en fonction de m (*fig.* 17 du chapitre 4), nous obtenons, pour $m' = 0{,}48$:

$$t_{r5\%} = 0{,}85\frac{2\pi}{\omega_0'} = 216 \text{ ms.}$$

Nous pouvons remarquer que la valeur $m = 0{,}48$ est voisine de celle que nous avions trouvé au chapitre 4 (3.1), lors de l'étude de l'asservissement de position et dans les mêmes conditions de fonctionnement (marge de phase de 45°). Cette remarque justifie *a posteriori* l'approximation que nous avons faite en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2.

2.4. DEUXIÈME EXEMPLE : AMPLIFICATEUR

Reprenons le dispositif de la figure 21 du chapitre 4 pour lequel la transmittance en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{A_0 K}{\left(1 + j\dfrac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{f_3}\right)}$$

avec $A_0 = 10^3$; $f_1 = 1$ MHz; $f_2 = 10$ MHz; $f_3 = 50$ MHz.

Nous avons montré que l'obtention d'une marge de phase de 45° nécessitait une valeur de K inférieure à 8×10^{-3}.

Proposons-nous de déterminer le réseau correcteur qui permet de conserver une marge de phase de 45° avec $K = 1$.

Sur le diagramme de la figure 22, on relève pour la fréquence $f = f_a = 1$ MHz

$$\begin{cases} \arg \underline{A}(f_a) = -45° \\ 20 \lg |\underline{A}(f_a)| = 60 \text{ db.} \end{cases}$$

Compte tenu que la fréquence de coupure f_d du réseau correcteur est très inférieure à f_a, la transmittance corrigée $\underline{T}_C$ en boucle ouverte est telle que :

$$\arg \underline{T}_C(f_a) = \arg \underline{A}(f_a) + \arg K + \arg \frac{1}{1 + j\frac{f_a}{f_d}}$$

$$\approx -135°$$

$$20 \lg |\underline{T}_C(f_a)| = 20 \lg |\underline{A}(f_a)| + 20 \lg K + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j\frac{f_a}{f_d}} \right|$$

$$= 60 - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{f_a}{f_d}\right)^2}$$

Pour obtenir une marge de phase de 45°, il est donc nécessaire que

$$20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{f_a}{f_d}\right)^2} = 60 \text{ db},$$

soit $\quad f_d = \dfrac{f_a}{1\,000} = 1$ kHz.

Le réseau correcteur de la figure 2 doit être tel que $RC = \dfrac{10^{-3}}{2\pi} = 1{,}6 \times 10^{-4}$.

Bande passante

Compte tenu du réseau correcteur, l'amplification en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A}_R = \frac{A_0}{A_0 K + \left(1 + j\frac{f}{f_d}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}.$$

La courbe 20 lg $|\underline{A}_R|$ en fonction de f est donnée à la figure 3. Pour les basses fréquences, elle est égale à $20 \lg \dfrac{A_0}{1 + A_0 K} \approx 0$ db.

Elle présente une remontée de 2 db.

La fréquence de coupure à 3 db est 1,3 MHz.

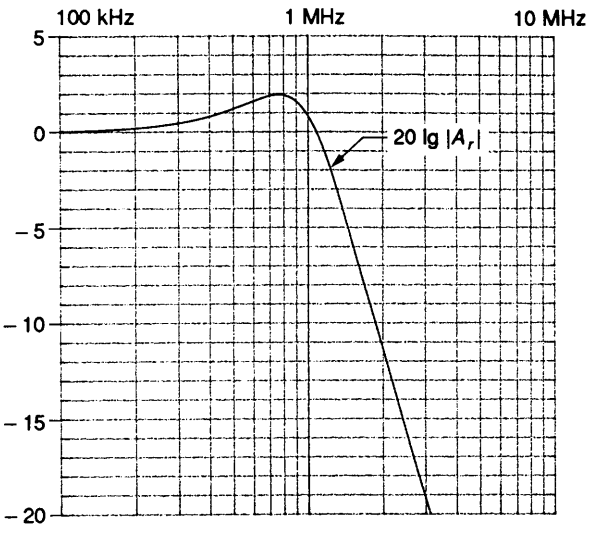


Fig. 3

2.5. INTERPRÉTATION PHYSIQUE

Afin d'analyser le comportement du correcteur, considérons (*fig.* 4) la réponse indicielle du circuit de la figure 2.

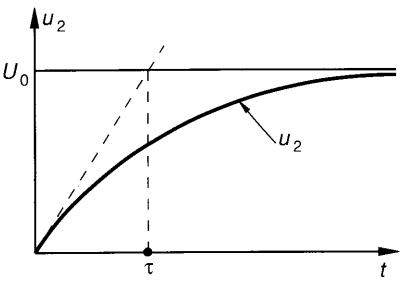


Fig. 4.

Nous constatons que le correcteur ralentit la transmission de l'information et ce avec une constante de temps $\tau = RC$, bien supérieure à toutes les autres constantes de temps du système bouclé.

Nous pouvons ainsi comparer son action à celle d'un conducteur automobile qui, pour atteindre une vitesse déterminée, appuierait très progressivement sur l'accélérateur. On conçoit que le système bouclé, constitué par le véhicule et son conducteur, soit rendu moins nerveux, éliminant ainsi les risques d'instabilité, mais augmentant du même coup le temps de réponse.

3. CORRECTION PROPORTIONNELLE ET INTÉGRALE

3.1. PRINCIPE

Considérons le système dont la transmittance $\underline{T}$ en boucle ouverte est représentée dans les diagrammes de Bode de la figure 5.

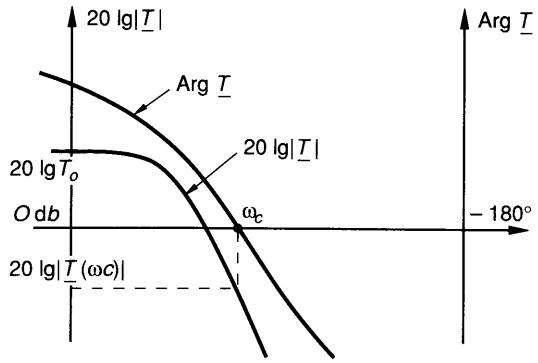


Fig. 5

Pour la pulsation $\omega = \omega_C$:

$$\begin{cases} \arg \underline{T}(\omega_C) = -180° \\ 20 \lg |\underline{T}(\omega_C)| < 0. \end{cases}$$

Le système est donc stable en boucle fermée.

L'erreur statique, donnée par $\lim_{\underline{P}\to 0} \dfrac{X_0}{1 + \underline{T}(\underline{P})}$, est égale à $\dfrac{X_0}{1 + T_0}$, où T_0 est la valeur limite de $\underline{T}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro.

Supposons que l'on veuille annuler l'erreur statique. La solution qui consisterait à remonter la courbe de module, ne peut convenir, car elle conduirait à l'instabilité du système. Pour obtenir le résultat souhaité, on peut placer, en cascade dans la chaîne d'action directe, un correcteur de transmittance

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{1 + \tau \underline{P}}{\tau \underline{P}}$$

où en régime harmonique

$$\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{j\dfrac{\omega}{\omega_i}}, \quad \text{avec} \quad \omega_i = \frac{1}{\tau}.$$

Les diagrammes asymptotiques de 20 lg $|\underline{H}|$ et arg $\underline{H}$ sont donnés à la figure 6.

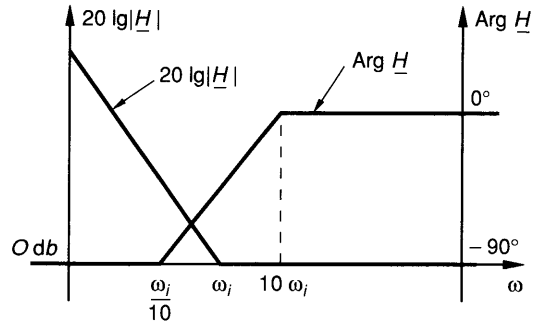


Fig. 6

La transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T}_C = \underline{T} \times \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{j\dfrac{\omega}{\omega_i}}$$

soit, pour la pulsation ω_C :

$$\underline{T}_C(\omega_C) = \underline{T}(\omega_C) \frac{1 + j\dfrac{\omega_C}{\omega_i}}{j\dfrac{\omega_C}{\omega_i}}.$$

Si la pulsation ω_i est très inférieure à ω_C, $\underline{T}_C(\omega_C) \approx \underline{T}(\omega_C)$.

Les courbes de module et d'argument sont donc inchangées au voisinage de la pulsation ω_C et la stabilité est préservée.

La limite, lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, de

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \underline{T}(\underline{P}) \frac{1 + \tau \underline{P}}{\tau \underline{P}},$$

est infinie, ce qui conduit à une erreur statique nulle.

3.2. RÉALISATION DU CORRECTEUR

3.2.1. CORRECTEUR ACTIF THÉORIQUE

Il est rélalisé à l'aide du dispositif de la figure 7.

La transmittance complexe s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{R + \dfrac{1}{jC\omega}}{R} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{j\dfrac{\omega}{\omega_i}}$$

avec $\omega_i = \dfrac{1}{RC}$, ce qui est bien la fonction de transfert souhaitée. Malheureusement, le montage de la figure 7 est physiquement inutilisable.

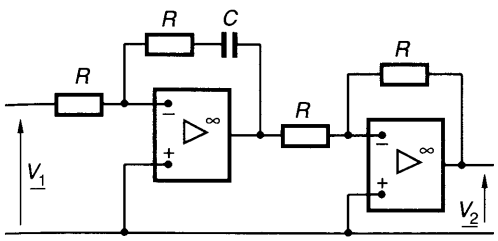


Fig. 7

En effet, les courants de fuite et la tension d'offset du premier amplificateur opérationnel provoquent une charge continuelle du condensateur C qui entraîne la tension de sortie vers la saturation de l'amplificateur opérationnel (voir Tome 1, chapitre 6). Pour y remédier, il faut placer une résistance R_0 en parallèle sur l'ensemble RC, ce qui conduit au dispositif suivant.

3.2.2. Correcteur actif réel (*fig. 8*)

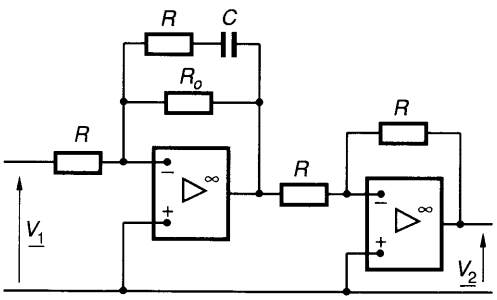


Fig. 8.

La transmittance complexe s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{\dfrac{R_0\left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_0 + R + \dfrac{1}{jC\omega}}}{R} = \frac{R_0}{R}\,\frac{1 + jRC\omega}{1 + j(R_0 + R)C\omega} = \frac{R_0}{R}\,\frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i'}}$$

avec $\omega_i = \dfrac{1}{RC}$ et $\omega_i' = \dfrac{1}{(R_0 + R)C}$.

Les diagrammes asymptotiques correspondants sont donnés à la figure 9.

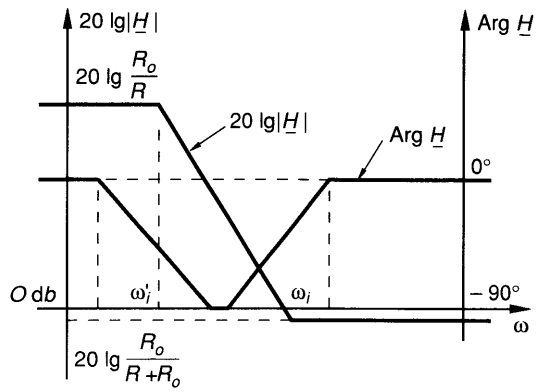


Fig. 9

La résistance R_0 étant grande par rapport à R, $20 \lg \dfrac{R_0}{R + R_0}$ est pratiquement nul.

Pour les pulsations supérieures à ω_i, les diagrammes asymptotiques des correcteurs théorique et réel sont pratiquement identiques. La pulsation ω_C, pour laquelle $\arg \underline{T} = -180°$, étant grande par rapport à ω_i, la stabilité est inchangée.

Par contre la limite, lorsque $\underline{P}$ tend vers zéro, de $\underline{T_C}(\underline{P}) = \underline{T}(\underline{P})\,\underline{H}(\underline{P})$ n'est pas infinie et l'erreur statique n'est donc pas nulle. Cependant le correcteur permet de la réduire, elle passe ainsi de $\dfrac{X_0}{1 + T_0}$ à $\dfrac{X_0}{1 + T_0\dfrac{R_0}{R}}$.

3.2.3. Correcteur passif (*fig. 10*)

La transmittance complexe s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{R + \dfrac{1}{jC\omega}}{R + R_0 + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + j(R + R_0)C\omega} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i'}}$$

avec $\omega_i = \dfrac{1}{RC}$

et $\omega_i' = \dfrac{1}{(R + R_0)C}$.

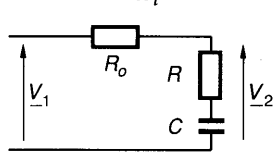


Fig. 10

Au facteur $\frac{R_0}{R}$ près, cette transmittance est identique à celle du correcteur actif réel. Or la chaîne directe possède, la plupart du temps, un élément d'amplification réglable. Il suffit de multiplier cette amplification par $\frac{R_0}{R}$ pour réaliser la même correction que le correcteur actif réel.

3.3. PREMIER EXEMPLE : ASSERVISSEMENT DE VITESSE

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3, dont la transmittance en boucle ouverte est

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_m} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}\right)\left(1 + 2m_0\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $H_0 = 1$, $m = 1{,}82$, $\omega_m = 91{,}4$ rad/s, $m_0 = 1$, $\omega_0 = 628$ rad/s.

Nous avons montré au chapitre 4 (2.4) que cette fonction de transfert peut s'écrire

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_1 = 27{,}41$ rad/s et $\omega_2 = 305$ rad/s.

Supposons que l'on corrige le système à l'aide du dispositif de la figure 8.

La transmittance corrigée s'écrit :

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \underline{T}(\underline{P})\underline{H}(\underline{P}),$$

soit

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \frac{R_0}{R} \times \frac{AH_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2} \times \frac{1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i}}{1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}}.$$

Proposons-nous de déterminer les éléments R, R_0 et C du correcteur de telle sorte que la marge de phase soit égale à 45° et que l'erreur statique relative $\frac{\varepsilon_P}{X_0}$ soit égale à 1 %.

Sachant que $\varepsilon_P = \lim_{p \to 0} \frac{X_0}{1 + \underline{T}_C(\underline{P})}$, il vient

$$A\frac{R_0}{R}H_0 \approx 100.$$

Pour simplifier le calcul du correcteur, les éléments R et C sont choisis de telle sorte que $\omega_i = \omega_1$, soit $\frac{1}{RC} = 27{,}4$ rad/s.

La transmittance corrigée s'écrit ainsi

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \frac{100}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}.$$

Le problème se ramène alors à la détermination de ω_i' qui permet d'obtenir une marge de phase de 45°, sachant que ω_i' est très inférieure à ω_2.

Pour cela on représente les diagrammes de Bode (*fig.* 11) de la transmittance

$$\underline{T}_0 = \frac{100}{\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

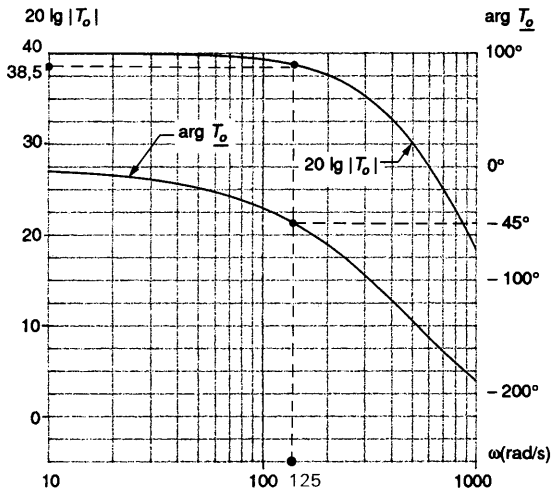


Fig. 11.

Pour la pulsation $\omega_a = 125$ rad/s, on relève

$$\begin{cases} \arg \underline{T}_0(\omega_a) = -45° \\ 20 \lg |\underline{T}_0(\omega_a)| = 38{,}5 \text{ db.} \end{cases}$$

Sachant que la pulsation ω_i' est très inférieure à ω_a il vient :

$$\arg \underline{T}_C(\omega_a) = \arg \underline{T}_0(\omega_a) + \arg \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega_a}{\omega_i'}} \approx -135°$$

$$20 \lg |\underline{T}_C(\omega_a)| = 20 \lg |T_0(\omega_a)| + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_i'}\right)^2}}$$

Une marge de phase de 45° impose donc :

$$10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_i'}\right)^2\right] = 38{,}5 \text{ db},$$

soit : $\omega_i' = 1{,}49$ rad/s.

Les éléments R, R_0 et C devront donc vérifier les relations

$$\frac{1}{RC} = 27{,}4 \text{ rad/s},$$

$$\frac{AR_0}{R} H_0 = 100 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(R + R_0)C} = 1{,}49 \text{ rad/s}.$$

En remarquant que

$$\frac{\omega_i}{\omega_i'} = \frac{R + R_0}{R} = 1 + \frac{R_0}{R} = \frac{27{,}4}{1{,}49} = 18{,}4,$$

il vient $\dfrac{R_0}{R} = 17{,}4$.

Compte tenu de $H_0 = 1$, l'amplification A devra être réglée à $A = \dfrac{100}{17{,}4} = 5{,}75$.

Temps de réponse à 5 %

La transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \frac{AH_0R_0}{R} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}$$

Compte tenu du schéma bloc de la figure 12 du chapitre 3, et de la correction, la transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A}_R(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U}_C(\underline{P})} = \frac{R_2}{R_1} \frac{E}{V_0} \frac{H_m}{\omega_m^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)} \times \frac{1}{1 + \underline{T}_C(\underline{P})}$$

où en posant $K_0 = \dfrac{R_2}{R_1} \dfrac{E}{V_0} \dfrac{H_m}{\omega_m^2}$:

$$\underline{\Omega}(\underline{P})\left[\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2 + AH_0 \frac{R_0}{R}\right] = \underline{U}_C(\underline{P}) K_0 \left[1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right]^2$$

Pour une attaque en échelon $u_C = U_{C_0}$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, l'équation différentielle de Ω s'écrit :

$$\Omega\left[1 + AH_0 \frac{R_0}{R}\right] + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_i'} + \frac{2}{\omega_0}\right] + \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{1}{\omega_2\omega_i'} + \frac{2}{\omega_2\omega_0} + \frac{2}{\omega_0\omega_i'} + \frac{1}{\omega_0^2}\right] = K_0 U_{C_0}$$

où en valeur numérique :

$$101\Omega + 0{,}678 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + 0{,}004\,35 \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}t^2} = K_0 U_{C_0}$$

Cette équation est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}t^2} + 2m'\omega_0' \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \omega_0'^2 \Omega = \text{Cte}$$

avec $\begin{cases} 2m'\omega_0' = 155 \\ \omega_0'^2 = 23\,220 \end{cases}$

soit $m' = 0{,}51$ et $\omega_0' = 151$ rad/s.

Compte tenu de la courbe donnant le temps de réponse à 5 % en fonction de m (*fig.* 17 du chapitre 4), on détermine :

$$t_{r5\%} = 0{,}85 \frac{2\pi}{\omega_0'} = 35 \text{ ms}.$$

Nous pouvons remarquer que le temps de réponse à 5 % est meilleur que celui obtenu, par une compensation pole dominant, dans les mêmes conditions de précision et de stabilité.

3.4. DEUXIÈME EXEMPLE : AMPLIFICATEUR

Reconsidérons le dispositif de la figure 21 du chapitre 4 pour lequel la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T} = \frac{A_0 K}{\left(1 + \mathrm{j} \frac{f}{f_1}\right)\left(1 + \mathrm{j} \frac{f}{f_2}\right)\left(1 + \mathrm{j} \frac{f}{f_3}\right)}$$

avec $A_0 = 10^3$; $f_1 = 1$ MHz; $f_2 = 10$ MHz; $f_3 = 50$ MHz.

Proposons-nous, comme au chapitre 4 (2.4) d'obtenir une marge de phase égale à 45° avec $K = 1$.

Nous utiliserons le correcteur passif de la figure 9. (Les correcteurs actifs, mettant en œuvre

des amplificateurs opérationnels, risquent de faire apparaître de nouvelles fréquences de coupure pour les fréquences supérieures à 1 MHz.)

La transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T_C} = A_0 K \cdot \frac{1}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)} \times \frac{1 + j\frac{f}{f_i}}{\left(1 + j\frac{f}{f'_i}\right)}.$$

En choisissant les éléments R et C de telle sorte que :

$$f_i = f_1, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2\pi RC} = 10^6 \text{ Hz},$$

il vient :

$$\underline{T_C} = \frac{A_0 K}{\left(1 + j\frac{f}{f'_i}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}$$

Afin de déterminer la fréquence f'_i qui permet d'obtenir une marge de phase de 45°, traçons (*fig.* 12) les diagrammes asymptotiques de

$$\underline{T_0} = \frac{A_0 K}{\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}$$

Pour la fréquence $f_a = 7$ MHz on relève :

$$\begin{cases} 20 \lg |\underline{T_0}(f_a)| = +60 \text{ db} \\ \arg \underline{T_0}(f_a) = -45° \end{cases}$$

Sachant que la fréquence f'_i est très inférieure à f_a il vient :

$$20 \lg |\underline{T_C}(f_a)| = 20 \lg |\underline{T_0}(f_a)| + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_a}{f'_i}\right)^2}}$$

$$\arg \underline{T_C}(f_a) = \arg \underline{T_0}(f_a) + \arg \frac{1}{1 + j\frac{f_a}{f'_i}} \approx -135°.$$

Une marge de phase de 45° impose donc :

$$10 \lg \left[1 + \left(\frac{f_a}{f'_i}\right)^2\right] = +60 \text{ db};$$

soit $f'_i = 7$ kHz.

Les éléments R, R_0 et C doivent donc vérifier les relations

$$\frac{1}{2\pi RC} = 10^6 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi(R + R_0)C} = 7 \text{ kHz}.$$

Bande passante

La transmittance corrigée en boucle fermée s'écrit

$$\underline{A_R} = \frac{A_0}{A_0 K + \left(1 + j\frac{f}{f'_i}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}.$$

La courbe représentative de $20 \lg |\underline{A_R}|$ est donnée à la figure 13.

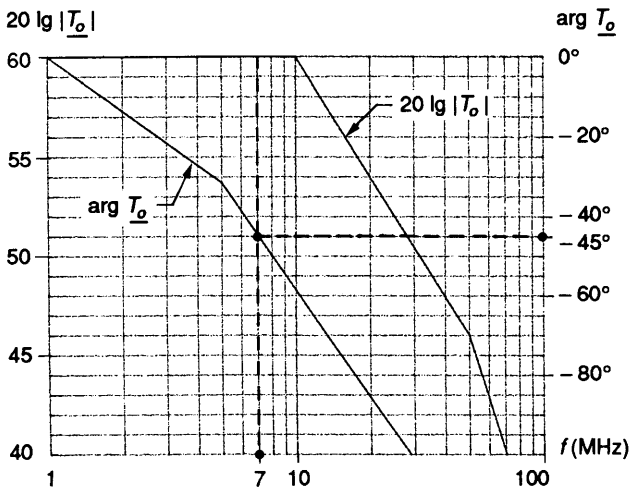


Fig. 12.

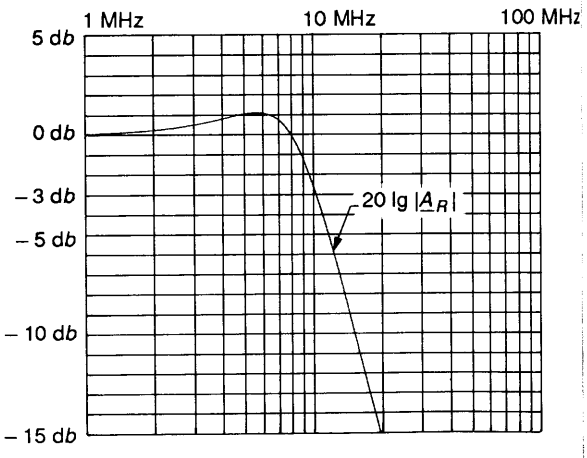


Fig. 13.

Pour les basses fréquences

$$20 \lg |\underline{A}_R| = 20 \lg \frac{A_0}{1 + A_0 K} \approx 0.$$

La courbe présente une remontée de 1,2 dB.

La fréquence de coupure à 3 dB est : 10,5 MHz. Elle est plus élevée que celle qui est obtenue avec la correction pole dominant, dans les mêmes conditions de stabilité.

3.5. INTERPRÉTATION PHYSIQUE

Afin d'analyser le comportement du correcteur, étudions la réponse du circuit de la figure 10, à un échelon d'amplitude U_0 (*fig.* 14).

En utilisant les transformées de Laplace, et compte tenu de $v_1(0-) = v_2(0-) = 0$, il vient :

$$\underline{V}_2(\underline{P}) = \frac{U_0}{\underline{P}} \times \frac{\omega_i'}{\omega_i} \frac{\underline{P} + \omega_i}{\underline{P} + \omega_i'}$$

avec $\omega_i = \dfrac{1}{RC}$ et $\omega_i' = \dfrac{1}{(R + R_0)C}$, soit

$$\underline{V}_2(\underline{P}) = \frac{U_0}{\underline{P}} - \frac{U_0 R_0}{R + R_0} \times \frac{1}{\underline{P} + \omega_i'}$$

dont l'originale est :

$$v_2(t) = U_0 \left[1 - \frac{R_0}{R + R_0} \, e^{-\frac{t}{(R + R_0)C}} \right]$$

Les variations de $v_2(t)$ sont données à la figure 14.

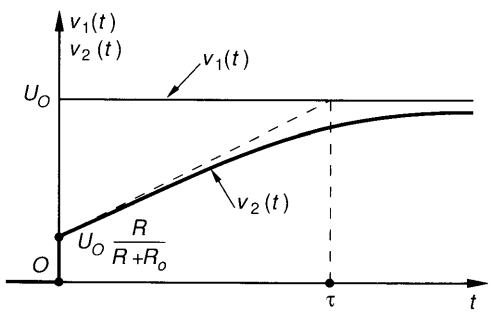


Fig. 14.

A l'instant $t = 0$, la tension de sortie passe instantanément à $U_0 \dfrac{R}{R + R_0}$ puis augmente progressivement, jusqu'à sa valeur finale, avec la constante de temps $\tau = (R + R_0)C$.

On peut comparer l'action du correcteur à celle d'un conducteur automobile qui pour atteindre une vitesse déterminée commencerait par placer l'accélérateur dans une position intermédiaire, puis appuierait progressivement jusqu'à la position finale. On conçoit que ce mode opératoire conduit à un temps de réponse plus faible que celui obtenu par la correction pole dominant.

Remarquons, d'autre part, que la transmittance du correcteur idéal :

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{V}_2(\underline{P})}{\underline{V}_1(\underline{P})} = \frac{1 + \tau \underline{P}}{\tau \underline{P}}$$

provient de l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dv_2}{dt} = v_1 + \tau \frac{dv_1}{dt}$$

que l'on peut encore écrire :

$$v_2 = v_1 + \frac{1}{\tau} \int v_1 \, dt.$$

Ainsi la tension de sortie du correcteur dépend non seulement de la tension d'entrée mais aussi de son intégrale par rapport au temps, d'où la dénomination de la correction : proportionnelle et intégrale.

Cette intégrale permet au correcteur de se « souvenir » des états antérieurs de la tension d'entrée et améliore ainsi ses réactions.

4. CORRECTION PROPORTIONNELLE ET DÉRIVÉE

4.1. PRINCIPE

Considérons le système dont la transmittance $\underline{T}$ en boucle ouverte est représentée dans les diagrammes de Bode de la figure 15.*a*.

Pour la pulsation $\omega = \omega_C$,

$$\begin{cases} \arg \underline{T}(\omega_C) = -180° \\ 20 \lg |\underline{T}(\omega_C)| = 0. \end{cases}$$

Le système est donc instable en boucle fermée.

Afin de rendre au système sa stabilité, on place en cascade, dans la chaîne d'action directe, un correcteur qui relève la courbe d'argument au

voisinage de la pulsation ω_C. La transmittance d'un tel correcteur est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_d}} \quad \text{avec} \quad \omega_d < \omega'_d.$$

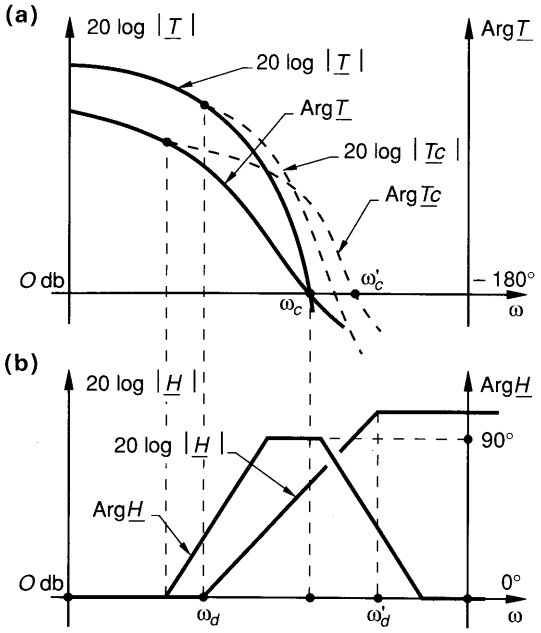


Fig. 15

Les diagrammes de Bode correspondants sont donnés à la figure 15.*b*.

Les diagrammes de Bode de la transmittance corrigée $\underline{T_C} = \underline{H}\,\underline{T}$ sont donnés à la figure 15.*a*.

Pour $\omega = \omega'_C$ $\begin{cases} \arg \underline{T_C}(\omega'_C) = -180° \\ 20 \lg |\underline{T_C}(\omega'_C)| < 0. \end{cases}$

Le système corrigé est stable en boucle fermée.

4.2. RÉALISATION DU CORRECTEUR

Le correcteur peut être réalisé à partir du schéma de la figure 16.

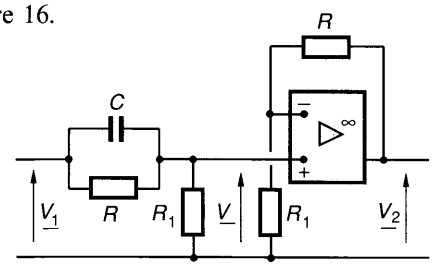


Fig. 16.

Compte tenu des équations

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{V}}{\underline{V_1}} = \dfrac{R_1}{R_1 + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{R_1}{R + R_1} \cdot \dfrac{1 + jRC\omega}{1 + j\dfrac{RR_1}{R + R_1} C\omega} \\ \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V}} = \dfrac{R + R_1}{R_1} \end{cases}$$

il vient : $\underline{H} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_d}}$

avec $\begin{cases} \omega_d = \dfrac{1}{RC} \\ \omega'_d = \dfrac{R + R_1}{RR_1 C} \end{cases}$

REMARQUES

1. arg $\underline{H}$ *est maximal pour la pulsation*

$$\omega = \sqrt{\omega_d \omega'_d}$$

$\underline{H}$ *s'écrit alors* $\dfrac{1 + j\sqrt{\dfrac{\omega'_d}{\omega_d}}}{1 + j\sqrt{\dfrac{\omega_d}{\omega'_d}}}$

et $(\arg \underline{H})_{\text{Max}} = \varphi_1 - \varphi_2$ *avec* $\begin{cases} \tan \varphi_1 = \sqrt{\dfrac{\omega'_d}{\omega_d}} \\ \tan \varphi_2 = \sqrt{\dfrac{\omega_d}{\omega'_d}} \end{cases}$

soit : $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_1$ *et*

$$\begin{cases} (\arg \underline{H})_{\text{Max}} = -\dfrac{\pi}{2} + 2 \arctan \sqrt{\dfrac{\omega'_d}{\omega_d}} \\ |\underline{H}| = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\omega'_d}{\omega_d}}{1 + \dfrac{\omega_d}{\omega'_d}}} \end{cases}$$

Cette remarque permet de placer les pulsations ω_d *et* ω'_d.

2. $(\arg \underline{H})_{\text{Max}}$ *ne peut dépasser* $\dfrac{\pi}{2}$. *Ce type de correcteur ne peut donc pas convenir pour corriger des retards de phase trop importants.*

4.3. EXEMPLE DE CALCUL

Soit le système dont la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)}$$

avec $T_0 = 1\,000$, $\omega_1 = 10$ rad/s, $\omega_2 = 250$ rad/s.

Les diagrammes asymptotiques de $\underline{T}(j\omega)$ sont donnés à la figure 17.

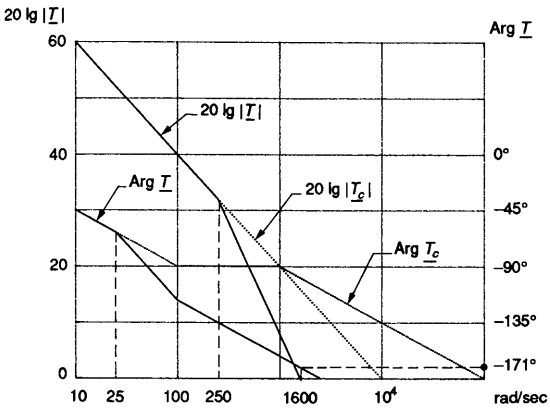


Fig. 17.

Pour $\omega = \omega_u = 1\,600$ rad/s

$$\begin{cases} 20 \lg |\underline{T}(\omega_u| = 0 \text{ db} \\ \text{Arg } \underline{T}(\omega_u) = -171° \end{cases}$$

Le système présente donc une marge de phase de 9° ce qui est insuffisant.

Proposons-nous de ramener cette marge de phase à 45° à l'aide du correcteur de la figure 16.

La transmittance corrigée s'écrit

$$\underline{T}_C = \frac{T_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \times \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_d}}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_d}}$$

En choisissant

$$\begin{cases} \omega_d = \omega_2 = 250 \text{ rad/s} \\ \omega'_d = 10^4 \text{ rad/s} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{RC} = 250 \\ \dfrac{R + R_1}{RR_1C} = 10^4 \end{cases}$$

la transmittance corrigée devient :

$$\underline{T}_C = \frac{1\,000}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10^4}\right)}$$

Les diagrammes asymptotiques de $\underline{T}_C$, donnés à la figure 17, indiquent pour la pulsation

$$\omega'_u = 10^4 \text{ rad/s} \quad \begin{cases} \arg \underline{T}_C(\omega'_u) = -135° \\ 20 \lg |\underline{T}_C(\omega'_u)| = 0 \text{ db.} \end{cases}$$

ce qui correspond à une marge de phase de 45°.

4.4. INTERPRÉTATION PHYSIQUE

Afin d'analyser le comportement du correcteur, déterminons sa réponse à un échelon de tension d'amplitude U_0 (*fig.* 18)

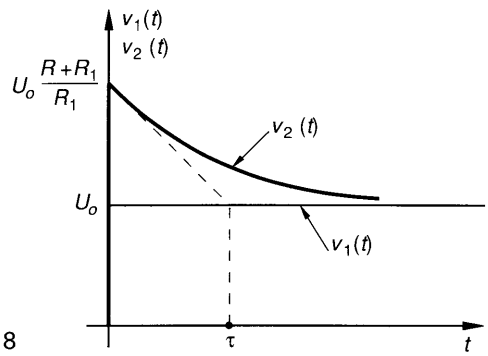


Fig. 18

En utilisant les transformées de Laplace et compte tenu de $v_1(0-) = v_2(0-) = 0$, il vient :

$$\underline{V}_2(\underline{P}) = \frac{U_0}{\underline{P}} \times \frac{\omega'_d}{\omega_d} \times \frac{\underline{P} + \omega_d}{\underline{P} + \omega'_d}, \text{ avec } \frac{\omega'_d}{\omega_d} = \frac{R + R_1}{R_1};$$

soit : $\underline{V}_2(\underline{P}) = \dfrac{U_0}{\underline{P}} + U_0 \dfrac{R}{R_1} \times \dfrac{1}{\underline{P} + \omega'_d}$ dont l'originale est :

$$v_2(t) = U_0\left[1 + \frac{R}{R_1} e^{-\frac{R+R_1}{RR_1C}t}\right]$$

Les variations de $v_2(t)$ sont données à la figure 18.

A l'instant $t = 0$, la tension de sortie du correcteur passe instantanément à $U_0 \dfrac{R + R_1}{R_1}$, puis diminue progressivement jusqu'à U_0, avec la constante de temps $\tau = \dfrac{R + R_1}{RR_1C}$.

On peut comparer l'action du correcteur à celle d'un conducteur automobile qui pour atteindre une vitesse déterminée commencerait par appuyer sur l'accélérateur plus qu'il est nécessaire puis lèverait le pied en même temps que le véhicule accélère. On conçoit que ce type de correcteur conduit à de très faibles temps de réponse. Malheureusement il ne peut compenser que des systèmes dont le retard de phase est relativement faible.

En régime harmonique de pulsation très inférieure à ω'_d, il vient

$$\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_d}} \approx 1 + j\frac{\omega}{\omega_d}.$$

Cette relation provient de l'équation différentielle, $v_2 = v_1 + \dfrac{1}{\omega_d}\dfrac{dv_1}{dt}$.

Ainsi le correcteur réagit non seulement aux variations de la tension d'entrée mais aussi à leur dérivée par rapport au temps d'où le nom de la compensation : « proportionnelle et dérivée ». On peut ainsi comparer le correcteur à un conducteur automobile qui prendrait en compte non seulement la valeur instantanée de la vitesse mais aussi l'accélération, ce qui lui permet d'agir par anticipation.

5. CORRECTION PROPORTIONNELLE INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

5.1. PRINCIPE

Ce type de correcteur résulte de la combinaison des deux types de correcteurs précédents. Soit $\underline{T}(\underline{P})$ la transmittance du système non corrigé en boucle ouverte et soit ω_C la pulsation pour laquelle l'argument de $\underline{T}(j\omega)$ est égal à $-180°$.

• Le correcteur « proportionnel et intégral » possède une transmittance de la forme

$$\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_i}} \quad \text{avec} \quad \omega'_i < \omega_i \ll \omega_C.$$

• Le correcteur « proportionnel et dérivé » possède une transmittance de la forme

$$\underline{H} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_d}} \quad \text{avec} \quad \omega_d < \omega_C < \omega'_d.$$

• Un correcteur « proportionnel intégral et dérivé » doit donc présenter une transmittance de la forme :

$$\underline{H} = \frac{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_i}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_d}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_i}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_d}\right)}$$

avec $\omega'_i < \omega_i < \omega_d < \omega_C < \omega'_d$.

5.2. RÉALISATION DU CORRECTEUR

Le correcteur peut être réalisé par le dispositif de la figure 19 dont la transmittance s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}}{\dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}},$$

soit

$$\underline{H} = \frac{(1 + jR_2C_2\omega)(1 + jR_1C_1\omega)}{jR_1C_2\omega + (1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}.$$

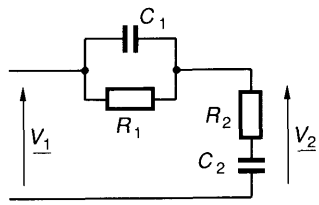


Fig. 19.

Le dénominateur

$$\underline{D} = (j\omega)^2R_1R_2C_1C_2 + j\omega(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1$$

peut être écrit sous la forme

$$\underline{D} = R_1R_2C_1C_2(j\omega - a_1)(j\omega - a_2)$$

où a_1 et a_2 sont les racines en jω du dénominateur,

$$\text{soit} \begin{cases} a_1 + a_2 = -\dfrac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} \\ a_1 \cdot a_2 = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2} \end{cases}$$

$$\underline{D} = R_1C_1R_2C_2a_1a_2\left(1 - \frac{j\omega}{a_1}\right)\left(1 - j\frac{\omega}{a_2}\right)$$

$$= \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_i'}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_d'}\right)$$

en posant $\omega_i' = -a_1$ et $\omega_d' = -a_2$;

$$\text{soit :} \begin{cases} \omega_i' + \omega_d' = \dfrac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} \\ \omega_i'\omega_d' = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}. \end{cases}$$

La transmittance du correcteur de la figure 19 se met donc sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_i}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_d}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_i'}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_d'}\right)}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_i = \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \omega_d = \dfrac{1}{R_2C_2} \\ \omega_i' + \omega_d' = \dfrac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} \\ \qquad = \omega_i + \omega_d + \dfrac{1}{R_2C_1} \\ \omega_i' \cdot \omega_d' = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2} = \omega_i\omega_d. \end{cases}$$

Les pulsations ω_i, ω_d, ω_i', ω_d' étant liées par la relation $\omega_i\omega_d = \omega_i'\omega_d'$ ne sont pas indépendantes et on ne peut choisir que trois d'entre elles.

Les éléments R_1, C_1, R_2, C_2 sont déterminés à partir des équations :

$$\begin{cases} R_1C_1 = \dfrac{1}{\omega_i} \\ R_2C_2 = \dfrac{1}{\omega_d} \\ R_2C_1 = \dfrac{1}{\omega_i' + \omega_d' - \omega_i - \omega_d} \end{cases}$$

5.3. EXEMPLE : AMPLIFICATEUR

Reconsidérons le dispositif de la figure 21 du chapitre 4 pour lequel la transmittance en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T} = \frac{A_0K}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}$$

avec $A_0 = 10^3$; $f_1 = 1$ MHz; $f_2 = 10$ MHz; $f_3 = 50$ MHz.

Proposons-nous, comme au chapitre (2.4), d'obtenir une marge de phase de 45° avec $K = 1$. En utilisant le correcteur de la figure 19, la transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit

$$\underline{T_C} = \frac{A_0K}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)} \times \frac{\left(1 + j\frac{f}{f_i}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_d}\right)}{\left(1 + j\frac{f}{f_i'}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_d'}\right)}$$

En choisissant les fréquences f_i, f_d et f_i' de telle sorte que

$$\begin{cases} f_i = f_1 = 1 \text{ MHz} \\ f_d = f_2 = 10 \text{ MHz} \\ f_i' = 36 \text{ kHz} \end{cases}$$

il vient $\underline{T_C} = \dfrac{A_0K}{\left(1 + j\frac{f}{f_i'}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_d'}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_3}\right)}$

avec $f_i' = 36$ kHz; $f_3 = 50$ MHz;

$$f_d' = \frac{f_if_d}{f_i'} = \frac{f_1f_2}{f_i'} = 278 \text{ MHz}.$$

Les diagrammes asymptotiques de $\underline{T_C}$ sont donnés à la figure 20.

Pour la fréquence $f = f_c = 36$ MHz, on relève

$$\begin{cases} 20 \lg |\underline{T_C}(f_c)| = 0 \text{ db} \\ \arg \underline{T_C}(f_c) = -135° \end{cases}$$

ce qui correspond bien à une marge de phase de 45°.

Les éléments R_1, R_2, C_1, C_2 du correcteur doivent donc être tels que :

$$R_1C_1 = \frac{10^{-6}}{2\pi}; \quad R_2C_2 = \frac{10^{-7}}{2\pi};$$

$$R_2 C_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{10^{-6}}{278 + 0{,}036 - 1 - 10} \approx \frac{3{,}75 \times 10^{-9}}{2\pi}$$

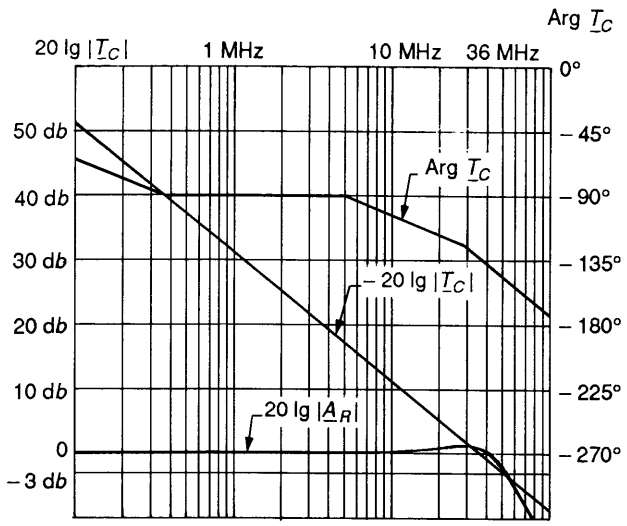


Fig. 20

Bande passante

La transmittance corrigée en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A}_R = \frac{A_0}{A_0 K + \left(1 + \mathrm{j}\frac{f}{f'_i}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{f}{f'_d}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_3}\right)},$$

avec

$$A_0 = 10^3; \quad K = 1; \quad f'_i = 36 \text{ kHz};$$
$$f'_d = 278\text{MHz}; \quad f_3 = 50 \text{ MHz}.$$

La courbe représentative de 20 lg $|\underline{A}_R|$ est donnée sur la figure 20. Elle présente une remontée de 1,2 db.

La fréquence de coupure à 3 db est : 51 MHz. Elle est plus élevée que celle qui est obtenue par la correction proportionnelle et intégrale (10,5 MHz) ainsi que celle obtenue par la correction pôle dominant (1,3 MHz) et ce dans les mêmes conditions de stabilité.

5.4. EXEMPLE : ASSERVISSEMENT DE VITESSE

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3, dont la transmittance en boucle ouverte est

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $H_0 = 1$; $\omega_1 = 27{,}4$ rad/s; $\omega_2 = 305$ rad/s; $\omega_0 = 628$ rad/s.

Supposons que l'on corrige le système à l'aide du dispositif de la figure 19, la transmittance corrigée s'écrit :

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2} \times \frac{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_d}\right)}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega'_i}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega'_d}\right)}.$$

Proposons-nous de déterminer les éléments R_1, R_2, C_1, C_2 du correcteur de telle sorte que la marge de phase soit égale à 45° pour $A = 100$. En choisissant

$$\omega_i = \omega_1 = 27{,}4 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_d = \omega_2 = 305 \text{ rad/s},$$

la transmittance corrigée s'écrit :

$$\underline{T}_C(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega'_i}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega'_d}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}.$$

Soit ω_a la pulsation pour laquelle

$$\arg \underline{T}_C(\mathrm{j}\omega) = -135°,$$

il est possible de faire une détermination approchée de ω'_i et ω'_d en posant *a priori* $\omega'_i \ll \omega_a$ et $\omega'_d \gg \omega_a$. On assimile ainsi ω_a à la pulsation pour laquelle $\arg\left[\left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = 45°$, c'est-à-dire $\omega_a = 260$ rad/s. En effet pour $\omega = \omega_a$

$$\arg \underline{T}_C(\omega_a) = -\arg\left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega_a}{\omega'_i}\right) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega_a}{\omega'_d}\right) - \arg\left[\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2\right]$$
$$\approx -90° - 0° - 45° = -135°$$

$$20 \lg |\underline{T}_C(\omega_a)| = 20 \lg A - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega'_i}\right)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega'_d}\right)^2} - 20 \lg\left[1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2\right]$$
$$\approx 40 - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega'_i}\right)^2} - 0 - 1{,}4$$
$$= 38{,}6 - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega'_i}\right)^2}$$

Nous obtenons ainsi une marge de phase de 45° en réalisant $20 \lg |\underline{T_C}(\omega_a)| = 0$, soit

$$20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_i'}\right)^2} = 38{,}6$$

où $\omega_i' = \dfrac{\omega_a}{85{,}1} = 3$ rad/s.

Nous en déduisons la pulsation ω_d' par

$$\omega_d' = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_i'} = 2\,790 \text{ rad/s}.$$

Les composants R_1, R_2, C_1, C_2 du schéma de la figure 19, doivent donc vérifier les équations :

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 27{,}4, \qquad \frac{1}{R_2 C_2} = 305$$

et $$\frac{1}{R_2 C_1} = 2\,790 + 3 - 27{,}4 - 305 = 2\,460.$$

REMARQUE

Les hypothèses de départ ($\omega_i' \ll \omega_a$ et $\omega_d' \gg \omega_a$) sont bien satisfaites. Cependant nous pouvons calculer la marge de phase exacte par

$$180° - 45° - \arctan \frac{\omega_a}{\omega_i'} - \arctan \frac{\omega_a}{\omega_d'} = 41°$$

au lieu de 45°.

Temps de réponse à 5 %

La transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T_C}(\underline{P}) = \frac{AH_0}{\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_d'}\right)\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}.$$

Compte tenu du schéma bloc de la figure 12 du chapitre 3, et de la correction, la transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A_R}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U_C}(\underline{P})} = \frac{R_2}{R_1}\frac{E}{V_0}\frac{H_m}{\omega_m^2} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \dfrac{\underline{P}}{\omega_d'}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \underline{T_C}(\underline{P})},$$

ou, en posant $K_0 = \dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{E}{V_0}\dfrac{H_m}{\omega_m^2}$,

$$\underline{\Omega}(\underline{P})\left[AH_0 + \left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_i'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_d'}\right)\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2\right] = \underline{U_C}(\underline{P}) K_0 \left[1 + \frac{\underline{P}}{\omega_0}\right]^2$$

Pour une attaque en échelon $u_C = U_{C_0}$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, il vient :

$$\Omega[1 + AH_0] + \frac{d\Omega}{dt}\left(\frac{1}{\omega_i'} + \frac{1}{\omega_d'} + \frac{2}{\omega_0}\right) + \frac{d^2\Omega}{dt^2}\left(\frac{1}{\omega_d'\omega_i'} + \frac{2}{\omega_d'\omega_0} + \frac{2}{\omega_i'\omega_0} + \frac{1}{\omega_0^2}\right) = K_0 U_{C_0}$$

ou en valeur numérique :

$$101\Omega + 0{,}337\frac{d\Omega}{dt} + 0{,}001\,18\frac{d^2\Omega}{dt^2} = K_0 U_{C_0}.$$

Cette équation est de la forme

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + 2m'\omega_0'\frac{d\Omega}{dt} + \omega_0'^2\Omega = \text{Cte}$$

avec $\begin{cases} 2m'\omega_0' = 286 \\ \omega_0'^2 = 85\,590; \end{cases}$

soit $m' = 0{,}49$ et $\omega_0' = 293$ rad/s.

Compte tenu de la courbe donnant le temps de réponse à 5 % en fonction de m (*fig.* 17, du chapitre 4), on détermine $t_{r5\%} = 0{,}85\dfrac{2\pi}{\omega_0'} = 18$ ms.

Ce temps de réponse est meilleur que celui obtenu par la compensation pôle donnant (216 ms) ou par la compensation proportionnelle et intégrale (35 ms) et ce dans des conditions de stabilité comparables.

6. CORRECTION PAR BOUCLE DE RÉACTION SECONDAIRE

6.1. Principe

Ce mode de correction consiste à améliorer la transmittance $\underline{H_e}(\underline{P})$ d'un des éléments de la chaîne directe en lui adjoignant une boucle de réaction secondaire (*fig.* 21).

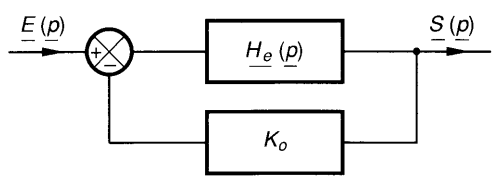


Fig. 21

La transmittance corrigée $\underline{H_C}(\underline{P})$ s'écrit

$$\underline{H_C}(\underline{P}) = \frac{\underline{H_e}(P)}{1 + K_0 \underline{H_e}(\underline{P})}$$

Dans le cas où K_0 est indépendant de $\underline{P}$ et où $\underline{H_e}(\underline{P})$ s'écrit $\dfrac{H_0}{1 + \tau_0 \underline{P}}$, la transmittance corrigée s'écrit

$$\underline{H_C}(\underline{P}) = \frac{H_0}{1 + \tau_0 \underline{P} + H_0 K_0} = \frac{H_0}{1 + H_0 K_0} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\tau_0}{1 + H_0 K_0} P}$$

La constante de temps de la transmittance passe ainsi de τ_0 à $\dfrac{\tau_0}{1 + H_0 K_0} < \tau_0$, ce qui améliore sa réponse et produit sur l'ensemble un effet stabilisant.

6.2. EXEMPLE : CORRECTION TACHYMÉTRIQUE

Nous avons montré que la vitesse Ω d'un moteur à courant continu à flux constant dépend de sa tension d'alimentation u suivant la transmittance

$$\underline{H_m}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U}(\underline{P})} = \frac{H_{m_0}}{1 + \tau_m \underline{P}}.$$

On réalise, sur le moteur, une correction tachymétrique à l'aide du dispositif de la figure 22.

• La dynamo tachymétrique montée sur l'arbre du moteur délivre une tension $K\Omega$ proportionnelle à la vitesse de rotation.

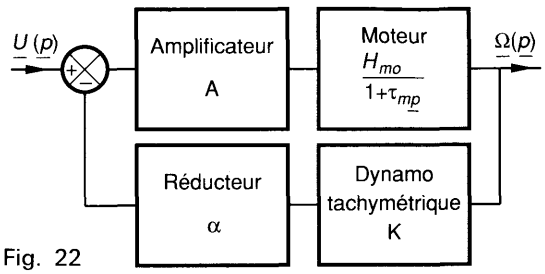


Fig. 22

• Après réduction α, cette tension est comparée à la tension d'entrée u de la boucle secondaire.

La boucle de réaction secondaire présente la transmittance :

$$\underline{H_C}(\underline{P}) = \frac{\dfrac{AH_{m_0}}{1 + \tau_m \underline{P}}}{1 + A\alpha K \dfrac{H_{m_0}}{1 + \tau_m \underline{P}}} = \frac{AH_{m_0}}{1 + A\alpha K H_{m_0}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\tau_m}{1 + A\alpha K H_{m_0}} \underline{P}}.$$

La constante de temps passe de τ_m à $\dfrac{\tau_m}{1 + A\alpha K H_{m_0}}$.

Le gain statique passe de H_{m_0} à $\dfrac{AH_{m_0}}{1 + A\alpha K H_{m_0}}$.

Dans le cas où $A\alpha K H_{m_0}$ est très grand par rapport à 1,

- la constante de temps devient $\dfrac{\tau_m}{A\alpha K H_{m_0}}$;
- le gain statique devient $\dfrac{1}{\alpha K}$.

Afin d'obtenir une faible constante de temps tout en conservant un gain statique important il faut choisir une valeur faible pour la réduction α et compenser par une forte valeur de l'amplification A.

EXERCICES

1. Étude d'une boucle à verrouillage de phase

Une boucle à verrouillage de phase (*fig.* 1) reçoit une différence de potentiel $v_e = V_e \sin [\omega_0 t + \varphi_e(t)]$ et délivre une différence de potentiel $v_s = V_s \cos [\omega_0 t + \varphi_s(t)]$; la pulsation ω_0 est constante, $\varphi_e(t)$ et $\varphi_s(t)$ sont des phases fonction du temps.

Cette boucle à verrouillage de phase est formée de trois sous-ensembles :

– un multiplicateur (qui élabore la différence de potentiel $x(t) = M \,.\, v_e(t) \,.\, v_s(t)$ où $M = \text{Cte}$) associé à un filtre passe-bas dont le rôle est de ne transmettre (sans atténuation ni amplification) que les composantes de pulsations très inférieures à ω_0;

– un filtre correcteur;

– un oscillateur commandé par tension qui délivre la différence de potentiel $v_s(t) = V_s \cos [\omega_0 t + \varphi_s(t)]$, de *pulsation instantanée* $\omega_s(t) \equiv \omega_0 + \dfrac{d\varphi_s(t)}{dt}$. (On rappelle que la pulsation instantanée d'une fonction $y(t) = Y \cos [\theta(t)]$ est, par définition, la dérivée $\omega(t) = \left| \dfrac{d[\theta(t)]}{dt} \right|$.)

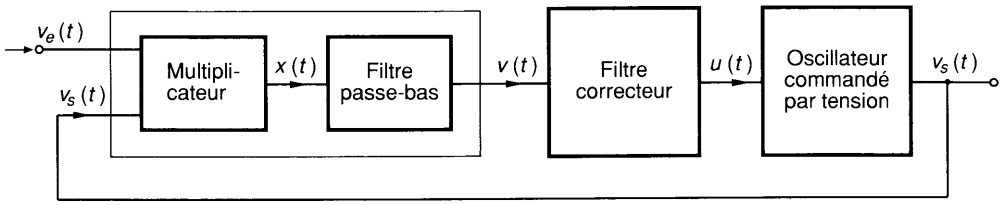


Fig. 1

La composante variable $\frac{d\varphi_s(t)}{dt}$ de $\omega_s(t)$ est proportionnelle à tension de commande $u(t)$ issue du filtre correcteur; on pose $\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = \lambda \cdot u(t)$.

Le but du système est d'asservir la phase $\varphi_s(t)$ à la phase $\varphi_e(t)$ qui doivent être considérées, respectivement, comme les grandeurs effectives d'entrée et de sortie de la boucle.

A) ***Étude des trois sous-ensembles***

1° *Multiplicateur — filtre passe-bas*

a) Montrer que la différence de potentiel $x(t)$ à la sortie du multiplicateur peut s'écrire :

$$x(t) = X \sin [\alpha(t)] + X \sin [\beta(t)].$$

Donner les expressions de X, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

b) Sachant que les écarts, par rapport à ω_0 des pulsations instantanées de $v_s(t)$ et de $v_e(t)$ restent toujours très faibles devant ω_0 (c'est-à-dire $\left|\frac{d\varphi_e(t)}{dt}\right| \ll \omega_0$ et $\left|\frac{d\varphi_s(t)}{dt}\right| \ll \omega_0$, quel que soit t), et que $|\varphi_s(t) - \varphi_e(t)|$ est voisin de zéro, quel que soit t, montrer que la tension de sortie du filtre passe-bas se réduit à $v(t) \approx X[\varphi_e(t) - \varphi_s(t)]$.

Interpréter ce résultat par le schéma fonctionnel de ce sous-ensemble.

2° *Filtre correcteur*

Le schéma de *principe* est donné figure 2; *les amplificateurs sont supposés idéaux.* (En fait, on ne se préoccupe pas, ici, des perfectionnements qu'il faudrait apporter pour parer les effets d'une tension de décalage et des courants de polarisation.)

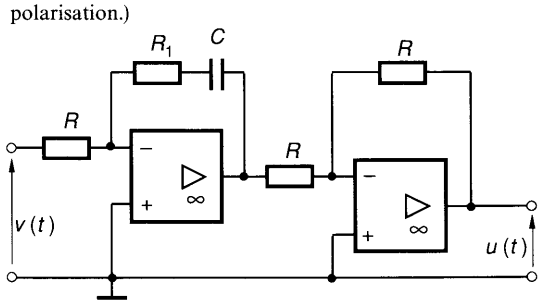


Fig. 2

a) Calculer la transmittance complexe $\underline{F}(j\omega) \equiv \frac{\underline{U}}{\underline{V}}$ et l'exprimer en fonction du rapport $\frac{R_1}{R} \equiv a$ et de la constante de temps $\tau \equiv R \cdot C$.

b) Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de $\underline{F}(j\omega)$ (gain et argument) et esquisser les courbes vraies.

Déterminer les coordonnées du point de concours des asymptotes de la courbe de gain; pour l'abscisse de ce point, donner les valeurs du gain et de l'argument de $\underline{F}(j\omega)$.

3° *Oscillateur commandé en tension*

La grandeur effective de sortie de l'oscillateur étant $\varphi_s(t)$, déterminer sa transmittance complexe $\frac{\underline{\Phi}_s}{\underline{U}}$. On rappelle que $\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = \lambda \cdot u(t)$.

B) ***Étude du système bouclé***

1° *Synthèse*

a) Représenter le schéma fonctionnel de la boucle à verrouillage de phase de grandeur d'entrée φ_e et de grandeur de sortie φ_s, en y affichant clairement :

- les diverses grandeurs (φ_e, φ_s, v, u et $\varphi_{es} \equiv \varphi_e - \varphi_s$);
- les transmittances (complexes ou opérationnelles) des différents blocs.

b) Déterminer les expressions (dans lesquelles on posera $K = a^2 \cdot \tau \cdot X \cdot \lambda$) de :

- la transmittance de la chaîne directe $\underline{T} \equiv \frac{\underline{\Phi}_s}{\underline{\Phi}_{es}}$;
- la transmittance en boucle fermée $\underline{T'} \equiv \frac{\underline{\Phi}_s}{\underline{\Phi}_e}$;
- la transmittance : $\underline{E} \equiv \frac{\underline{\Phi}_{es}}{\underline{\Phi}_e}$.

2° *Stabilité*

a) Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de la transmittance $\underline{T}$ (gain et argument) et esquisser les courbes vraies.

Déterminer les coordonnées du point de concours des asymptotes de la courbe de gain; pour l'abscisse de ce point, donner les valeurs du gain et de l'argument de $\underline{T}(j\omega)$.

b) Déterminer la valeur de la constante K pour que la marge de phase du système bouclé soit de 45°.

c) Dans quel sens faudrait-il modifier la valeur de K pour améliorer la stabilité? *(La réponse doit être justifiée.)*

3° *Précision*

a) Donner l'équation différentielle qui lie $\varphi_s(t)$ à $\varphi_e(t)$ et fait intervenir la constante K.

b) $\varphi_e(t)$ est un échelon de phase Φ, c'est-à-dire $\varphi_e(t) = \Phi = \text{Cte}$ pour $t > 0$.

- Déterminer $\varphi_s(t)$, pour $t \to \infty$.
- Comparer $\varphi_s(t)$ et $\varphi_e(t)$; conclure.

c) $\varphi_e(t)$ est maintenant une rampe de phase, c'est-à-dire $\varphi_e(t) = \Delta\omega \cdot t$, pour $t > 0$.

– Déterminer $\varphi_s(t)$ pour $t \to \infty$.
– Comparer $\varphi_s(t)$ et $\varphi_e(t)$; conclure.

d) Dans chacun des deux cas précédents, quelles sont les pulsations instantanées de $v_s(t)$ et de $v_e(t)$ en régime permanent?

2. Enregistreur asservi (*fig.* 1)

On donne :

- *pour le moteur :* moment d'inertie : J; résistance : r; couple de frottements visqueux : $C_f = \lambda\Omega$ (où Ω est la vitesse de rotation en rad/s); couple moteur : $C_m = K \,.\, i$ (où i est le courant d'induit);
- *pour le convertisseur rotation-translation :* $y_s = a\theta$ (θ angle de rotation);
- *pour le capteur de position :* $u_R = W \,.\, y_s$.

1° *a*) Établir l'équation différentielle reliant u_{ER} et Ω, et la mettre sous la forme :

$$\tau_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = H_{m0} A u_{ER}$$

Exprimer τ_m et H_{m0} en fonction de K, r, λ, J.

b) Le système étant en boucle ouverte, établir l'équation différentielle de u_R et la mettre sous la forme :

$$\tau_m \frac{d^2u_R}{dt^2} + \frac{du_R}{dt} = H_0 W u_{ER}$$

Exprimer H_0 en fonction de H_{m0}, A, a.

c) On donne
$H_{m0} = 10$ rad/s; $\tau_m = 75$ ms; $a = 1{,}33 \times 10^{-2}$ m/rad; $W = 50$ V/m; $K = 2{,}51 \times 10^{-2}$ V . s/rad; $r = 4{,}7\ \Omega$.
Établir, en régime sinusoïdal permanent, la transmittance en boucle ouverte et la mettre sous la forme :

$$\frac{1}{j\omega/\omega_1(1 + j\omega/\omega_2)}.$$

Exprimer ω_1 et ω_2 en fonction de H_{m0}, W, a, A, τ_m.

d) Calculer la valeur de A qui permet d'obtenir une marge de phase de 45°.

e) Le système étant en boucle fermée, établir l'équation différentielle de y_s et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2y_s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dy_s}{dt} + \omega_0^2 y_s = \frac{H_0}{\tau_m} u_E.$$

Application numérique : Exprimer m et ω_0 en fonction de A. Quelle est la valeur de A qui assure un temps de réponse à 5 % minimum.

Sachant que $t_{r5\%\min} = 0{,}44 \times \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$, calculer $t_{r5\%\min}$.

f) Le système étant en boucle fermée, établir la transmittance de Laplace : $\underline{U}_{ER}(p)/\underline{U}_E(p)$. En déduire :

– l'erreur statique pour une attaque en échelon $u_E = E$;
– l'erreur de trainage pour une attaque en rampe $u_E = \alpha t$.

g) Montrer qu'une diminution de τ_m accroît les performances du montage.

2° Pour diminuer τ_m on réalise le montage (*fig.* 2).
La dynamo tachymétrique fixée sur l'arbre du moteur donne une tension e_g proportionnelle à la vitesse de rotation : $e_g = K_g \,.\, \Omega$.
Un réducteur réduit cette tension à $u_1 = X \,.\, e_g$.

a) Établir, en fonction de u_{ER}, l'équation différentielle donnant les variations de Ω. Montrer que dans le cas où $XK_g \,.\, H_{m0} \,.\, A' \gg 1$, on peut la mettre sous la forme :

$$\tau'_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{u_{ER}}{XK_g}$$

Exprimer τ'_m en fonction de X, K_g, H_{m0}, A', τ_m.

b) Déterminer l'erreur de trainage en fonction de α, X, K_g, a, W.

c) Quelle est la valeur du produit $A' \,.\, X^2$ qui permet d'avoir une marge de phase à 45°.

d) On donne $K_g = 0{,}23$ V/rad . s.
Déterminer A' et X pour avoir une marge de phase à 45° et une erreur de trainage égale à $(7 \times 10^{-4} \,.\, \alpha)$ volt.

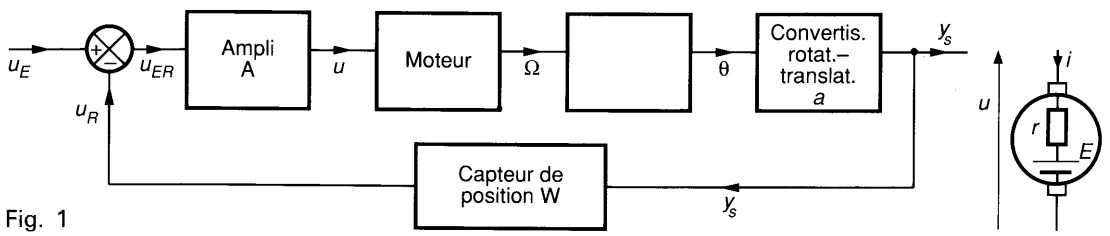


Fig. 1

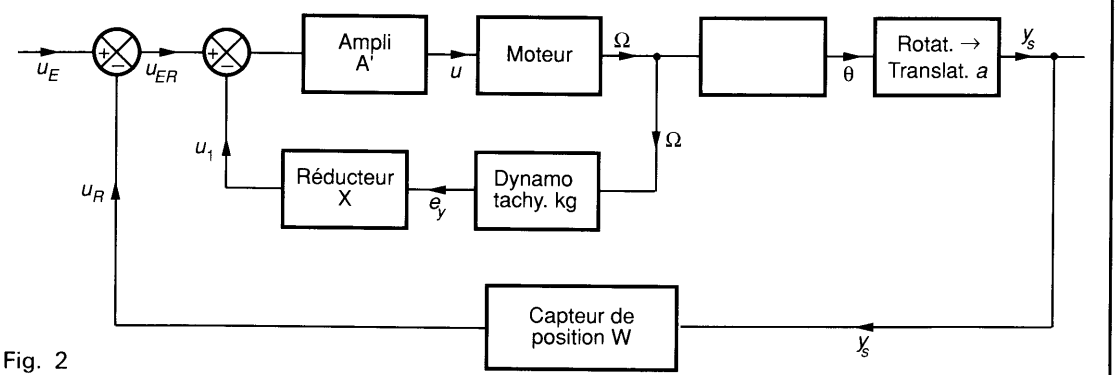


Fig. 2

3. Étude d'un amplificateur non inverseur

On se propose d'étudier un montage amplificateur d'usage général représenté sur la figure 1. Ce montage comporte un circuit intégré amplificateur de différence dont le modèle dynamique est représenté figure 2. L'amplification complexe est

$$\underline{A} = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_a}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_b}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_c}\right)}$$

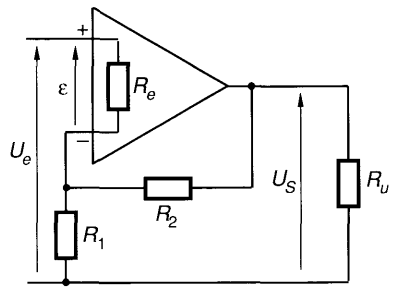


Fig. 1

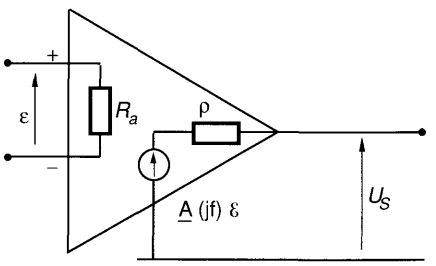


Fig. 2

avec $A_0 = 10^5$; $f_a = 2$ kHz; $f_b = 20$ kHz et $f_c = 4$ MHz; $\rho = 80\ \Omega$.

1° *Amplificateur non compensé*

a) En utilisant les schémas des figures 1 et 2, exprimer la tension ε en fonction de u_e et de u_s. Exprimer aussi la tension u_s en fonction de ε et des éléments du montage.

b) En utilisant les résultats de la question précédente mettre l'amplificateur sous la forme du schéma fonctionnel de la figure 3. Exprimer H et K et α.

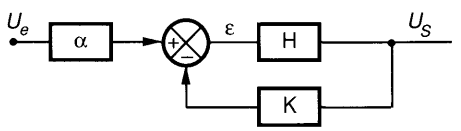


Fig. 3

c) Que deviennent ces trois grandeurs si R_e est très supérieure à R_1 et R_2, et si ρ est très inférieure à R_1, R_2 et R_u. On montrera $\underline{H} = \underline{A}$, $\underline{\alpha} = 1$, $K = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

d) Calculer l'amplification en basses fréquences du système bouclé si les hypothèses de la question précédente sont réalisées. Que devient cette amplification lorsque $A_0 \to \infty$?

2° *Étude de la stabilité avec une utilisation résistive*

a) Représenter les diagrammes asymptotiques du module et de l'argument de $\underline{A}(jf)$ dans le plan de Bode.

b) Déterminer à partir de ces diagrammes la valeur maximale K_1 de K telle que la marge de phase du système soit au moins égale à 45°.

c) On suppose que le pôle situé à la fréquence f_C est sans influence dans la bande de fréquence qui nous intéresse, c'est-à-dire que dans cette bande de fréquences l'amplificateur a une transmittance

$$\underline{A}(jf) = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_a}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_b}\right)}.$$

Calculer directement la transmittance en boucle fermée du système. Représenter le module de cette transmittance dans le même système d'axes qu'à la question 2°, *a*) pour $K = K_1$ puis pour $K = 1$. Préciser dans chaque cas les valeurs de la fréquence propre f_0 et du facteur d'amortissement m.

d) Donner l'allure de la tension $u_s(t)$ pour une entrée en échelon d'amplitude unité dans les deux cas envisagés précédemment (on ne fera aucun calcul).

3° *On remplace la résistance R_u par un condensateur de capacité $C_u = 0{,}1\ \mu F$*

a) Montrer que l'introduction de C_u introduit un nouveau pôle dans la transmittance en boucle ouverte du système. En supposant que l'impédance du condensateur est très inférieure à $R_1 + R_2$, calculer littéralement puis numériquement la fréquence f_u de ce nouveau pôle en fonction de ρ et de C_u.

b) Quelle est maintenant la marge de phase du système? Celui-ci sera-t-il stable pour $K = K_1$?

4° *Étude d'une compensation externe à l'amplificateur*

On considère le fonctionnement sur utilisation résistive et on néglige encore l'influence du pôle de fréquence f_c. On veut que le diagramme asymptotique du module de l'amplification $\underline{A}_c(jf)$ du système corrigé ait l'allure représentée à la figure 4.

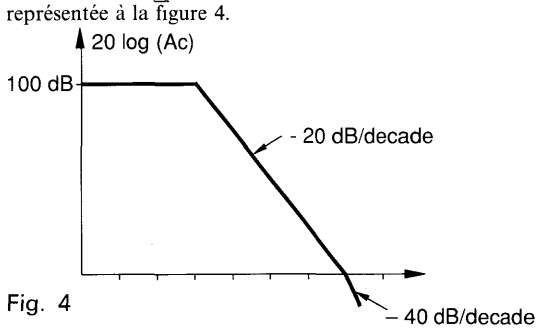


Fig. 4

a) Exprimer la nouvelle transmittance $\underline{A}_c(jf)$ et en déduire la transmittance $\underline{D}(jf)$ du réseau correcteur. Représenter les diagrammes du module et de la phase de $\underline{D}(jf)$ dans le plan de Bode. Quel est le type de réseau utilisé?

b) Le réseau est réalisé par le circuit passif représenté à la figure 5. Exprimer la transmittance $\underline{D}(jf)$ de ce réseau et donner les quatre relations liant les fréquences de coupures f_1, f_2, f_3 et f_4 aux éléments du montage. Calculer la valeur numérique de ces différents éléments, avec $R_1 = 1\ k\Omega$.

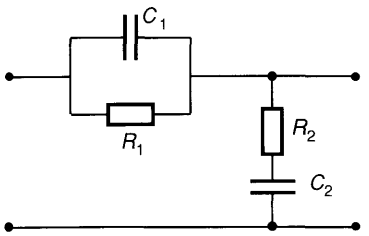


Fig. 5

7 asservissements numériques

1. PRINCIPE

Soit le système décrit par la figure 1, constitué d'un bloc de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$, d'un calculateur et d'un convertisseur numérique analogique.

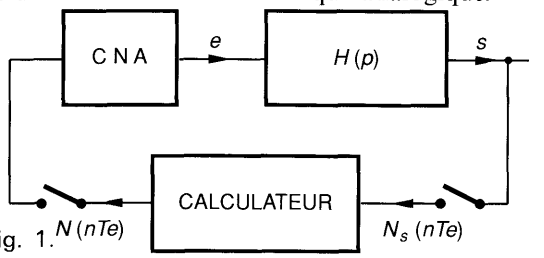


Fig. 1.

– Le calculateur réalise les opérations suivantes avec une fréquence $F_e = \dfrac{1}{T_e}$, dite **fréquence d'échantillonnage.**

• Il prélève les valeurs $s(nT_e)$ de la grandeur de sortie $s(t)$. On dit qu'il échantillonne la sortie. Il obtient ainsi une suite de nombres $N_S(nT_e)$ images de la sortie et appelés échantillons.

• Il place à l'entrée du convertisseur numérique analogique (C-N-A) un nombre $N(nT_e)$ qu'il détermine à partir des nombres $N_S(nT_e)$ et d'une suite mémorisée $N_C(nT_e)$ de nombres de commande.

– Le convertisseur numérique-analogique transforme la suite de nombres $N(nT_e)$ en signal analogique $e(nT_e)$. De plus, il joue le rôle d'un bloqueur d'ordre zéro en maintenant la valeur $e(nT_e)$ jusqu'à l'apparition de l'échantillon suivant.

Nous ferons appel dans cette étude aux transformées en Z qui ont été étudiées dans le tome 1.

Exemple

Reprenons l'asservissement de vitesse de la figure 4 du chapitre 3 et modifions le dispositif comme indiqué à la figure 2.

– La vitesse Ω du moteur est obtenue, de manière identique, à partir de la tension u_E. La transmittance $\underline{H}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U}_E(\underline{P})}$ s'écrit donc comme pour le dispositif de la figure 4 du chapitre 3.

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{P})}{\underline{U}_E(\underline{P})} = \frac{E}{V_0} \times \frac{H_m}{\underline{P}^2 + 2m\omega_m \underline{P} + \omega_m^2}$$

$$= \frac{H_0}{1 + 2m\dfrac{\underline{P}}{\omega_m} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}}$$

avec $H_0 = \dfrac{EH_m}{V_0\omega_m^2}$.

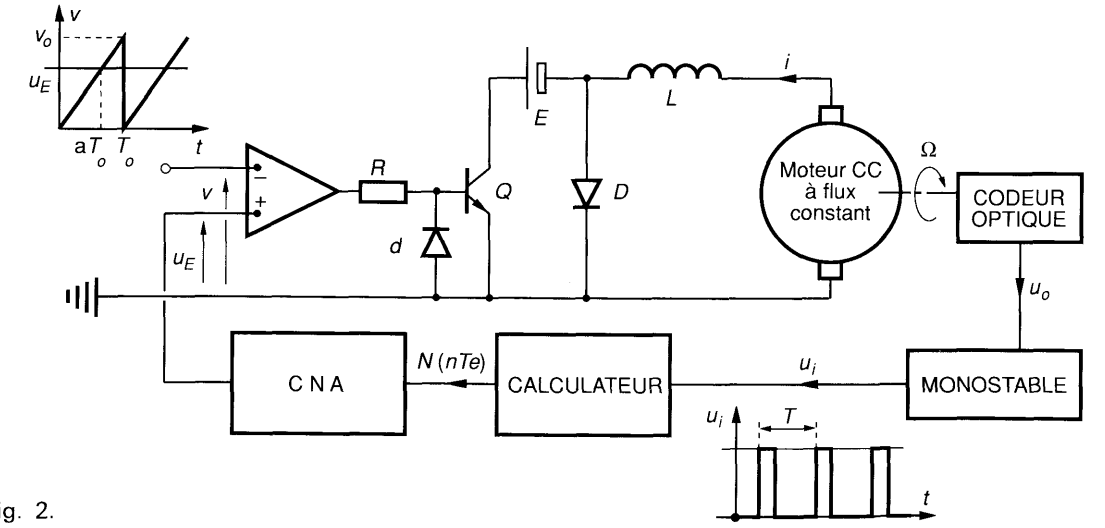


Fig. 2.

– Le calculateur détermine périodiquement, avec une fréquence $F_e = 1/T_e$, l'intervalle de temps T séparant deux impulsions du monostable. Soit N le nombre de lignes du codeur optique. Le temps T s'exprime en fonction de la vitesse Ω par $T = \frac{2\pi}{N\Omega}$. Le calculateur en déduit ainsi une suite de nombres $N_\Omega(nT_e)$, images de la vitesse Ω.

– Avec la même fréquence F_e, le calculateur détermine un nombre $N(nT_e)$ que le convertisseur numérique analogique transforme en tension $U_E(nT_e)$ et bloque jusqu'à l'apparition du nombre suivant.

– Nous avons vu, dans le tome 1, que, bloquer un signal pendant le temps T_e, revient à le faire passer à travers un système de transmittance $\underline{B}(\underline{P}) = \frac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}}$.

Au total, l'asservissement numérique de la figure 2 peut se mettre sous la forme du schéma de la figure 3.

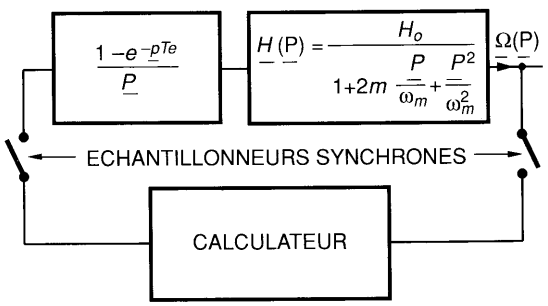


Fig. 3.

Nous limiterons notre étude aux systèmes dont la transmittance directe est formée par l'association en cascade d'un bloqueur et d'une transmittance $\underline{H}(\underline{P})$. De plus, nous supposerons **dans un premier temps** que le calculateur détermine la suite de nombres $N(nT_e)$, qu'il place à l'entrée du C-N-A, par $N(nT_e) = A[N_C(nT_e) - N_S(nT_e)]$ où $N_C(nT_e)$ est la suite mémorisée des échantillons de commande et $N_S(nT_e)$ est la suite des échantillons prélevés en sortie.

On obtient ainsi le schéma « général » suivant (*fig.* 4).

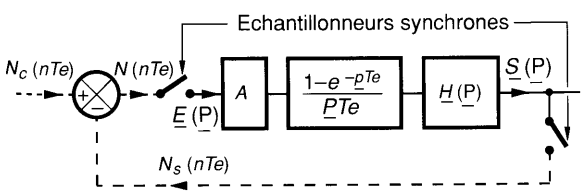


Fig. 4

Sur le schéma de la figure 4, les liaisons entre éléments linéaires (bloqueur, système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$) sont repérées par des traits pleins, alors que les grandeurs échantillonnées sont reliées par des traits pointillés.

On distingue ainsi deux sous-ensembles, traitant des grandeurs de nature différente, et séparés par deux échantillonneurs synchrones.

Par échantillonnage, une même suite de nombres peut être obtenue à partir de signaux différents (*fig.* 5). Il n'est donc pas possible de caractériser la fonction échantillonnage par une transmittance de Laplace.

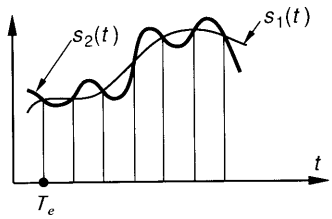


Fig. 5.

En toute rigueur le système complet ne peut donc être étudié, ni à partir de la transformée de Laplace, ni à partir des nombres complexes.

2. STABILITÉ

2.1. ÉTUDE QUALITATIVE

Nous allons établir que l'échantillonnage amène un risque d'instabilité d'autant plus important que la fréquence d'échantillonnage F_e est plus faible.

Pour s'en convaincre, considérons le système bouclé formé par un véhicule automobile et son conducteur. Afin de maintenir la vitesse constante, le conducteur réagit suivant un algorithme qui traite une suite de nombre de commande $N_C(nT_e)$ égaux, et une suite de nombres provenant de l'échantillonnage de la vitesse $N_S(nT_e)$ avec une période T_e. On conçoit que si le conducteur consulte le compteur de vitesse toutes les secondes, les risques d'instabilité de vitesse sont moins importants que s'il réalise la même opération toutes les dix secondes (étant supposé qu'il n'a pas d'autre information sur la vitesse et sur ses variations que celles que lui fournit le compteur).

2.2. APPROXIMATION HARMONIQUE

Nous avons établi, qu'en toute rigueur, le comportement du système complet ne pouvait pas être étudié à partir de l'analyse harmonique; nous allons cependant montrer que dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, on peut avec une bonne approximation faire l'étude du système à partir des nombres complexes.

Nous avons établi, dans le tome 1, que l'échantillonnage, avec la fréquence F_e, de la sinusoïde $f(t) = A \cos 2\pi ft$ conduit à une infinité de composantes sinusoïdales d'amplitude $\frac{A}{T_e}$ et de fréquences $f, F_e - f, F_e + f, 2F_e - f, 2F_e + f, \ldots$. Ce phénomène est décrit à la figure 6.

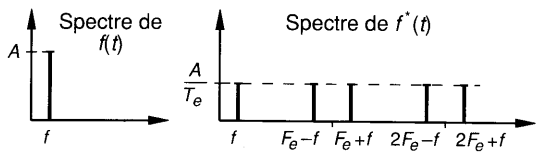


Fig. 6

L'ensemble bloqueur-système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$ constitue dans tous les cas un filtre passe bas. Compte tenu de la vitesse de réaction du système et si la fréquence d'échantillonnage F_e est suffisamment élevée, toutes les composantes sinusoïdales de fréquences $F_e - f, F_e + f, 2F_e - f, 2F_e + f$, ... sont éliminées par l'ensemble bloqueur-système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$.

On limite ainsi l'étude au premier harmonique de fréquence f, sur lequel l'échantillonnage se traduit par une division par T_e; le système est ainsi décrit par le schéma bloc de la figure 7.

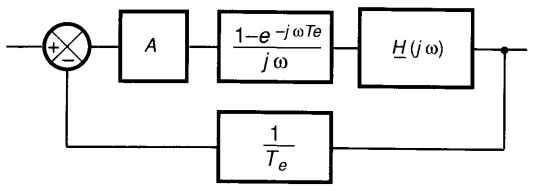


Fig. 7

Nous retrouvons alors le schéma général d'un système bouclé linéaire. L'étude de la stabilité et des marges correspondantes peut être abordée par l'une des méthodes exposées précédemment.

Exemple d'application

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 2. L'approximation du premier harmonique permet de le décrire par le schéma bloc de la figure 7, avec

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_m} + \left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}$$

avec $H_0 = 1$; $m = 1{,}82$; $\omega_m = 91{,}4$ rad/s.

La période d'échantillonnage T_e est de 5 millisecondes.

La transmittance en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T}(j\omega) = A \cdot \frac{(1 - e^{-j\omega T_e})H_0}{j\omega T_e\left[1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_m} + \left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]}.$$

soit :

$$\underline{T}(j\omega) = A\, e^{-j\omega\frac{T_e}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega\frac{T_e}{2}} - e^{-j\omega\frac{T_e}{2}}}{2j\frac{\omega T_e}{2}} \cdot \frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_m} + \left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}$$

$$\underline{T}(j\omega) = A\, e^{-j\omega\frac{T_e}{2}} \cdot \frac{\sin\omega\frac{T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} \cdot \frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_m} + \left(j\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} |\underline{T}(j\omega)| = A\dfrac{\left|\sin\omega\frac{T_e}{2}\right|}{\omega\frac{T_e}{2}} \cdot \dfrac{H_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} \\ \arg\underline{T}(j\omega) = -\omega\dfrac{T_e}{2} - \arctan\dfrac{2m\frac{\omega}{\omega_m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \end{cases}$$

Le blocage provoque un retard temporel de $\frac{T_e}{2}$ et une multiplication du module par $\dfrac{\left|\sin\omega\frac{T_e}{2}\right|}{\omega\frac{T_e}{2}}$.

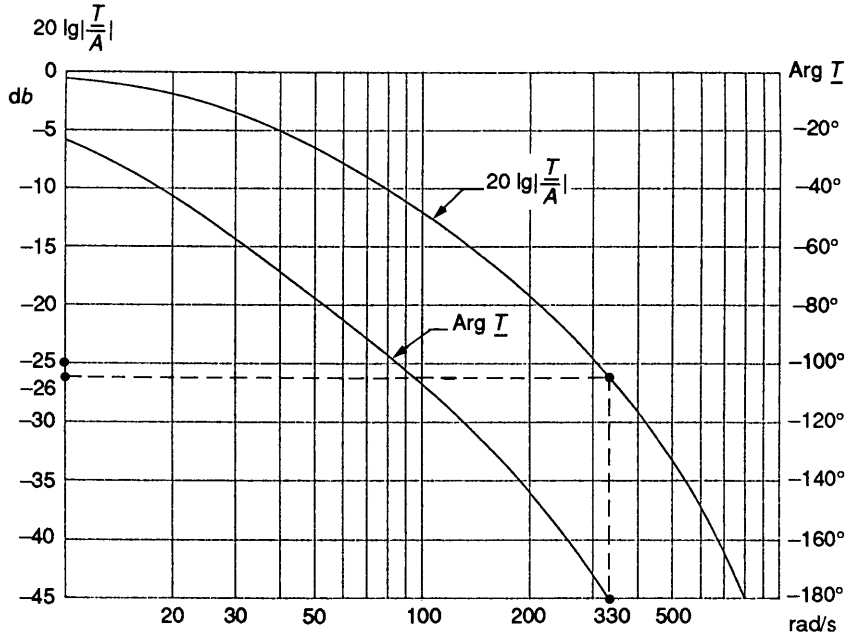


Fig. 8

Les diagrammes de Bode de $20 \lg \left| \frac{\underline{T}(j\omega)}{A} \right|$ et $\arg \underline{T}(j\omega)$ sont donnés à la figure 8.

Pour $\omega = \omega_C = 330$ rad/s, on relève :

$$\begin{cases} 20 \lg \left| \frac{\underline{T}(\omega_C)}{A} \right| = -26 \text{ db} \\ \arg \underline{T}(\omega_C) = -180° \end{cases}$$

La stabilité du système bouclé impose :

$$20 \lg |\underline{T}(\omega_C)| = -26 + 20 \lg A$$

soit négatif ce qui conduit à $A < 10^{26/20} = 20$.

Remarquons que si la fréquence d'échantillonnage augmente, la période T_e décroît et

$$\arg \underline{T}(j\omega) \to -\arctan \frac{2m \frac{\omega}{\omega_m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| \to \frac{AH_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}}$$

$\arg \underline{T}(j\omega)$ ne peut devenir inférieur à $-180°$ et le système bouclé est inconditionnellement stable.

Par contre, si l'échantillonnage est lent, la période T_e est importante et $\arg \underline{T}(j\omega)$ décroît rapidement avec la pulsation, augmentant ainsi les risques d'instabilité. Ceci confirme les prévisions de l'étude qualitative. **Un échantillonnage lent accroît les risques d'instabilité.**

2.3. CONDITION GÉNÉRALE DE STABILITÉ

Rappelons qu'un système est stable s'il retourne vers sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté.

Considérons le schéma de la figure 9.

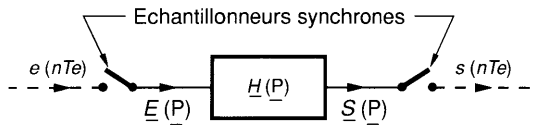


Fig. 9

L'attaque du système par le nombre unité ($e(0) = 1$ et $e(nT_e) = 0 \quad \forall n \neq 0$) revient à appliquer à la transmittance $\underline{H}(\underline{P})$ une impulsion de Dirac d'intensité unité ($\underline{E}(\underline{P}) = 1$).

Le signal de sortie correspond à la réponse impulsionnelle, nous le noterons $i(t)$.

Sa transformée de Laplace est

$$\underline{I}(\underline{P}) = \underline{H}(\underline{P})\underline{E}(\underline{P}) = \underline{H}(\underline{P}).$$

Soient $\underline{P}_0, ..., \underline{P}_k$ les pôles de $\underline{H}(\underline{P})$:

$$\underline{H}(\underline{P}) = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{A_i}{\underline{P} - \underline{P}_i}$$

L'originale de $\frac{A_i}{\underline{P} - \underline{P}_i}$ étant $A_i \, e^{\underline{P}_i t}$, le signal de sortie $i(t)$ s'écrit

$$i(t) = \sum_{i=0}^{i=k} A_i \, e^{\underline{P}_i t}.$$

Ce signal de sortie, échantillonné avec la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, conduit à une suite de nombres $i(nT_e)$, à laquelle est associée la transformée en Z :

$$\underline{I}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} i(nT_e)\underline{Z}^{-n}.$$

Sachant (voir tome 1) que la transformée en Z de $A\,e^{at}$ s'écrit $A\,\frac{1}{1 - \underline{Z}^{-1}\,e^{aT_e}}$, il vient

$$\underline{I}(\underline{Z}) = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{A_i}{1 - \underline{Z}^{-1}\,e^{\underline{P}_i T_e}}$$

Relation entre la transmittance en $\underline{Z}$ et la réponse impulsionnelle.

Considérons maintenant l'attaque du système de la figure 9, par une suite de nombres $\{e(0), e(T_e), ..., e(nT_e), ...\}$.

Il lui correspond un signal $e^*(t)$ qui s'écrit :

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)\,\delta u(t - nT_e)$$

où $\delta u(t - nT_e)$ est l'impulsion de Dirac d'intensité unité centrée sur $t = nT_e$.

Il apparaît donc sur l'entrée une suite d'impulsions de Dirac d'intensités différentes $(e(nT_e))$ et décalées de T_e les unes par rapport aux autres. Le système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$ étant supposé linéaire nous déduisons, par application du théorème de superposition, que l'état $s(t)$ de la sortie à l'instant t, résulte de l'addition de toutes les réponses impulsionnelles antérieures, soit :

$$s(t) = \sum_{m=0}^{m<\frac{t}{T_e}} e(mT_e)i(t - mT_e).$$

Par échantillonnage, la transformée en Z du signal $s(nT_e)$ s'écrit

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e)\underline{Z}^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e(mT_e)i[(n-m)T_e]\underline{Z}^{-n}.$$

La réponse impulsionnelle étant forcément nulle avant l'instant $t = 0$ auquel l'impulsion est appliquée, nous déduisons $i[(n-m)T_e] = 0$ pour $m > n$. Il vient alors

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e(mT_e)i[(n-m)T_e]\underline{Z}^{-n}$$

où en posant $n - m = k$,

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \sum_{k=-m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e(mT_e)\underline{Z}^{-m}i(kT_e)\underline{Z}^{-k}$$
$$= \sum_{k=-m}^{\infty} i(kT_e)\underline{Z}^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} e(mT_e)\underline{Z}^{-m}$$

Comme $i[kT_e] = 0$ pour $k < 0$:

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} i[kT_e]\underline{Z}^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} e(mT_e)\underline{Z}^{-m}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\underline{S}(\underline{Z}) = \underline{I}(\underline{Z}) \cdot \underline{E}(\underline{Z})}$$

soit $\boxed{\underline{S}(\underline{Z}) = \underline{H}(\underline{Z})\underline{E}(\underline{Z}) \quad \text{avec} \quad \underline{H}(\underline{Z}) = I(\underline{Z})}$

D'une manière générale nous appellerons $\underline{H}(\underline{Z})$, **transmittance en $\underline{Z}$** d'un système échantillonné, le rapport des transformées en Z, $\underline{E}(\underline{Z})$ et $\underline{S}(\underline{Z})$ effectuées sur les échantillons d'entrée et de sortie.

Les résultats précédents permettent de conclure :

La transmittance en Z d'un système est la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle.

Considérant le système de la figure 9, la stabilité impose que la réponse impulsionnelle $i(t) = \sum_{i=0}^{i=k} A_i\,e^{P_i t}$ ne comprenne aucun terme divergent et pour cela, la **partie réelle de tous les pôles P_i doit être négative.**

Sachant que la transmittance en $\underline{Z}$ du système s'écrit

$$\underline{H}(\underline{Z}) = \underline{I}(\underline{Z}) = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{A_i}{1 - \underline{Z}^{-1}\,e^{\underline{P}_i T_e}} = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{A_i \underline{Z}}{\underline{Z} - e^{\underline{P}_i T_e}}$$

$e^{\underline{P}_i T_e}$ apparaît comme une valeur de Z qui annule le dénominateur de $\underline{H}(\underline{Z})$: on l'appelle **pôle de $\underline{H}(\underline{Z})$.**

La stabilité imposant que la partie réelle de tous les pôles $\underline{P}_i$ soit négative conduit à la condition : $|e^{\underline{P}_i T_e}| < 1$ quel que soit $\underline{P}_i$.

Un système échantillonné est stable si tous les pôles en $\underline{Z}$ de sa transmittance $\underline{T}(\underline{Z})$ ont un module inférieur à 1.

Stabilité d'un système bouclé.

Considérons, dès lors, le système bouclé de la figure 10.

Les transformées de Laplace $\underline{S}(\underline{P})$ et $\underline{E}(\underline{P})$ sont liées par la relation

$$\underline{S}(\underline{P}) = A[1 - e^{-\underline{P}T_e}]\,\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}\,\underline{E}(\underline{P}).$$

Par échantillonnage, on leur fait correspondre les transformées en Z, respectivement $\underline{S}(\underline{Z})$ et $\underline{E}(\underline{Z})$. Compte tenu des résultats précédents et sachant que la multiplication par $e^{-\underline{P}T_e}$ traduit un retard de T_e, qui conduit à une multiplication par $\underline{Z}^{-1}$ sur les transformées en $\underline{Z}$, il vient

$$\underline{S}(\underline{Z}) = A[1 - \underline{Z}^{-1}]\underline{H}(\underline{Z})\underline{E}(\underline{Z})$$

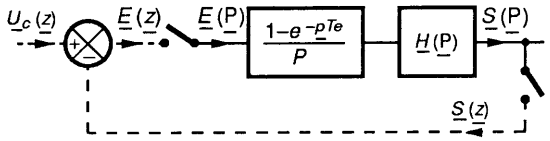


Fig. 10.

avec $\underline{H}(\underline{Z}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - \underline{Z}^{-1} e^{\underline{P_i} T_e}}$

où $\begin{cases} \underline{P_i} \text{ sont les pôles de } \dfrac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}} \\ A_i \text{ sont les résidus correspondants.} \end{cases}$

$\underline{T}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{S}(\underline{Z})}{\underline{E}(\underline{Z})} = A[1 - \underline{Z}^{-1}]\underline{H}(\underline{Z})$ est **la transmittance en Z du système en boucle ouverte.**

Il vient alors

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \underline{T}(\underline{Z})\underline{E}(\underline{Z}) = \underline{T}(\underline{Z})[\underline{N}_C(\underline{Z}) - \underline{S}(\underline{Z})]$$

soit $\dfrac{\underline{S}(\underline{Z})}{\underline{N}_C(\underline{Z})} = \dfrac{\underline{T}(\underline{Z})}{1 + \underline{T}(\underline{Z})}$.

La condition générale de stabilité d'un système échantillonné conduit à la propriété suivante :

La stabilité du système en boucle fermée impose que tous les zéros en $\underline{Z}$ de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$ aient un module inférieur à 1.

2.4. CRITÈRE DE JURY

Ce critère, basé sur l'étude des polynomes, permet de prévoir, par l'analyse des coefficients, si le module des racines est inférieur à 1. Nous le donnerons sans démonstration pour des polynômes d'ordre 2 et d'ordre 3, en appelant $\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})]$ le polynôme numérateur de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$.

— ***Degré 2 :***

$\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = a_2\underline{Z}^2 + a_1\underline{Z} + a_0$ avec $a_2 > 0$.

La stabilité impose les conditions suivantes :

$a_0 < a_2$; $a_0 + a_1 + a_2 > 0$; $a_0 - a_1 + a_2 > 0$.

— ***Degré 3 :***

$\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = a_3\underline{Z}^3 + a_2\underline{Z}^2 + a_1\underline{Z} + a_0$

avec $a_3 > 0$.

La stabilité impose les conditions suivantes :

- $|a_0| < a_3$
- $a_0^2 - a_3^2 < a_0a_2 - a_1a_3$
- $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$
- $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 < 0$

Exemple d'application

Considérons l'asservissement de vitesse de la figure 2 décrit par le schéma bloc de la figure 4.

La transmittance de la partie non échantillonnée s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = A[1 - e^{-\underline{P}T_e}] \cdot \frac{1}{\underline{P}} \cdot \frac{H_0}{1 + 2m\dfrac{\underline{P}}{\omega_m} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_m^2}}$$

avec $H_0 = 1$; $m = 1{,}82$; $\omega_m = 91{,}4$ rad/s; période d'échantillonnage $T_e = 5$ ms.

En faisant apparaître les pôles de $\underline{T}(\underline{P})$, il vient :

$$\underline{T}(\underline{P}) = A[1 - e^{-\underline{P}T_e}] \frac{H_0\omega_1\omega_2}{(\underline{P} + \omega_1)(\underline{P} + \omega_2)\underline{P}}$$

avec $\omega_1 = 27{,}4$ rad/s et $\omega_2 = 305$ rad/s.

$$= A[1 - e^{-\underline{P}T_e}]\left[\frac{A_0}{\underline{P}} + \frac{A_1}{\underline{P} + \omega_1} + \frac{A_2}{\underline{P} + \omega_2}\right]$$

avec $\begin{cases} A_0 = H_0 = 1 \\ A_1 = \dfrac{H_0\omega_2}{(\omega_1 - \omega_2)} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \\ A_2 = \dfrac{H_0\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \end{cases}$

sachant $\dfrac{1}{\underline{P} + a}$ est la transformée de Laplace de e^{at} à laquelle correspond la transformée en Z $\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{aT_e}}$, il vient

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A(1 - \underline{Z}^{-1})\left[\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - 1} + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e}} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e}}\right]$$

$$= A\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e})(\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e}) - \omega_2(\underline{Z} - 1)(\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e}) + \omega_1(\underline{Z} - 1)(\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e})}{(\omega_2 - \omega_1)(\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e})(\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e})}\right]$$

les termes en $\underline{Z}^2$ s'éliminant au numérateur, $\underline{T}(\underline{Z})$ s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A\frac{\underline{Z}[(\omega_2 - \omega_1)(-e^{-\omega_1 T_e} - e^{-\omega_2 T_e}) + \omega_2(1 + e^{-\omega_2 T_e}) - \omega_1(1 + e^{-\omega_1 T_e})] + (\omega_2 - \omega_1)e^{-(\omega_1 + \omega_2)T_e} - \omega_2 e^{-\omega_2 T_e} + \omega_1 e^{-\omega_1 T_e}}{(\omega_2 - \omega_1)(\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e})(\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e})}$$

$$= A\frac{\underline{Z}[\omega_2 - \omega_1 + \omega_1 e^{-\omega_2 T_e} - \omega_2 e^{-\omega_1 T_e}] + (\omega_2 - \omega_1)e^{-(\omega_1 + \omega_2)T_e} - \omega_2 e^{-\omega_2 T_e} + \omega_1 e^{-\omega_1 T_e}}{(\omega_2 - \omega_1)(\underline{Z} - e^{-\omega_2 T_e})(\underline{Z} - e^{-\omega_1 T_e})}$$

ou en valeurs numériques,

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A\,\frac{17{,}61\underline{Z} + 10{,}19}{277{,}6\underline{Z}^2 - 302{,}5\underline{Z} + 52{,}68}$$
$$= A\,\frac{17{,}61\underline{Z} + 10{,}19}{277{,}6(\underline{Z} - 0{,}217\,6)(\underline{Z} - 0{,}872\,0)}.$$

Le numérateur $\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})]$ de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$ s'écrit

$$\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})]$$
$$= 277{,}6\underline{Z}^2 - 302{,}5\underline{Z} + 52{,}68 + A(17{,}61\underline{Z} + 10{,}19)$$
$$= 277{,}6\underline{Z}^2 + \underline{Z}(17{,}61A - 302{,}5) + 52{,}68 + 10{,}19A.$$

C'est un polynome de degré 2. L'étude de la stabilité par le critère de jury conduit aux conditions :

- $a_0 = 52{,}68 + 10{,}19A < a_2 = 277{,}6$ soit $A < 22$;
- $a_0 + a_1 + a_2 = 277{,}6 - 302{,}5 + 52{,}68 + A(10{,}19 + 17{,}61) > 0$

condition satisfaite quel que soit $A > 0$;

- $a_0 - a_1 + a_2 = 277{,}6 + 302{,}5 + 52{,}68 + A(10{,}19 - 17{,}61) > 0$ soit $A < 85{,}3$.

Au total la stabilité du système impose $\underline{A < 22}$.

Nous pouvons remarquer que ce résultat n'est pas très éloigné de celui que donne l'approximation harmonique ($A < 20$) et ce, bien que la fréquence d'échantillonnage $\left(F_e = \dfrac{1}{0{,}005} = 200\text{ Hz}\right)$ ne soit pas très grande par rapport à la fréquence centrale de $\underline{H}(\underline{P})$ $\left(f_m = \dfrac{\omega_m}{2\pi} = \dfrac{91{,}4}{2\pi} = 14{,}5\text{ Hz}\right)$.

2.5. ANALYSE PAR LE LIEU DES RACINES

Cette méthode consiste à tracer dans le plan complexe, l'évolution, en fonction du paramètre A, des racines de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$.

Si l'ordre du numérateur $\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})]$ de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$ est inférieur ou égal à 2, le lieu peut être obtenu analytiquement. Dans le cas contraire, il est toujours possible de faire appel à des programmes utilitaires.

Exemple d'application

Reprenons l'asservissement de vitesse précédent pour lequel nous avons établi :

$$\underline{N}[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = 277{,}6\underline{Z}^2 + \underline{Z}(17{,}61A - 302{,}5) + 52{,}68 + 10{,}19A.$$

Il s'agit d'un polynome de degré 2 dont les racines s'écrivent

$$\left.\begin{matrix}\underline{Z}_1\\ \underline{Z}_2\end{matrix}\right\} = \frac{302{,}5 - 17{,}61A \pm \sqrt{(17{,}61A - 302{,}5)^2 - 4 \times 277{,}6(52{,}68 + 10{,}19A)}}{2 \times 277{,}6}.$$

Le tracé par ordinateur de l'évolution des racines $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en fonction de A est donné à la figure 11.

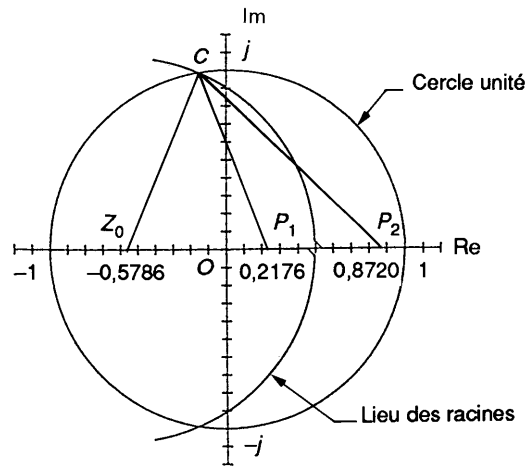


Fig. 11

Le système est stable en boucle fermée tant que le lieu des racines reste à l'intérieur du cercle de rayon unité, garantissant ainsi que le module des racines est bien inférieur à 1.

En tout point du lieu des racines on peut écrire $1 + \underline{T}(\underline{Z}) = 0$, soit en module : $|\underline{T}(\underline{Z})| = 1$.

Nous avons établi que $\underline{T}(\underline{Z})$ se met sous la forme :

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A\,\frac{17{,}61(\underline{Z} + 0{,}578\,6)}{277{,}6(\underline{Z} - 0{,}217\,6)(\underline{Z} - 0{,}872\,0)}$$
$$= 0{,}063\,4A\,\frac{\underline{Z} - \underline{z}_0}{(\underline{Z} - \underline{z}_1)(\underline{Z} - \underline{z}_2)}.$$

Soient (*fig.* 11)

Z_0 le point d'abscisse $z_0 = -0{,}578\,6$,
P_1 le point d'abscisse $z_1 = 0{,}217\,6$,
P_2 le point d'abscisse $z_2 = 0{,}872\,0$.

Au point C, pour lequel le lieu des racines coupe le cercle de rayon 1, la condition $|\underline{T}(\underline{Z})| = 1$ se traduit par

$$0{,}063\,4A\,\frac{CZ_0}{CP_1 \,.\, CP_2} = 1.$$

Sur le graphe de la figure 11, on relève

$CZ_0 = 1{,}08$; $CP_1 = 1{,}07$; $CP_2 = 1{,}42$.

Il est ainsi possible d'en déduire la valeur limite de A par $A < \dfrac{CP_1 \,.\, CP_2}{0{,}063\,4 CZ_0}$

soit $\quad A = \dfrac{1{,}07 \times 1{,}42}{0{,}063\,4 \times 1{,}08} = 22{,}2.$

Compte tenu des erreurs de mesure sur les longueurs des segments, ce résultat est tout à fait comparable à celui obtenu par le critère de Jury.

2.6. CRITÈRE DE NYQUIST

$\underline{T}(\underline{Z})$ étant la transmittance en Z en boucle ouverte, nous venons d'établir que le système est stable en boucle fermée si les racines en $\underline{Z}$ de $1 + \underline{T}(\underline{Z})$ ont un module inférieur à 1.

Effectuons le changement de variables $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\underline{P}T_e}$. Si la variable complexe $\underline{P}$ s'écrit $a + \mathrm{j}b$, $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\underline{P}T_e}$ s'écrit $\underline{Z} = \mathrm{e}^{aT_e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}bT_e}$. Le module de $\underline{Z}$ est égal à e^{aT_e} (avec a = partie réelle de $\underline{P}$), et il est inférieur à un si a est négatif.

Le changement de variables $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\underline{P}T_e}$ conduit donc à l'énoncé suivant :

« Le système est stable en boucle fermée si les racines en $\underline{P}$ de $1 + \underline{T}(\underline{P})$ ont une partie réelle négative ».

Nous retrouvons ainsi la condition de stabilité énoncée dans l'étude des asservissements analogiques. Partant de là, nous pouvons appliquer au système le critère de Nyquist :

« Le diagramme de Nyquist est tracé en représentant l'évolution du point image de $\underline{T}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P} = \mathrm{j}\omega$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe imaginaire. Le système est stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist n'entoure pas le point -1 ».

À partir de cet énoncé, et compte tenu des changements de variables $\underline{P} = \mathrm{j}\omega$ et

$$\underline{Z} = \mathrm{e}^{\underline{P}T_e} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e},$$

le critère de Nyquist s'énonce ainsi sur les transmittances en Z :

Le diagramme de Nyquist est tracé en représentant l'évolution du point image de la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{Z})$ lorsque le point image de $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}$ se déplace sur le cercle unité. Le système est stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist n'entoure pas le point -1.

REMARQUES

1. *La variable $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}$ est périodique de période $\omega = \dfrac{2\pi}{T_e}$. Pour décrire le diagramme de Nyquist, il suffit de faire varier ω de 0 à $\dfrac{2\pi}{T_e}$.*

2. *A partir de l'expression de $\underline{T}(\underline{Z})$ et compte tenu de $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e} = \cos \omega T_e + \mathrm{j} \sin \omega T_e$, il est possible d'obtenir le tracé du diagramme de Nyquist par ordinateur.*

Exemple d'application

Reprenons l'asservissement de vitesse précédent pour lequel nous avons établi

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A \frac{17{,}61(\underline{Z} + 0{,}578\,6)}{277{,}6(\underline{Z} - 0{,}217\,6)(\underline{Z} - 0{,}872\,0)}.$$

En posant $\underline{Z} = \cos \omega T_e + \mathrm{j} \sin \omega T_e$, il vient :

$$\underline{T}(\omega) = A \times 0{,}063\,4 \frac{\cos \omega T_e + 0{,}578\,6 + \mathrm{j} \sin \omega T_e}{(\cos \omega T_e - 0{,}217\,6 + \mathrm{j} \sin \omega T_e)(\cos \omega T_e - 0{,}872\,0 + \mathrm{j} \sin \omega T_e)}$$

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{|\underline{T}(\omega)|}{A} = \dfrac{\sqrt{1 + (0{,}578\,6)^2 + 2 \times 0{,}578\,6 \cos \omega T_e} \times 0{,}063\,4}{\sqrt{1 + (0{,}217\,6)^2 - 2 \times 0{,}217\,6 \cos \omega T_e}\sqrt{1 + (0{,}872\,0)^2 - 2\,.\,0{,}872\,0 \cos \omega T_e}} \\ \arg[\underline{T}(\omega)] = \arctan \dfrac{\sin \omega T_e}{\cos \omega T_e + 0{,}578\,6} - \arctan \dfrac{\sin \omega T_e}{\cos \omega T_e - 0{,}217\,6} - \arctan \dfrac{\sin \omega T_e}{\cos \omega T_e - 0{,}872}. \end{cases}$$

Le diagramme de Nyquist est obtenu en traçant l'évolution dans le plan complexe du point de coordonnées :

$$x = \frac{|\underline{T}(\omega)|}{A} \cos [\arg \underline{T}(\omega)],$$

$$y = \frac{|\underline{T}(\omega)|}{A} \sin [\arg \underline{T}(\omega)].$$

Le programme 1 permet d'obtenir le tracé du diagramme (il tient compte de l'indétermination du calculateur pour le calcul des arc tangente).

```
10 SCALE -.15, .05,-.2, 2
20 XAXIS 0,.01
30 YAXIS 0,.01
40 FOR N=0 TO 2*PI STEP .05
50 M1=.0634*(1+.5786^2+2*.5786*
   COS(N))^.5
60 M2=(1+.2176^2-2*.2176*COS(N)
   )^.5
70 M3=(1+.872^2-2*.872*COS(N))^
   .5
80 M=M1/(M2*M3)
90 O1=ATN(SIN(N)/(COS(N)+.5786)
   )
100 O2=ATN(SIN(N)/(COS(N)-.2176)
   )
110 O3=ATN(SIN(N)/(COS(N)-.872))
120 IF COS(N)+.5786>0 THEN E1=O1
    ELSE E1=PI+O1
130 IF COS(N)-.2176>0 THEN E2=O2
    ELSE E2=PI+O2
140 IF COS(N)-.872>0 THEN E3=O3
    ELSE E3=PI+O3
150 E=E1-E2-E3
160 PLOT M*COS(E),M*SIN(E)
170 NEXT N
180 END
```

PROGRAMME 1

La courbe obtenue est donnée figure 12. Sur l'agrandissement (au voisinage du point C) de la figure 13, on relève l'abscisse du point extrême C pour lequel le diagramme de Nyquist coupe l'axe réel : $\overline{OC} = -0{,}045$.

L'amplification A fait subir au diagramme de Nyquist une homothétie de centre O et de rapport A. La stabilité en boucle fermée impose :

$$A \cdot \overline{OC} > -1; \quad \text{soit} \quad A < \frac{1}{0{,}045} = 22{,}2.$$

Ce résultat est tout-à-fait comparable à celui obtenu par les méthodes précédentes.

TRACÉ EXPÉRIMENTAL DU DIAGRAMME DE NYQUIST

Première méthode expérimentale

Nous avons vu, lors de l'étude des asservissements analogiques, que le diagramme de Nyquist peut être obtenu expérimentalement par l'étude du système en boucle ouverte, en régime harmonique ($\underline{P} = j\omega$ variant de 0 à l'infini sur l'axe imaginaire).

Considérons le schéma de principe rappelé à la figure 14.

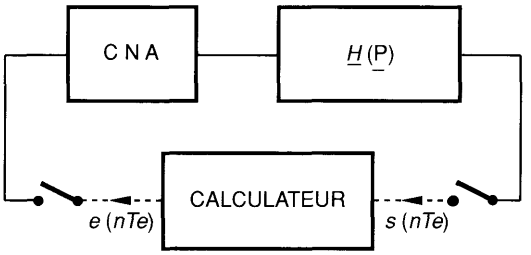


Fig. 14

L'étude expérimentale *en régime harmonique* pose les problèmes suivants :

- Le calculateur doit délivrer une suite d'échantillons correspondant à une sinusoïde d'amplitude unité et de pulsation ω. Afin que le régime permanent puisse s'établir, **la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ doit être**

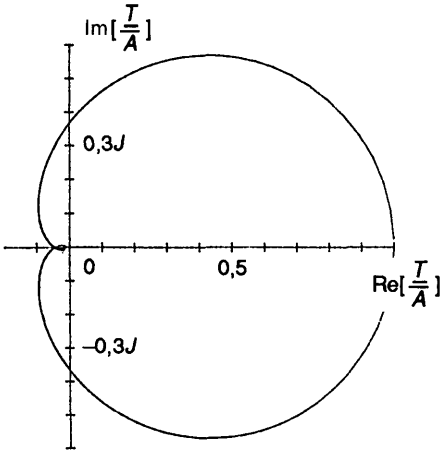


Fig. 12

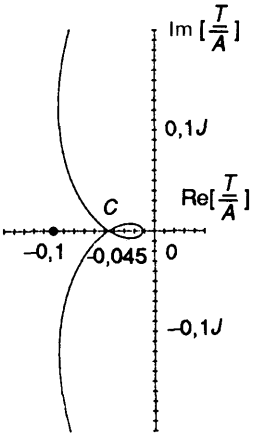


Fig. 13

un diviseur de la fréquence d'échantillonnage F_e.

- Le calculateur mesure, par échantillonnage, $s(nT_e)$, le signal de sortie $s(t)$ **après avoir attendu que le régime permanent de pulsation ω se soit établi.**
- À partir des échantillons $s(nT_e)$, le calculateur établit la transmittance $\underline{T}(\omega)$ puis passe à la pulsation suivante.

Deuxième méthode : utilisation de la F.F.T.

La méthode précédente paraît relativement lente. Une méthode plus rapide peut être élaborée, à partir de la propriété qui a été précédemment établie : « la transmittance en Z d'un système est la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle ($\underline{T}(\underline{Z}) = \underline{I}(\underline{Z})$) ». On procède alors de la manière suivante :

- Le calculateur délivre une *impulsion* en entrée : $e(nT_e) = 1$ pour $n = 0$,
  $= 0$ pour $n \neq 0$.
- Le calculateur échantillonne la sortie et mémorise les échantillons :
  $s(0), s(T_e), \ldots s(nT_e) \ldots$
- À partir des échantillons $s(nT_e)$, le calculateur détermine la transformée en Z

$$\underline{S}(\underline{Z}) = \underline{I}(\underline{Z}) = \underline{T}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e)\underline{Z}^{-n}.$$

Sachant que le diagramme de Nyquist est obtenu en faisant varier $\underline{Z}$ sur le cercle unité ($\underline{Z} = e^{j\omega T_e}$), il vient :

$$\underline{T}(\underline{Z} = e^{j\omega T_e}) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e)\, e^{-j2\pi nfT_e} = \underline{T}(f).$$

Si l'on choisit de balayer le diagramme de Nyquist avec un pas de fréquence $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{NT_e}$ où N est un nombre entier, l'expression de $\underline{T}(f)$, pour la fréquence $k\,\Delta f$, s'écrit :

$$\underline{T}(k\,\Delta f) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e)\, e^{-2\pi jnk\Delta fT_e}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

Si le système est stable en boucle ouverte, la réponse impulsionnelle disparaît au cours du temps et le nombre N peut être choisi suffisamment grand pour que $s(nT_e)$ soit pratiquement nul pour $n \geqslant N$. La formule précédente peut ainsi être approximée par

$$\underline{T}_0(k\,\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

Cette dernière formule est celle d'une F.F.T. (voir tome 1, chapitre 3) et les valeurs de $\underline{T}_0(k\,\Delta f)$ peuvent être déterminées rapidement par un algorithme spécialisé.

N est une puissance de 2. On obtient des résultats satisfaisants avec $N = 128$. (On considère ainsi que la réponse impulsionnelle est nulle après 128 périodes d'échantillonnage.)

À l'aide de l'algorithme de F.F.T., et à partir d'une seule réponse impulsionnelle sur laquelle il a prélevé N échantillons, le calculateur détermine N points du diagramme de Nyquist. En langage assembleur, le temps de calcul d'une F.F.T. sur 128 points est de l'ordre du dixième de seconde. Il est ainsi possible de visualiser expérimentalement l'évolution du diagramme de Nyquist en fonction d'un des paramètres de réglage de la boucle.

Connaissant l'expression de $\underline{T}(\underline{Z})$, il est possible de simuler sur ordinateur, l'opération précédente. Cette simulation est en fait une deuxième méthode de tracé du diagramme de Nyquist à partir de l'expression de $\underline{T}(\underline{Z})$. Revenons sur l'asservissement de vitesse de la figure 2, pour lequel nous avons établi

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A\,\frac{17{,}61\underline{Z} + 10{,}19}{277{,}6\underline{Z}^2 - 302{,}5\underline{Z} + 52{,}68}$$

à partir de la transmittance de Laplace

$$\underline{T}(\underline{P}) = A[1 - e^{-\underline{P}T_e}]\left[\frac{A_0}{\underline{P}} + \frac{A_1}{\underline{P} + \omega_1} + \frac{A_2}{\underline{P} + \omega_2}\right]$$

avec $\omega_1 = 27{,}4$ rad/s; $\omega_2 = 305$ rad/s, il vient

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = -1{,}099,$$

$$A_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = 0{,}098\,7.$$

À partir de $\begin{cases} \underline{S}(\underline{P}) = \underline{T}(\underline{P})\underline{E}(\underline{P}) \\ \underline{E}(\underline{P}) = 1. \end{cases}$

La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle s'écrit :

$$\underline{S}(\underline{P}) = A[1 - e^{-\underline{P}T_e}]$$
$$\left[\frac{1}{\underline{P}} + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\cdot\frac{1}{\underline{P} + \omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\cdot\frac{1}{\underline{P} + \omega_2}\right]$$

Appelons

$$r(t) = 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\, e^{-\omega_1 t} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\, e^{-\omega_2 t},$$

l'originale de

$$\underline{R}(\underline{P}) = \frac{1}{\underline{P}} + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\cdot\frac{1}{\underline{P} + \omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\cdot\frac{1}{\underline{P} + \omega_2}.$$

$s(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} s(t) = Ar(t) & \text{pour} \quad t < T_e \\ s(t) = A[r(t) - r(t - T_e)] & \text{pour} \quad t \geqslant T_e \end{cases}$$

soit, pour $t \geqslant T_e$

$$s(t) = A\left[\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}(e^{-\omega_1 t} - e^{-\omega_1(t-T_e)}) + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}(e^{-\omega_2 t} - e^{-\omega_2(t-T_e)})\right]$$

$$\frac{s(t)}{A} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}(1 - e^{\omega_1 T_e})\, e^{-\omega_1 t} + \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}(1 - e^{\omega_2 T_e})\, e^{-\omega_2 t},$$

où en valeurs numériques avec $\omega_1 = 27{,}4$ rad/s, $\omega_2 = 305$ rad/s, $T_e = 5$ ms

$$\frac{s(t)}{A} = 0{,}161\, e^{-27{,}4t} - 0{,}355\, e^{-305t}.$$

Les échantillons $\frac{s(nT_e)}{A}$ prélevés, avec la période T_e, sur la réponse impulsionnelle s'écrivent :

- $s(0) = 0$
- $\frac{s(nT_e)}{A} = 0{,}161\, e^{-27{,}4T_e n} - 0{,}355\, e^{-305T_e n}$
  $= 0{,}161\, e^{-0{,}137n} - 0{,}355\, e^{-1{,}525n}.$

Le programme 2 permet ainsi de tracer le diagramme de Nyquist (*fig.* 15 et 16). Les courbes obtenues sont identiques à celles des figures 12 et 13.

Dans le programme 2, les lignes 60 à 95 correspondent au chargement des échantillons.

```
 10 DIM R(127),I(127),C(127),S(1
    27)
 20 FOR N=0 TO 63
 30 C(N)=COS(2*PI*N/128)
 40 S(N)=SIN(2*PI*N/128)
 50 NEXT N
 60 FOR N=0 TO 127
 70 R(N)=.1613*EXP(-.137*N)-.355
    *EXP(-1.525*N)
 80 I(N)=0
 90 NEXT N
 95 R(0)=0
100 BEEP @ K=0
110 FOR J=0 TO 127
120 I=2
130 IF K<128/I THEN 150
140 K=K-128/I @ I=I+I @ GOTO 130
150 K=K+128/I
160 IF K<=J THEN 180
170 A=R(J+1) @ R(J+1)=R(K) @ R(K
    )=A
180 NEXT J
190 BEEP
200 P1=7 @ G=.5 @ L=128
210 FOR I=1 TO P1
220 G=G+G
230 L=L/2
240 M=0
250 FOR R=0 TO G-1
260 FOR J=R TO 127 STEP G+G
270 K=J+G
280 A=C(M)*R(K)+S(M)*I(K)
290 B=C(M)*I(K)-S(M)*R(K)
300 R(K)=R(J)-A
310 I(K)=I(J)-B
320 R(J)=R(J)+A
330 I(J)=I(J)+B
340 NEXT J
350 M=M+L
360 NEXT R
370 NEXT I
380 SCALE -.2,1,-.6,.6
390 XAXIS 0,.1
400 YAXIS 0,.1
410 FOR N=0 TO 127
420 Y=I(N) @ X=R(N)
430 PLOT X,Y
440 NEXT N
450 COPY
460 END
```

PROGRAMME 2

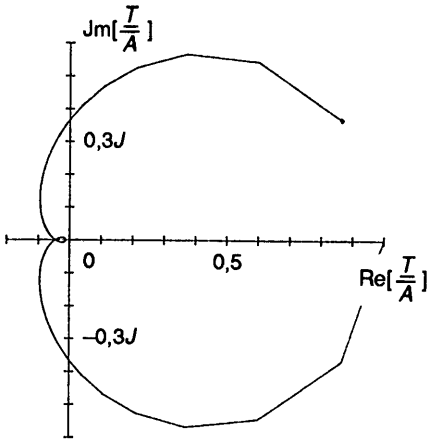


Fig. 15

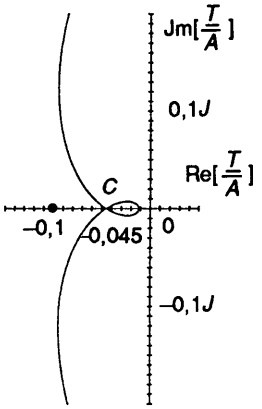


Fig. 16

REMARQUE

La valeur numérique des échantillons aurait pu être obtenue à partir de

$$\frac{\underline{T}(\underline{Z})}{A} = \frac{17{,}61\underline{Z} + 10{,}19}{277{,}6\underline{Z}^2 - 302{,}5\underline{Z} + 52{,}68},$$

en effectuant une division suivant les puissances croissantes de $\underline{Z}^{-1}$, *on obtient*

$$\frac{\underline{T}(\underline{Z})}{A} = \frac{\underline{S}(\underline{Z})}{A} = \underline{S}'(\underline{Z}) = 0{,}0634\underline{Z}^{-1} + 0{,}106\underline{Z}^{-2} + 0{,}103\underline{Z}^{-3} + 0{,}092\underline{Z}^{-4} + \ldots$$

d'où l'on tire, par identification avec

$$\underline{S}'(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} s'(nT_e)\underline{Z}^{-n},$$

la valeur des échantillons $s'(0) = 0$; $s'(T_e) = 0{,}0634$; $s'(2T_e) = 0{,}106$; $s'(3T_e) = 0{,}103$; $s'(4T_e) = 0{,}092 \ldots$

3. PRÉCISION

Soit le système décrit par le schéma bloc de la figure 17.

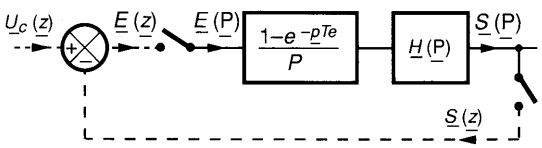


Fig. 17

L'erreur est définie par la valeur, en régime permanent, de la différence entre la grandeur de commande u_C et la grandeur de retour s.

En utilisant le théorème de la valeur finale,

$$(\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{\underline{Z}\to 1} [1 - \underline{Z}^{-1}]\underline{E}(\underline{Z})),$$

cette erreur peut être calculée à partir des transformées en Z.

Soit $\underline{T}(\underline{Z})$ la transmittance en Z du système en boucle ouverte. A partir des équations

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{Z}) = \underline{U}_C(\underline{Z}) - \underline{S}(\underline{Z}) \\ \underline{S}(\underline{Z}) = \underline{T}(\underline{Z})\underline{E}(\underline{Z}) \end{cases}$$

il vient : $\underline{E}(\underline{Z})[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = \underline{U}_C(\underline{Z})$,

soit $\underline{E}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{U}_C(\underline{Z})}{1 + \underline{T}(\underline{Z})}$.

L'erreur s'écrit donc

$$\varepsilon = \lim_{\underline{Z}\to 1} \frac{(1 - \underline{Z}^{-1})\underline{U}_C(\underline{Z})}{1 + \underline{T}(\underline{Z})}.$$

Elle dépend :

- de la nature du signal de commande u_C;
- de la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{Z})$: nous supposerons que $\underline{T}(\underline{Z})$ s'écrit sous la forme

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{A}{(1 - \underline{Z}^{-1})^n} \frac{\underline{N}(\underline{Z})}{\underline{D}(\underline{Z})}.$$

n : nombre de pôles de $\underline{T}(\underline{Z})$ égaux à 1, **est le type de l'asservissement.**

Suivant la nature de u_C, nous distinguerons les erreurs qui vont suivre.

3.1. ERREUR DE POSITION ε_P

u_C est un échelon dont la transformée en Z est

$$\underline{U}_C(\underline{Z}) = \frac{1}{1 - \underline{Z}^{-1}}.$$

L'erreur de position s'écrit :

$$\varepsilon_P = \lim_{\underline{Z}\to 1} \frac{1}{1 + \underline{T}(\underline{Z})}.$$

- Pour un système de type 0, $\lim_{\underline{Z}\to 1} \underline{T}(\underline{Z}) = \dfrac{A\underline{N}(1)}{\underline{D}(1)}$ et $\varepsilon_P = \dfrac{\underline{D}(1)}{\underline{D}(1) + A\underline{N}(1)}$. L'erreur ε_P est non nulle et d'autant plus faible que A est plus grand.
- Pour un système de type supérieur ou égal à 1, la limite de $\underline{T}(\underline{Z})$, lorsque $\underline{Z}$ tend vers 1, est infinie et l'erreur de position est nulle.

3.2. ERREUR DE TRAINAGE ε_T

u_C est une rampe dont la transformée en Z est $\dfrac{\underline{Z}^{-1}T_e}{(1 - \underline{Z}^{-1})^2}$. L'erreur de trainage s'écrit

$$\varepsilon_T = \lim_{\underline{Z}\to 1} \frac{\underline{Z}^{-1}T_e}{(1 - \underline{Z}^{-1})[1 + \underline{T}(\underline{Z})]}.$$

- Pour un système de type 0,

$$\lim_{\underline{Z}\to 1} (1 - \underline{Z}^{-1})[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = 0.$$

L'erreur de traînage ε_T est infinie.

- Pour un système de type 1,

$$\lim_{\underline{Z}\to 1} (1 - \underline{Z}^{-1})[1 + \underline{T}(\underline{Z})] = \frac{A\underline{N}(1)}{\underline{D}(1)}$$

et l'erreur de traînage s'écrit : $\varepsilon_T = \dfrac{T_e \underline{D}(1)}{A\underline{N}(1)}$.

- Pour un système de type supérieur ou égal à 2,

$$\lim_{\underline{Z}\to 1} [1 - \underline{Z}^{-1}][1 + \underline{T}(\underline{Z})] = \infty$$

et l'erreur de traînage est nulle

Les résultats précédents peuvent être résumés dans le tableau suivant.

Type	Erreur de position ε_P	Erreur de traînage ε_T	Erreur en accélération ε_a
0	$\dfrac{\underline{D}(1)}{\underline{D}(1) + A\underline{N}(1)}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{T_e \underline{D}(1)}{A\underline{N}(1)}$	∞
2	0	0	$\dfrac{T_e^2 \underline{D}(1)}{A\underline{N}(1)}$

Il apparaît, comme pour les asservissements analogiques, que l'erreur est d'autant plus faible que l'amplification est plus grande. Pour les asservissements numériques, il apparaît un facteur supplémentaire : la période d'échantillonnage T_e. Les erreurs ε_T et ε_a sont d'autant plus faibles que la fréquence d'échantillonnage est plus élevée, alors que l'erreur de position ε_P ne dépend pas de T_e. Ces résultats étaient prévisibles dans la mesure où ε_P apparaissant lorsque le signal de commande est un échelon d'amplitude constante, il n'est pas nécessaire que le système dispose d'informations rapprochées sur le signal de commande pour élaborer le signal de sortie, en régime permanent.

3.3. EXEMPLE D'APPLICATION

Reprenons l'asservissement de vitesse précédent pour lequel nous avons établi :

$$\underline{T}(\underline{Z}) = A \frac{17{,}61\underline{Z} + 10{,}19}{277{,}6\underline{Z}^2 - 302{,}5\underline{Z} + 52{,}68}.$$

Calculons l'erreur de position :

$$\varepsilon_P = \lim_{\underline{Z}\to 1} \frac{1}{1 + \underline{T}(\underline{Z})} = \frac{1}{1 + A}.$$

Sachant que la stabilité du système impose $A < 22$, il n'est pas possible de ramener l'erreur de position ε_P à une valeur suffisamment faible. Comme pour les asservissements analogiques, **stabilité et précision sont deux exigences contradictoires.**

4. CORRECTION

Revenons sur l'asservissement de vitesse qui nous a servi de support pour cette étude et dont le schéma bloc est rappelé à la figure 18.

4.1. ÉTUDE QUALITATIVE

Jusqu'à présent, nous avons demandé au calculateur d'effectuer l'opération

$$e(nT_e) = A[u_C(nT_e) - \Omega(nT_e)],$$

qui se traduit sur la transformée en Z par

$$\underline{E}(\underline{Z}) = A[\underline{U}_C(\underline{Z}) - \underline{\Omega}(\underline{Z})]$$

et qui est représentée sur le schéma bloc par la mise en cascade d'un bloc de transmittance A.

Pour un signal d'entrée en échelon ($u_C(nT_e) = U_0$ pour $n \geqslant 0$), l'équation

$$e(nT_e) = A[u_C(nT_e) - \Omega(nT_e)]$$

conduit à une erreur de position non nulle, dans la mesure où l'attaque de la chaîne directe nécessite un signal $\underline{E}(\underline{P})$ non nul.

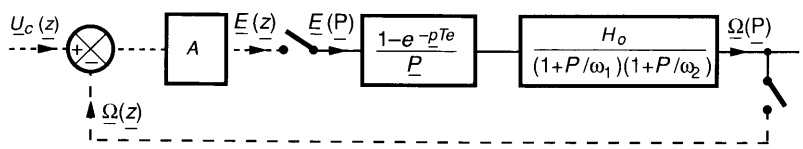


Fig. 18

Proposons-nous de déterminer la forme de l'opération que doit réaliser le calculateur de façon à annuler l'erreur de position.

Au lieu de générer un signal proportionnel à la différence $u_C(nT_e) - \Omega(nT_e)$, on peut envisager d'incrémenter $e(nT_e)$ de la différence entre l'échantillon de commande $u_C(nT_e)$ et l'échantillon de sortie $\Omega(nT_e)$ soit :

$$e(nT_e) = e[(n-1)T_e] + u_C(nT_e) - \Omega(nT_e).$$

Lorsque le régime permanent est atteint,

$e(nT_e) = e[(n-1)T_e]$ et $u_C(nT_e) = \Omega(nT_e)$:

l'erreur de position est nulle.

Sachant que le passage de l'échantillon d'ordre n, à l'échantillon d'ordre $n-1$ se traduit sur les transformées en Z par une multiplication par $\underline{Z}^{-1}$, l'opération

$$e(nT_e) - e[(n-1)T_e] = u_C(nT_e) - \Omega(nT_e)$$

conduit à

$$\underline{E}(\underline{Z})[1 - \underline{Z}^{-1}] = \underline{U}_C(\underline{Z}) - \underline{\Omega}(\underline{Z}).$$

Cette égalité, représentée par le schéma bloc de la figure 19, conduit à remplacer sur le schéma bloc de la figure 18, le bloc de transmittance A par le correcteur de transmittance

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}-1}.$$

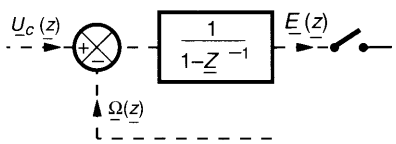


Fig. 19

La transmittance en boucle ouverte devient

$$\underline{T}_C(\underline{Z}) = \underline{D}(\underline{Z})\underline{T}(\underline{Z})/A.$$

Compte tenu des résultats du paragraphe précédent :

$$\underline{T}(\underline{Z})/A = K\frac{(\underline{Z}-z_0)}{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)}$$

avec $K = 0{,}063\,4$;

$z_0 = -0{,}578\,6$, $z_1 = 0{,}217\,6$, $z_2 = 0{,}872\,0$,

il vient : $\underline{T}_C(\underline{Z}) = \dfrac{K(\underline{Z}-z_0)\underline{Z}}{(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)}$.

REMARQUE

Le calcul de l'erreur de position ε_P *par*

$$\varepsilon_P = \lim_{\underline{z}\to 1}\frac{1}{1+\underline{T}_C(\underline{Z})}$$

conduit bien à $\varepsilon_P = 0$, *car la limite de* $\underline{T}_C(\underline{Z})$ *est infinie lorsque* $\underline{Z}$ *tend vers* 1.

4.2. ÉTUDE QUANTITATIVE

A partir des équations

$$\begin{cases} \underline{T}_C(\underline{Z}) = \dfrac{K\underline{Z}(\underline{Z}-z_0)}{(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)} \\ \underline{\Omega}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{T}_C(\underline{Z})}{1+\underline{T}_C(\underline{Z})}\underline{U}_C(\underline{Z}) \end{cases}$$

il vient $\underline{\Omega}(\underline{Z})$

$$= \frac{K(\underline{Z}-z_0)\underline{Z}}{K\underline{Z}(\underline{Z}-z_0)+(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)}\underline{U}_C(\underline{Z}).$$

Compte tenu des valeurs numériques il est possible de simuler la réponse indicielle :

$$\underline{\Omega}(\underline{Z}) = \frac{(K\underline{Z}^2 - Kz_0\underline{Z})\underline{U}_C(\underline{Z})}{\underline{Z}^3 - \underline{Z}^2[1+z_1+z_2-K] + \underline{Z}[z_1z_2+z_1+z_2-Kz_0] - z_1z_2}.$$

Ou, en valeurs numériques :

$$\underline{\Omega}(\underline{Z}) = \frac{0{,}063\,4\underline{Z}^2 + 0{,}036\,7\underline{Z}}{\underline{Z}^3 - \underline{Z}^2 2{,}026 + \underline{Z}1{,}316 - 0{,}189\,7}\underline{U}_C(\underline{Z}),$$

soit

$$\underline{\Omega}(\underline{Z})[1 - 2{,}026\underline{Z}^{-1} + 1{,}316\underline{Z}^{-2} - 0{,}189\,7\underline{Z}^{-3}] = [0{,}063\,4\underline{Z}^{-1} + 0{,}036\,7\underline{Z}^{-2}]\underline{U}_C(\underline{Z}).$$

Cette équation se traduit sur les échantillons par

$$\Omega_n = 2{,}026\Omega_{n-1} - 1{,}316\Omega_{n-2} + 0{,}189\,7\Omega_{n-3} + 0{,}063\,4u_{Cn-1} + 0{,}036\,7u_{Cn-2}.$$

Pour un signal de commande en échelon ($u_{Cn} = 1$, $\forall n \geqslant 0$), le programme 3 permet de simuler la réponse indicielle.

```
10 SCALE 0,50,0.2
20 XAXIS 0,5
30 YAXIS 0,.1
40 A=0
50 B=.0634
60 C=2.026*B+B+.0367
70 PLOT 0,A
80 PLOT 1,B
90 PLOT 2,C
100 FOR N=3 TO 50
110 D=2.026*C-1.316*B+.1897*A+.0
    634+.0367
120 PLOT N,D
130 A=B @ B=C @ C=D
140 NEXT N
150 END
```

PROGRAMME 3

Le tracé fourni par l'ordinateur est donné à la figure 20.

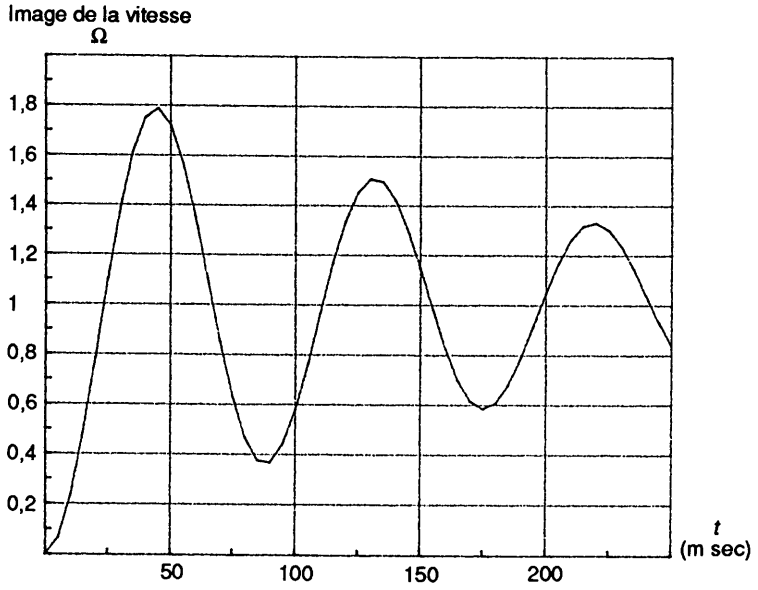


Fig. 20

En pratique, cette réponse indicielle est inacceptable car le régime transitoire est trop faiblement amorti, conduisant ainsi à un dépassement (de l'ordre de 80 %) et à un temps de réponse trop importants.

4.3. OPTIMISATION DU CORRECTEUR

La transmittance du correcteur s'écrivant $\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}-1}$, la transmittance du système corrigé en boucle ouverte s'exprime par

$$\underline{T}_C(\underline{Z}) = \frac{K(\underline{Z})(\underline{Z}-z_0)}{(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)}$$

avec $\begin{cases} z_0 = -0{,}578\,6 \\ z_1 = 0{,}217\,6 \\ z_2 = 0{,}872\,0 \\ K = 0{,}063\,4. \end{cases}$

Proposons-nous, tout en conservant le terme $(\underline{Z}-1)$ qui garantit une erreur de position nulle, de modifier le zéro z_0 et les pôles z_1 et z_2, de façon à améliorer la réponse.

Pour ce faire, la transmittance en Z du correcteur doit être de la forme

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)(\underline{Z}-a)}{(\underline{Z}-z_0)(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)}.$$

REMARQUE

Le degré en $\underline{Z}$ du dénominateur de $\underline{D}(\underline{Z})$ doit être supérieur ou égal au degré en $\underline{Z}$ de son numérateur. Si tel n'était pas le cas $\underline{D}(\underline{Z})$ s'écrirait

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})} = \frac{a_k\underline{Z}^k + a_{k-1}\underline{Z}^{k-1} + \ldots + a_0}{b_m\underline{Z}^m + b_{m-1}\underline{Z}^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_k\underline{Z}^{k-m} + \ldots + a_0\underline{Z}^{-m}}{b^m + b_{m-1}\underline{Z}^{-1} + \ldots b_0\underline{Z}^{-m}}$$

avec $k > m$, c'est-à-dire $k - m > 0$.

L'équation $\underline{Y}(\underline{Z}) = \underline{D}(\underline{Z})\underline{X}(\underline{Z})$ se traduirait, sur les échantillons, par :

$$b_m y_n = -b_{m-1}y_{n-1} - \ldots - b_0 y_{n-m} + a_k x_{n+k-m} + \ldots + a_0 x_{n-m}.$$

Si $k - m$ est positif, $n + k - m$ est supérieur à n et le calcul, à l'instant nT_e, de l'échantillon y_n fait appel à l'échantillon d'entrée x_{n+k-m} qui apparaîtra $(k-m)T_e$ plus tard, ce qui rend le correcteur irréalisable.

La transmittance en Z corrigée s'écrit :

$$\underline{T}_C(\underline{Z}) = \underline{T}(\underline{Z})\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{K(\underline{Z}-z_0)}{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)} \cdot \frac{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)(\underline{Z}-a)}{(\underline{Z}-z_0)(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)} = \frac{K(\underline{Z}-a)}{(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)}.$$

Le problème se ramène ainsi à la détermination des coefficients a et b de manière à obtenir la réponse souhaitée.

La transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{A}_R(\underline{Z}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{Z})}{\underline{U}_C(\underline{Z})} = \frac{\underline{T}_C(\underline{Z})}{1 + \underline{T}_C(\underline{Z})} = \frac{K(\underline{Z} - a)}{(\underline{Z} - 1)(\underline{Z} - b) + K(\underline{Z} - a)};$$

ou encore

$$\underline{A}_R(\underline{Z}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{Z})}{\underline{U}_C(\underline{Z})} = \frac{K\underline{Z}^{-1} - aK\underline{Z}^{-2}}{1 + \underline{Z}^{-1}(K - 1 - b) + (b - aK)\underline{Z}^{-2}}.$$

$\underline{A}_R(\underline{Z})$, transmittance en Z du système bouclé est aussi la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle.

Nous avons vu dans le tome I (chapitre 5) qu'un système dont la transmittance de Laplace est $\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\underline{P}\omega_0 + \underline{P}^2}$, présente une réponse impulsionnelle dont la transformée en Z s'écrit, en posant $\omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$,

$$\frac{\underline{Z}^{-1}X_1 + \underline{Z}^{-2}X_2}{1 - 2\,e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e\underline{Z}^{-1} + e^{-2m\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}}.$$

avec

$$X_1 = 1 - e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right)$$

et

$$X_2 = e^{-m\omega_0 T_e}\left(e^{-m\omega_0 T_e} - \cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right)$$

Par identification avec $\underline{A}_R(\underline{Z})$ il vient :

$$1 - e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right) = K = 0{,}0634,$$

$$2\,e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e = 1 + b - K = b + 0{,}9366,$$

$$e^{-2m\omega_0 T_e} = b - aK = b - 0{,}0634a.$$

REMARQUE

La quatrième équation :

$$e^{-m\omega_0 T_e}\left(e^{-m\omega_0 T_e} - \cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right) = -aK,$$

n'est pas indépendante des équations précédentes (elle peut être obtenue en soustrayant les deux premières équations de la troisième). Elle n'apporte donc aucune information supplémentaire.

Sachant que le système de transmittance

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\underline{p}\omega_0 + \underline{p}^2}$$

présente une réponse indicielle dont le dépassement d dépend de m par $d = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1 - m^2}}}$ déterminons les coefficients a et b de façon à limiter le dépassement (par exemple $d = 20$ %).

A partir de $d = \exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1 - m^2}}\right)$, il vient

$$\frac{\pi m}{\sqrt{1 - m^2}} = \ln\left[\frac{1}{d}\right] = \ln 5 = 1{,}61.$$

Soit

$$m^2\left[1 + \left(\frac{1{,}61}{\pi}\right)^2\right] = \left(\frac{1{,}61}{\pi}\right)^2 \quad \text{où} \quad m = 0{,}456,$$

m étant fixé, l'équation

$$1 - e^{-m\omega_0 T_e}\left[\cos(\omega_0\sqrt{1 - m^2}\,T_e) + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1 - m^2}\,T_e)\right] = K = 0{,}0634$$

impose la valeur de $\omega_0 T_e$.

C'est une équation transcendante, qui ne peut être résolue algébriquement.

La résolution par ordinateur conduit à

$$\omega_0 T_e = 0{,}379.$$

Dès lors, l'équation

$$2\,e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e = 1 + b - K = b + 0{,}9366$$

permet de déterminer $b = 0{,}651$

et l'équation $e^{-2m\omega_0 T_e} = b - aK = b - 0{,}0634a$ permet de déterminer $a = -0{,}893$.

Compte tenu des valeurs numériques de a et de b, la transmittance en Z du système bouclé s'écrit

$$\underline{A}_R(\underline{Z}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{Z})}{\underline{U}_C(\underline{Z})} = \frac{K\underline{Z}^{-1} - aK\underline{Z}^{-2}}{1 + \underline{Z}^{-1}(K - 1 - b) + \underline{Z}^{-2}(b - aK)} = \frac{0{,}0634\underline{Z}^{-1} + 0{,}0566\underline{Z}^{-2}}{1 - 1{,}588\underline{Z}^{-1} + 0{,}708\underline{Z}^{-2}}.$$

Cette équation se traduit sur les échantillons par

$$\Omega_n = 1{,}588\Omega_{n-1} - 0{,}708\Omega_{n-2} + 0{,}0634u_{C(n-1)} + 0{,}0566u_{C(n-2)}$$

La réponse indicielle du système ($u_{Cn} = 1, \forall n \geqslant 0$) peut être simulée sur ordinateur (programme 4).

```
 10 SCALE 0,50,0,2
 20 XAXIS 0,5
 30 YAXIS 0,.1
 40 A=0
 50 B=.0634
 60 PLOT 0,A
 70 PLOT 1,B
 80 FOR N=2 TO 50
 90 C=1.588*B-.708*A+.0634+.0566
100 PLOT N,C
110 A=B @ B=C
120 NEXT N
130 END
```

PROGRAMME 4

La courbe correspondante est donnée à la figure 21. Nous pouvons vérifier qu'elle présente un dépassement de 20 % et une erreur de position nulle.

Algorithme du correcteur

Pour obtenir les résultats précédents, le calculateur doit effectuer un algorithme, correspondant au schéma de la figure 22 avec

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)(\underline{Z}-a)}{(\underline{Z}-z_0)(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)}$$

$$= \frac{1-\underline{Z}^{-1}(a+z_1+z_2)+\underline{Z}^{-2}(az_2+az_1+z_1z_2)-\underline{Z}^{-3}z_1z_2a}{1-\underline{Z}^{-1}(1+b+z_0)+\underline{Z}^{-2}(b+z_0+z_0b)-\underline{Z}^{-3}bz_0}$$

ou, en valeurs numériques,

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{1-0{,}197\underline{Z}^{-1}-0{,}783\underline{Z}^{-2}+0{,}169\underline{Z}^{-3}}{1-1{,}073\underline{Z}^{-1}-0{,}304\underline{Z}^{-2}+0{,}377\underline{Z}^{-3}},$$

cette équation se traduit sur les échantillons par

$$e_n - 1{,}073e_{n-1} - 0{,}304e_{n-2} + 0{,}377e_{n-3} = \varepsilon_n - 0{,}197\varepsilon_{n-1} - 0{,}783\varepsilon_{n-2} + 0{,}169\varepsilon_{n-3}.$$

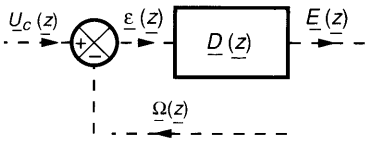


Fig. 22

À chaque instant d'échantillonnage le calculateur détermine ε_n par soustraction, entre le nombre Ω_n, image de la vitesse, et le nombre de consigne u_{Cn}, puis il détermine l'échantillon e_n par

$$e_n = 1{,}073e_{n-1} + 0{,}304e_{n-2} - 0{,}377e_{n-3} + \varepsilon_n - 0{,}197\varepsilon_{n-1} - 0{,}783\varepsilon_{n-2} + 0{,}169\varepsilon_{n-3}.$$

4.4. DIMINUTION DU TEMPS DE RÉPONSE

Un correcteur de la forme

$$\underline{D}(\underline{Z}) = A\frac{(\underline{Z}-z_1)(\underline{Z}-z_2)(\underline{Z}-a)}{(\underline{Z}-z_0)(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)},$$

permet d'augmenter la pulsation propre ω_0 et ainsi de diminuer le temps de réponse. En effet, la transmittance corrigée en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{T}_C(\underline{Z}) = A\frac{(\underline{Z}-a)K}{(\underline{Z}-1)(\underline{Z}-b)}$$

et la transmittance en boucle fermée devient

$$\underline{A}_R(\underline{Z}) = \frac{\underline{T}_C(\underline{Z})}{1+\underline{T}_C(\underline{Z})} = \frac{AK\underline{Z}^{-1}-aAK\underline{Z}^{-2}}{1+\underline{Z}^{-1}(AK-1-b)+\underline{Z}^{-2}(b-aAK)}$$

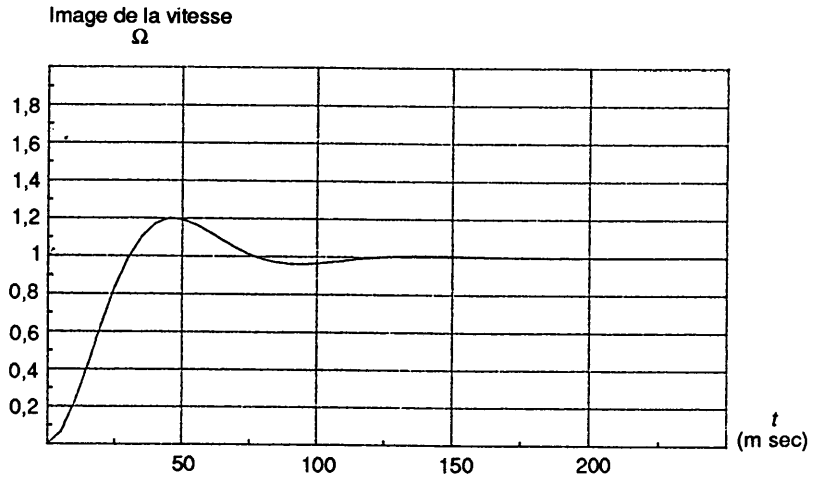


Fig. 21

Par identification avec la réponse impulsionnelle du système du deuxième ordre, il vient (avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$)

$$\begin{cases} e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos \omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin \omega T_e\right) \\ \qquad = 1 - AK = y, \\ 2e^{-m\omega_0 T_e} \cos \omega T_e = 1 + b - AK, \\ e^{-2m\omega_0 T_e} = b - aAK. \end{cases}$$

Pour une valeur donnée de m (par exemple $m = 0{,}456$), *la première équation est une fonction* y de la variable $x = \omega_0 T_e$, dont la représentation est donnée à la figure 23. La valeur de $\omega_0 T_e$ est obtenue par l'abscisse du point pour lequel l'horizontale d'ordonnée $1 - AK$ coupe la courbe.

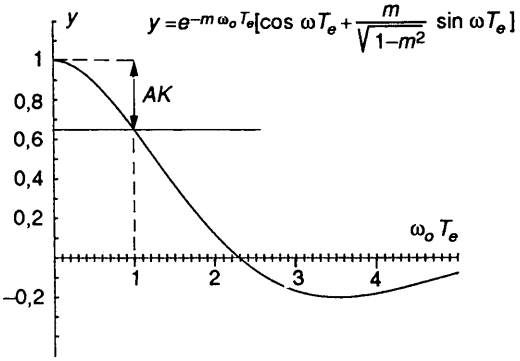


Fig. 23

Ainsi une augmentation de A provoque un accroissement de ω_0 et accélère la réponse.

Il est cependant illusoire de trop vouloir augmenter ω_0. Considérons, en effet, la réponse de la figure 24. Si la période de l'échantillonnage est de l'ordre de $\dfrac{\pi}{\omega_0}$, ($\omega_0 T_e \approx \pi$) la réponse du système physique est susceptible de présenter une forte oscillation sans que le phénomène apparaisse sur les échantillons (ceci étant en liaison avec le théorème de Shannon).

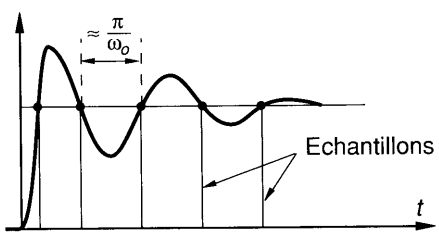


Fig. 24

Si l'on se propose de limiter $\omega_0 T_e$ à $\dfrac{\pi}{3} = 1{,}047$, il vient, pour $m = 0{,}456$;

$$\begin{cases} e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos \omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin \omega T_e\right) \\ \qquad = 1 - AK = 0{,}625, \quad \text{soit } \boldsymbol{A = 5{,}91;} \\ 2e^{-m\omega_0 T_e} \cos \omega T_e = 1 + b - AK = 0{,}740, \\ \qquad \text{soit } \boldsymbol{b = 0{,}115;} \\ e^{-2m\omega_0 T_e} = b - aAK = 0{,}385, \\ \qquad \text{soit } \boldsymbol{a = -0{,}720.} \end{cases}$$

La transmittance en Z en boucle fermée s'écrit

$$\underline{A_R}(\underline{Z}) = \frac{\underline{\Omega}(\underline{Z})}{\underline{U_C}(\underline{Z})} = \frac{AK\underline{Z}^{-1} - aAK\underline{Z}^{-2}}{1 + \underline{Z}^{-1}(AK - 1 - b) + \underline{Z}^{-2}(b - aAK)} = \frac{0{,}375\underline{Z}^{-1} + 0{,}270\underline{Z}^{-2}}{1 - 0{,}740\underline{Z}^{-1} + 0{,}385\underline{Z}^{-2}}$$

équation qui se traduit sur les échantillons par :

$$\Omega_n = 0{,}740\Omega_{n-1} - 0{,}385\Omega_{n-2} + 0{,}375u_{C_{n-1}} + 0{,}270u_{C_{n-2}}.$$

Le programme 5 permet de simuler, sur ordinateur, la réponse indicielle. La courbe correspondante est donnée à la figure 25.

```
 10 SCALE 0,50,0.2
 20 XAXIS 0,5
 30 YAXIS 0,.1
 40 A=0
 50 B=.375
 60 PLOT 0,A
 70 PLOT 1,B
 80 FOR N=2 TO 50
 90 C=.74*B- 385*A+.375+.27
100 PLOT N,C
110 A=B @ B=C
120 NEXT N
130 END
```

PROGRAMME 5

Algorithme du correcteur

Le calculateur doit effectuer un algorithme correspondant au schéma de la figure 22 avec

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{A(\underline{Z} - z_1)(\underline{Z} - z_2)(\underline{Z} - a)}{(\underline{Z} - z_0)(\underline{Z} - 1)(\underline{Z} - b)} = A\frac{1 - \underline{Z}^{-1}(z_1 + z_2 + a) + \underline{Z}^{-2}(az_2 + az_1 + z_1 z_2) - \underline{Z}^{-3} z_1 z_2 a}{1 - \underline{Z}^{-1}(1 + z_0 + b) + \underline{Z}^{2}(b + z_0 + z_0 b) - \underline{Z}^{-3} b z_0}$$

où, compte tenu des valeurs numériques

$$z_0 = -0{,}578\,6; \quad z_1 = 0{,}217\,6; \quad z_2 = 0{,}872\,0;$$
$$A = 5{,}91; \quad a = -0{,}72; \quad b = 0{,}115.$$

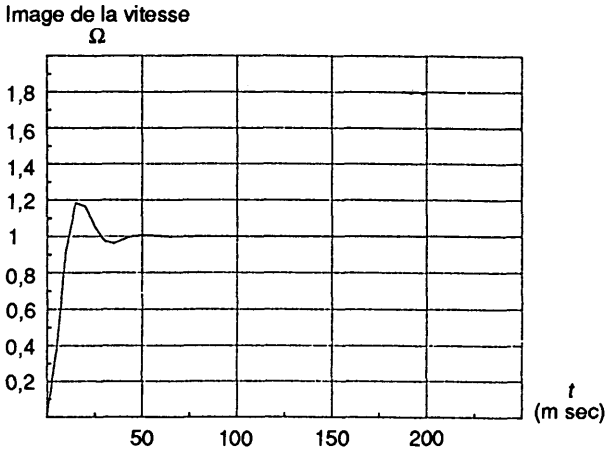


Fig. 25

$$\underline{D}(\underline{Z}) = \frac{\underline{E}(\underline{Z})}{\underline{\mathcal{E}}(\underline{Z})}$$

$$= 5{,}91 \cdot \frac{1 - 0{,}370\underline{Z}^{-1} - 0{,}595\underline{Z}^{-2} + 0{,}137\underline{Z}^{-3}}{1 - 0{,}536\underline{Z}^{-1} - 0{,}530\underline{Z}^{-2} + 0{,}066\underline{Z}^{-3}}$$

Afin de faciliter le cadrage des coefficients, on peut réaliser le gain $A = 5{,}91$ par un amplificateur analogique. La relation entre échantillon est alors donnée par :

$$e_n = 0{,}536e_{n-1} + 0{,}530e_{n-2} - 0{,}066e_{n-3} + \mathcal{E}_n - 0{,}370\mathcal{E}_{n-1} - 0{,}595\mathcal{E}_{n-2} + 0{,}137\mathcal{E}_{n-3}.$$

Le calculateur détermine les $\mathcal{E}_n$ par $\mathcal{E}_n = u_C - \Omega_n$ et calcule e_n à partir de l'équation précédente.

EXERCICES

1. Correcteur d'assiette pour véhicule de tourisme

Le problème porte sur l'analyse d'un système ressort-amortisseur, équipant chaque roue d'une automobile expérimentale et assurant sa suspension.

La liaison élastique entre une roue et la caisse (fonction ressort) est obtenue par compression d'air dans un module de volume variable. C'est une électrovanne, commandée par un système électronique analogique ou numérique, qui injecte plus ou moins d'air dans ce module et en fait alors varier le volume ainsi que la hauteur de la caisse au niveau de la roue. Cette hauteur peut donc être asservie à une consigne.

On se limite à l'étude de la suspension d'une seule roue, supportant une masse fictive égale à une fraction de la masse totale du véhicule.

1° ***Modélisation d'un ressort (fig. 1)***

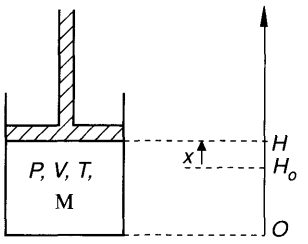


Fig. 1

Un piston de section S comprime de l'air dans un cylindre. On note H la hauteur variable du volume d'air. Cet air est assimilé à un gaz parfait. Sa pression P, son volume V et sa masse $\mathcal{M}$ satisfont, pour une température T que l'on supposera constante, à l'équation : $PV = b_0\mathcal{M}$.

Dans cette expression b_0 est un coefficient numérique de valeur $b_0 = 84$ lorsque $\mathcal{M}$ est exprimée en grammes et les autres grandeurs en unités du Système International.

a) Exprimer en fonction de H et de $\mathcal{M}$ l'intensité de la force F exercée par l'air comprimé sur la face inférieure du piston.

b) Afin de rendre les équations linéaires, on ne considèrera, dans tout le problème, que de petites variations des variables $\mathcal{M}$ et H autour de leurs valeurs moyennes respectives $\mathcal{M}_0$ et H_0. On pose à cet effet $H = H_0 + x$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$.

Sachant qu'une fonction $F(\mathcal{M}, H)$ admet comme développement limité au premier ordre l'expression :

$$F(\mathcal{M}, H) = F(\mathcal{M}_0, H_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}}\right)_{\substack{\mathcal{M}=\mathcal{M}_0 \\ H=H_0}} (\mathcal{M} - \mathcal{M}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{\substack{\mathcal{M}=\mathcal{M}_0 \\ H=H_0}} (H - H_0)$$

où $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}}$ et $\frac{\partial F}{\partial H}$ sont les dérivées partielles de F par rapport, respectivement, à $\mathcal{M}$ et à H, montrer que l'on peut écrire $F = F_0 + b_1 m - b_2 x$.

Calculer les valeurs numériques de F_0, b_1 et b_2 pour $\mathcal{M}_0 = 14{,}3$ g et $H_0 = 0{,}25$ m.

Ces valeurs numériques sont conservées pour toute la suite du problème.

2° ***Étude dynamique du système : masse du véhicule-ressort-amortisseur (fig. 2)***

M_v représente la fraction de la masse du véhicule rapportée à une roue. La masse du piston et celle de l'amortisseur sont négligeables devant M_v.

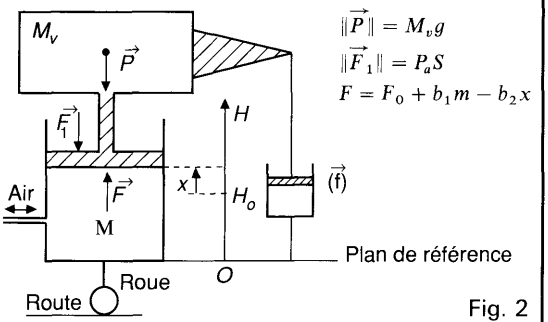


Fig. 2

L'amortisseur introduit une force $\vec{f}$ de frottement visqueux dont la projection sur Ox a pour mesure algébrique

$f = -7{,}0 \times 10^3 \dfrac{dx}{dt}$.

On note P_a la pression atmosphérique qui exerce une force $\vec{F}_1$ sur la partie supérieure du piston. On admettra que l'aire de la surface utile de la partie supérieure du piston est égale à S.

a) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique :

$$M_v \frac{d^2x}{dt^2} = \text{somme des projections sur } Ox \text{ des forces appliquées à la partie mobile,}$$

écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de cette partie mobile.

b) $M_v = 200$ kg; $P_a = 10^5$ N . m^{-2}; $g = 10$ m . s^{-2}; $S = 2{,}8 \times 10^{-2}$ m^2.

Montrer que $H = H_0$ correspond bien à la position de repos de la caisse pour $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$.

c) Montrer que l'équation différentielle reliant $x(t)$ et $m(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 35\frac{dx}{dt} + 96x = 1{,}68 \text{ m}.$$

3° *Étude de l'asservissement analogique de la position de la caisse à une consigne*

La masse $\mathcal{M}$ de gaz enfermé dans le cylindre peut varier autour de $\mathcal{M}_0$ grâce à une électrovanne qui peut soit introduire de l'air, soit en retirer.

Un capteur fournissant à chaque instant la valeur de la position $x(t)$, celle-ci est comparée à une consigne $c(t)$. L'électrovanne ajuste alors la masse m de façon à ce que, même en présence de perturbations, x diffère le moins possible de c.

3° *a*) *Transmittance du système de la figure 2*

La grandeur d'entrée est la variable $m = \mathcal{M} - \mathcal{M}_0$ grandeur de sortie est $x = H - H_0$. Ces deux grandeurs sont liées par l'équation de la question 2°.

Établir, en notation de Laplace, l'expression de la transmittance $\underline{T}_1(\underline{P}) = \dfrac{\underline{X}(\underline{P})}{\underline{M}(\underline{P})}$ dans laquelle $\underline{X}(\underline{P})$ et $\underline{M}(\underline{P})$ sont les transformées de Laplace respectives de $x(t)$ et $m(t)$.

Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\underline{T}_1 = \frac{\lambda}{\left(1 - \dfrac{\underline{P}}{\underline{P}_1}\right)\left(1 - \dfrac{\underline{P}}{\underline{P}_2}\right)}$$

Donner les valeurs de λ, $\underline{P}_1$ et $\underline{P}_2$.

b) *Comportement en fréquence du système de la figure 2*

Donner l'allure et les valeurs remarquables du diagramme de Bode pour le module de $\underline{T}_1(j\omega)$.

Le domaine de fréquences que l'asservissement doit traiter ($f < 5$ Hz) ainsi que l'étude de la stabilité du montage, montrent que l'on peut prendre pour $\underline{T}_1(\underline{P})$ une expression approchée qui est celle d'un système de premier ordre.

Montrer que l'on a alors $\underline{T}_1(\underline{P}) = \dfrac{5{,}25 \times 10^{-2}}{\underline{P} + 3}$. Cette expression sera utilisée dans toute la suite du problème.

c) *Système asservi à commande proportionnelle.*

Le système asservi comportant dans sa chaîne directe l'électrovanne et le système précédant peut être décrit par le schéma fonctionnel de la figure 3.

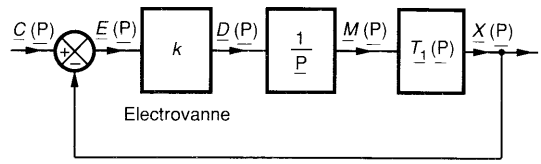


Fig. 3

Dans ce schéma fonctionnel, le débit massique d'air de l'électrovanne, d(t), est proportionnel au signal d'erreur $e(t)$: d(t) = k . $e(t)$, soit, en notation de Laplace :

$\underline{D}(\underline{P}) = k\underline{E}(\underline{P})$.

d) La masse d'air $m(t)$ et le débit d(t) sont reliés par la relation $d(t) = \dfrac{dm}{dt}$: la fonction d(t) est la dérivée par rapport à t de la fonction $m(t)$.

Justifier la présence du bloc fonctionnel de transmittance $\dfrac{1}{\underline{P}}$ dans le schéma de la figure 3.

e) Donner l'expression de la transmittance de la chaîne directe : $\underline{T}_2(\underline{p}) = \dfrac{\underline{X}(\underline{P})}{\underline{E}(\underline{P})}$.

f) Mettre la transmittance de la boucle fermée,

$\underline{T}'_2(\underline{P}) = \dfrac{\underline{X}(\underline{P})}{\underline{C}(\underline{P})}$

sous la forme $\underline{T}'_2(\underline{P}) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2m}{\omega_0}\underline{P} + \dfrac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}}$.

Calculer ω_0 et le coefficient k, relatif à l'électrovanne pour que le coefficient d'amortissement m soit égal à 0,5.

Ces valeurs sont conservées dans la suite du problème.

g) Tracer l'allure du diagramme de Nyquist de la transmittance de boucle $\underline{T}_2(j\omega)$ pour $\alpha = 0{,}5$. Pour cela on déterminera : *a*) la partie réelle de $\underline{T}_2(j\omega)$ lorsque $\omega \to 0$; *b*) le module de $\underline{T}_2(j\omega)$ pour $\omega = 2{,}36$ rad/s; *c*) $\underline{T}_2(j\omega)$ pour $\omega = \omega_0$; *d*) $\underline{T}_2(j\omega)$ lorsque $\omega \to \infty$.

Comparer la marge de phase du système de la figure 3 à la valeur 45°.

4° *Précision du système de la figure 3*

On rappelle que l'erreur de position ε_p d'un système asservi à retour unitaire est égale à la valeur limite de l'erreur $e(t)$, pour t tendant vers l'infini, lorsque la consigne $c(t)$ est une fonction échelon :

$$C(t) = C_0 u(t). \quad \left(\text{Transformée de Laplace : } \underline{C}(\underline{P}) = \frac{C_0}{\underline{P}}\right)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

De même l'erreur de traînage ε_T est égale à la valeur limite de $e(t)$, pour t tendant vers l'infini, lorsque la consigne est une rampe :

$$C(t) = C_0 t u(t). \quad \left(\text{Transformée de Laplace } \underline{C}(\underline{P}) = \frac{C_0}{\underline{P}^2}.\right)$$

a) Montrer que l'erreur de position ε_p du système précédent est nulle.

On pourra pour cela, soit raisonner sur l'équation différentielle reliant $x(t)$ et $C(t)$ qui correspond à la transmittance $\underline{T}'_2(\underline{P})$; soit, après avoir calculé, en notation

de Laplace, le rapport $\frac{E(P)}{C(P)}$, utiliser le théorème dit de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{p\to 0} PE(P)$$

b) Calculer l'erreur de traînage du système précédent. On exprimera ε_T soit en fonction de $\dot{C}_0$, m et ω_0, soit en fonction de $\dot{C}_0$ et d'un coefficient numérique correspondant aux applications numériques précédentes.

5° Étude de l'asservissement échantillonné réglant la position de la caisse

On désire améliorer la précision de l'asservissement en obtenant une erreur de traînage nulle.

Pour cela on introduit un correcteur dans la chaîne directe, et, compte tenu de la bande passante considérée, correspondant à de faibles fréquences, on choisit un correcteur numérique K.

Notations : A une fonction $f(t)$, l'opération d'échantillonnage fait correspondre la fonction $f^*(t)$. On note $F^*(p)$ la transformée de Laplace de $f^*(t)$.

On considèrera que le système fonctionne de la manière suivante qui est *équivalente* au fonctionnement réel :

- la consigne est une fonction du temps échantillonnée $C^*(t)$, dont la période d'échantillonnage est θ;
- la position $x(t)$, après échantillonnage aux mêmes instants, donne $x^*(t)$.

On obtient par différence une erreur échantillonnée $e_1^*(t)$ qui constitue l'entrée du correcteur K (*fig.* 4).

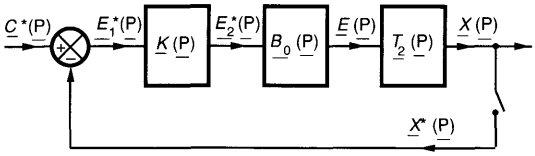


Fig. 4

Le correcteur K, de transmittance $\underline{K}(\underline{P})$ élabore $e_2^*(t)$ à partir de l'entrée $e_1^*(t)$, et un bloqueur d'ordre zéro, de fonction de transfert $\underline{B}_0(\underline{P}) = \frac{1 - e^{-\theta p}}{p}$, donne l'erreur corrigée $e(t)$.

Cette erreur $e(t)$ constitue l'entrée de l'électrovanne et donc du système dont la transmittance de la chaîne directe, $\underline{T}_2(\underline{P})$, a été étudiée à la question 3.2.

On prendra $\underline{T}_2 = \frac{9}{\underline{P}(\underline{P}+3)}$.

a) On met le schéma fonctionnel de la figure 4 sous la forme du schéma de la figure 5 :

Établir l'expression de la transmittance $\underline{T}_3(\underline{P}) = \frac{\underline{X}(\underline{P})}{\underline{E}_2^*(\underline{P})}$.

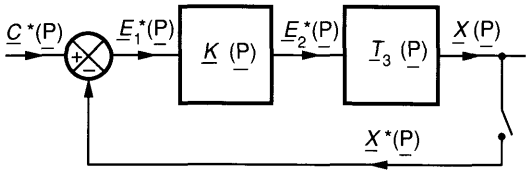


Fig. 5

b) En réalité les grandeurs échantillonnées $C^*(t)$, $e_1^*(t)$, $e_2^*(t)$ et $x^*(t)$ sont traitées numériquement et l'on note $\underline{C}(\underline{Z})$, $\underline{E}_1(\underline{Z})$, $\underline{E}_2(\underline{Z})$ et $\underline{X}(\underline{Z})$ les transformées en Z des séquences correspondantes respectives. En décomposant $\underline{T}_3(\underline{P})$ en éléments simples, établir l'expression de la transmittance en Z :

$$\underline{T}_3(\underline{Z}) = \frac{\underline{X}(\underline{Z})}{\underline{E}_2(\underline{Z})}$$

(*fig.* 6), que l'on mettra sous la forme

$$\underline{T}_3(\underline{Z}) = \frac{A_1}{\underline{Z}-1} + \frac{A_2}{\underline{Z} - e^{-3\theta}}.$$

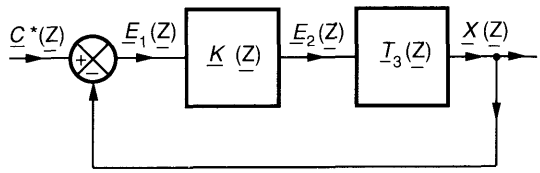


Fig. 6

c) On admet que l'opération d'échantillonnage n'a pas modifié la stabilité du système, ni sa précision (avec $\underline{K}(\underline{Z}) = 1$, on a toujours une erreur de position ε_P nulle et une erreur de traînage ε_T non nulle).

On utilisera les propriétés suivantes :

un asservissement échantillonné dont la transmittance de la chaîne directe est $\underline{T}(\underline{Z})$, et dont la période d'échantillonnage est θ, présente les erreurs de position ε_P et de traînage ε_T données par les expressions :

$$\varepsilon_P = C_0 \cdot \lim_{\underline{z}\to 1} \frac{1}{1 + \underline{T}(\underline{Z})}$$ pour une entrée en échelon d'amplitude C_0.

$$\varepsilon_T = C_0 \cdot \lim_{\underline{z}\to 1} \frac{\theta}{(\underline{Z}-1)(1+\underline{T}(\underline{Z}))}$$ pour une entrée en rampe de pente C_0.

Montrer qu'un correcteur de transmittance

$$\underline{K}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}-a}{\underline{Z}-1},$$

où a est un nombre réel positif (avec $0 < a < 1$), permet d'obtenir $\varepsilon_P = 0$ et $\varepsilon_T = 0$.

d) Préciser l'algorithme qui permet au calculateur de réaliser le correcteur numérique de transmittance $\underline{K}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}-a}{\underline{Z}-1}$. Pour cela, $e_{1.n}$ et $e_{2.n}$ représentant les échantillons des grandeurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ à l'instant $n\theta$: $e_{1.n} = e_1(n\theta)$, $e_{2.n} = e_2(n\theta)$, exprimer $e_{2.n}$ en fonction de $e_{2.n-1}$, $e_{1.n}$, $e_{1.n-1}$, ...

e) $\frac{\underline{Z}-a}{\underline{Z}-1} = a + (1-a)\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}-1}$. (On prend $a = 0{,}74$.)

A quel type de correcteur analogique le correcteur K correspond-il?

f) Compte tenu du domaine de fréquence considéré ($f_{max} < 5$ Hz), proposer une valeur pour la période d'échantillonnage θ.

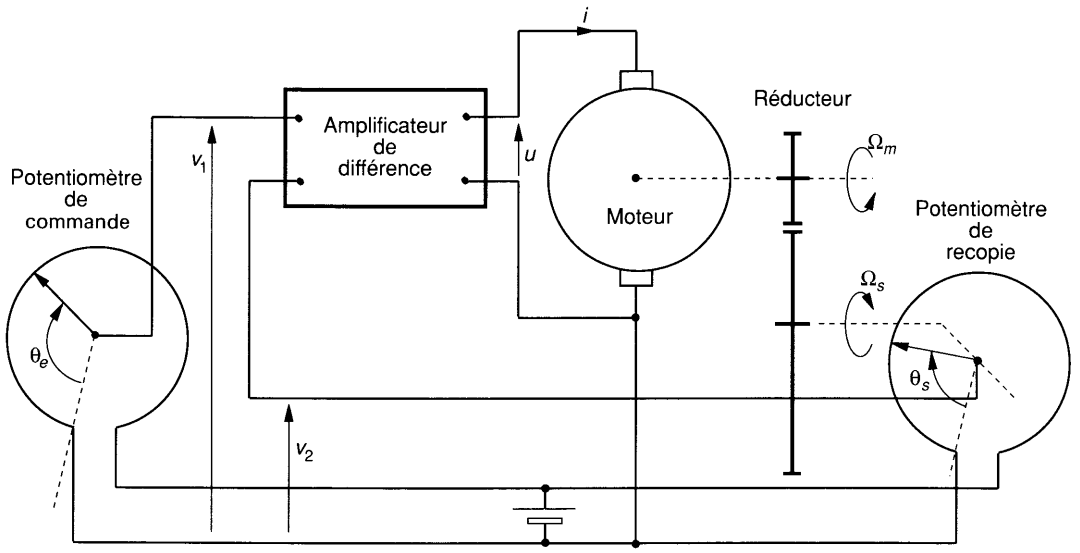


Fig. 1

2. Étude d'une antenne de communication spatiale

Ce problème traite l'asservissement de position de l'axe de gisement d'une antenne de poursuite devant assurer le pointage sur des satellites en mouvement ou géostationnaires.
Le schéma de principe de l'asservissement est donné à la figure 1.

Les potentiomètres de recopie délivrent deux tensions v_1 et v_2, proportionnelles aux angles de rotation θ_e et θ_s.

$$v_1 = k\theta_e \quad \text{et} \quad v_2 = k\theta_s$$

L'amplificateur de différence délivre une tension

$$u = \mu(v_1 - v_2).$$

Le moteur commandé par la tension u provoque, par l'intermédiaire d'un réducteur, la rotation de l'antenne. Soient :

- θ_s l'angle de rotation de l'antenne;
- Ω_s la vitesse de rotation de l'antenne;
- Ω_m la vitesse de rotation du moteur;
- $\mathfrak{J}_m$ le moment d'inertie de l'équipage mobile solidaire du moteur;
- $\mathfrak{J}_s$ le moment d'inertie de l'équipage mobile solidaire de l'antenne;
- N le rapport de réduction
- r la résistance de l'induit du moteur;
- λ la constante de couple du moteur;
- $\mathcal{C}_m$ le couple exercé par le moteur;
- $\mathcal{C}_r$ le couple résistant sur l'arbre moteur;
- $\mathcal{C}_s$ le couple moteur sur l'axe de gisement de l'antenne;
- e la force contre-électromotrice du moteur;

– Tous les frottements mécaniques sont négligés.

1° *Étude de l'ensemble moteur-réducteur*

a) On donne $e = \lambda\Omega_m$. Établir les relations :

$$\Omega_m = N \,.\, \Omega_S; \quad \mathcal{C}_m = \lambda \,.\, i; \quad \mathcal{C}_S = N \,.\, \mathcal{C}_r;$$

$$\mathfrak{J} \,.\, \frac{d\Omega_S}{dt} = N \,.\, \mathcal{C}_m$$

avec $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_S + N^2\mathfrak{J}_m$.

b) Montrer que l'ensemble moteur-réducteur peut être décrit par le schéma bloc de la figure 2. On précisera les expressions des transmittances $\underline{H}_0(P)$, $\underline{H}_1(P)$, $\underline{H}_2(P)$, $\underline{H}_3(P)$ en fonction des données du problème.

c) Montrer que le schéma bloc de la figure 2 peut être ramené au schéma bloc de la figure 3, où Ω_C est une variable fictive correspondant à une consigne de vitesse. Exprimer k_0 et H en fonction des données du problème.

Pour la suite du problème, *on prendra* $k_0 = 20\ s^{-1}$.

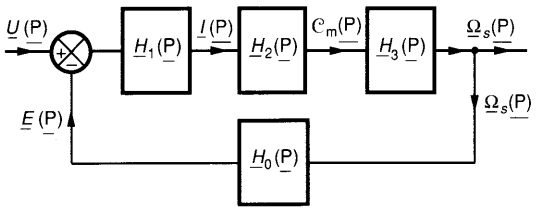


Fig. 2

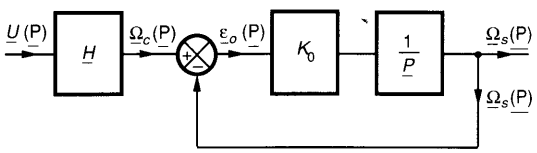


Fig. 3

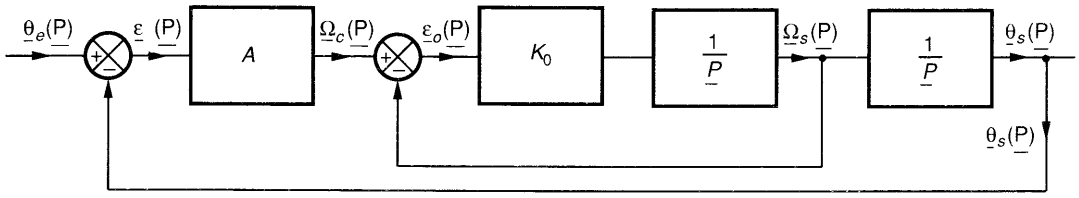


Fig. 4

2° *Étude de l'asservissement de position*

a) Montrer que le système complet peut être décrit par le schéma bloc de la figure 4. Exprimer A en fonction des données du problème.

b) Déterminer, en régime harmonique, la transmittance $\underline{T}(j\omega)$ en boucle ouverte. Tracer le diagramme de Bode $\overline{20}$. lg ($|\underline{T}|$) et arg ($\underline{T}$).

Pour quelle valeur A_0 de A, la cassure du diagramme asymptotique du module se trouve-t-elle sur l'axe des pulsations.

c) Définir la marge de phase. Calculer sa valeur exacte M_φ pour $A = A_0$.

d) Déterminer la transmittance $\underline{A_r}(\underline{P})$ en boucle fermée et la mettre sous la forme :

$$\underline{A_r}(\underline{P}) = \frac{1}{1 + 2m\dfrac{\underline{P}}{\omega_0} + \left(\dfrac{\underline{P}}{\omega_0}\right)^2}.$$

Exprimer m et ω_0 en fonction de A et k_0.

e) Déterminer l'équation différentielle liant θ_s à θ_e, et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\theta_s}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{d\theta_s}{dt} + \omega_0^2\theta_s = \omega_0^2\theta_e.$$

f) Calculer l'erreur de position ε_P.

Pour $A = A_0 = 20\ s^{-1}$ et pour une attaque en rampe, ($\theta_e = c\ .\ t$ avec $c = 2 \times 10^{-3}$ rad/s), déterminer la loi de variations de θ_s en régime permanent. Calculer l'erreur de traînage ε_T.

g) Pour $A = A_0$, et pour une attaque en échelon, déterminer à l'aide de la courbe de la figure 17 du chapitre 4, le temps de réponse à 5 %. La réponse est-elle exponentielle où sinusoïdale amortie. Calculer le dépassement. Tracer l'allure de la réponse en y faisant apparaître le dépassement et le temps de réponse à 5 %.

h) Pour quelle valeur de A, le temps de réponse à 5 % est-il minimal? Quelle est alors sa valeur?

i) Déterminer la transmittance complexe en boucle fermée $\underline{A_r}(j\omega)$. La position de consigne représente la position présumée du satellite. Pour faciliter la recherche on explore cette position en effectuant un balayage sinusoïdal autour de la position θ_e en superposant un ordre de balayage $\alpha_e(t) = b \sin \omega_b t$.

Établir la loi des variations $\alpha_s(t)$ autour de la position θ_s.

L'amplitude du balayage est de 0,25°, sa période est de 10 secondes. Quelle est l'amplitude du balayage sinusoïdal $\alpha_s(t)$ de l'antenne?

3° *Asservissement de position en présence d'une perturbation*

L'asservissement de position doit lutter contre les couples de perturbation appliquées à l'axe de gisement de l'antenne par l'action du vent. Deux types d'action perturbatrice sont envisagés : vent de vitesse constante v_0, auquel correspond un couple

- $\Gamma_0 = 175\,000$ m . N pour $v_0 = 15$ m . s^{-1};
- $\Gamma_0 = 310\,000$ m . N pour $v_0 = 20$ m . s^{-1}.

Vent soufflant en rafales avec une vitesse comprise entre 15 et 20 m . s^{-1}. On suppose alors que la vitesse du vent est une fonction sinusoïdale de fréquence égale à 0,2 Hertz.

a) Montrer que l'ensemble moteur-réducteur peut être décrit par le schéma bloc de la figure 5.

b) Montrer que le schéma bloc de la figure 5 peut être ramené au schéma bloc de la figure 6. Exprimer le paramètre a en fonction des données du problème. On donne $\mathfrak{J}_s = 10^6$ m^2 . kg, $\mathfrak{J}_m = 20 \times 10^{-3}$ m^2 . kg. $N = 100\,000$. Calculer la valeur numérique de a.

Pour la suite du problème *on prendra*

$$a = 5 \times 10^{-9}\ m^{-2}\ .\ kg^{-1}.$$

c) Montrer que l'asservissement de position peut être décrit par le schéma bloc de la figure 7. Exprimer les transmitances $\underline{A_1}(\underline{P})$ et $\underline{D}(\underline{P})$ en fonction des variables A, k_0, a.

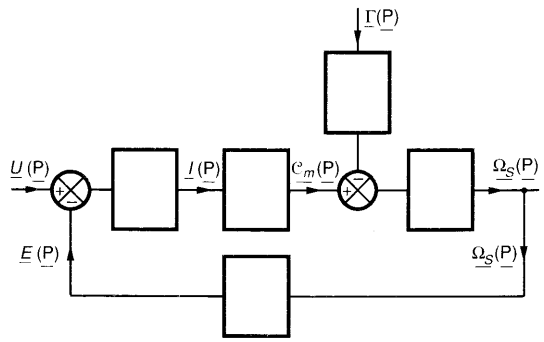


Fig. 5

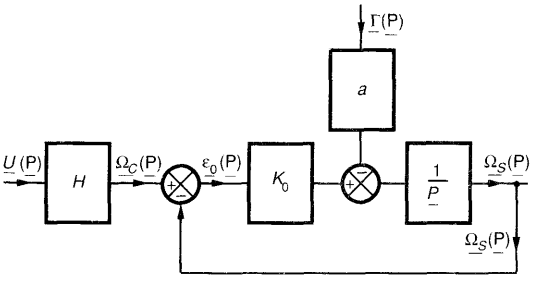


Fig. 6

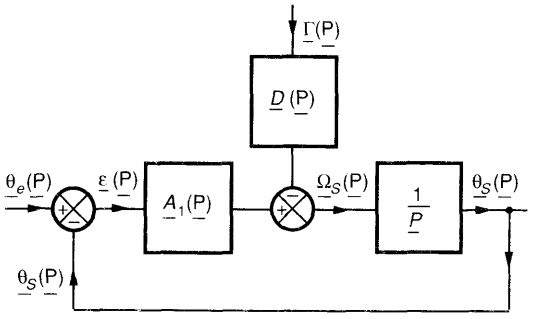


Fig. 7

Montrer que pour $A = A_0 = 20\ s^{-1}$, l'application numérique conduit à

$$\underline{A_1}(\underline{P}) = \frac{20}{1 + \frac{\underline{P}}{20}} \qquad \underline{D}(\underline{P}) = \frac{1}{4 \times 10^9 \left(1 + \frac{\underline{P}}{20}\right)}$$

d) Pour une consigne $\underline{\theta_e}(\underline{P})$ identiquement nulle, déterminer la transmittance

$$\frac{\underline{\theta_s}(\underline{P})}{\underline{\Gamma}(\underline{P})}.$$

e) Déterminer la dérive angulaire α en présence :

d'un vent constant de vitesse 15 m . s^{-1} où 20 m . s^{-1};

d'un vent soufflant en rafales entre 15 et 20 m . s^{-1}, avec la fréquence 0,2 Hz. Quel aurait pu être le risque d'un tel vent?

4° *Asservissement de position corrigé*

Pour cette question, on prendra $k_0 = 20$ rad/s. On place en cascade dans la chaîne directe, un correcteur. L'asservissement peut alors être décrit par le schéma bloc de la figure 8 avec

$$\underline{C}(\underline{P}) = \frac{k_a}{\underline{P}}\left(1 + \frac{\underline{P}}{\omega_1}\right).$$

a) Établir la transmittance complexe en boucle ouverte $\underline{T_C}(j\omega)$, en régime harmonique. Montrer que, pour $\omega_1 > 20$ rad/s, l'argument de $\underline{T_C}(j\omega)$ est toujours inférieur à $-180°$. En conclure que la stabilité impose $\omega_1 < 20$ rad/s.

b) Tracer les diagrammes de Bode (module et argument) de $\underline{T_C}(j\omega)$.

c) Montrer que l'argument de $\underline{T_C}$ passe par un maximum pour une pulsation que l'on déterminera en fonction de ω_1.

Montrer que la courbe de module coupe l'axe des pulsations pour une pulsation ω_u telle que $\omega_1 \omega_u = k_a$.

En déduire que, pour chaque valeur de ω_1, il existe une valeur de k_a qui rend la marge de phase maximale.

d) On donne $\omega_1 = 2{,}5$ rad/s. Calculer la valeur de k_a qui rend la marge de phase maximum. Calculer la valeur correspondante de la marge de phase.

e) Calculer la transmittance en boucle fermée. En déduire l'erreur de position ainsi que l'erreur de traînage.

5° *Boucle de position échantillonnée*

On réalise à partir du dispositif précédent, un asservissement de position échantillonné (*fig.* 9). La période d'échantillonnage est T_e. Le calculateur échantillonne la position de sortie et obtient, par l'intermédiaire du convertisseur analogique numérique, une suite de nombres $\theta_s(nT_e)$, images de la sortie. Avec la même période T_e, il place à

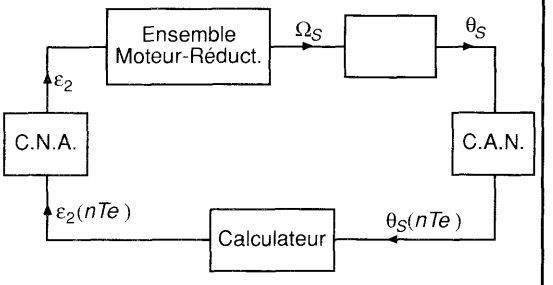


Fig. 9

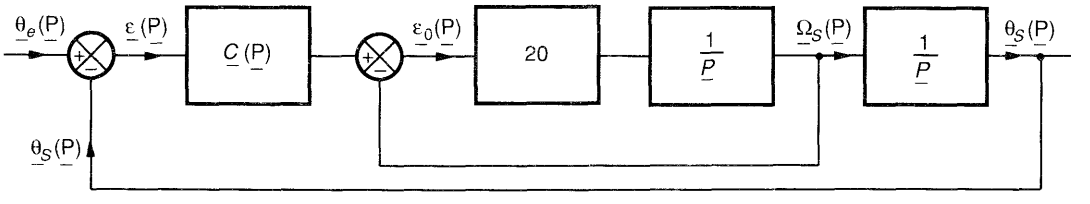


Fig. 8

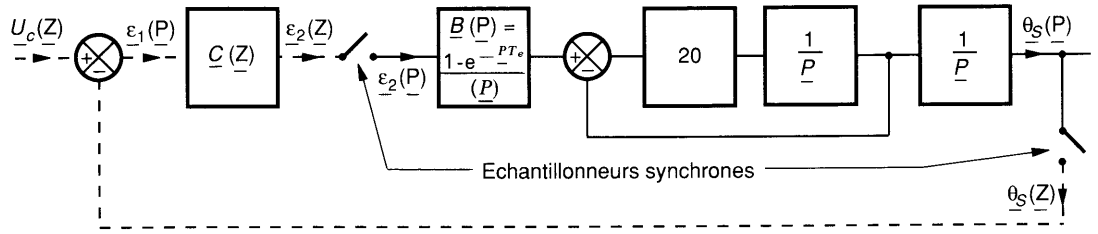


Fig. 10

l'entrée du convertisseur numérique analogique, une suite de nombres $\varepsilon_2(nT_e)$ que ce dernier transforme en tension analogique de commande du moteur. En outre, le C.N.A. bloque la tension de commande du moteur entre deux échantillons.

Dans toute cette question, on prendra $T_e = 0{,}1$ seconde.

Le calculateur élabore la suite des échantillons $\varepsilon_2(nT_e)$ à partir des nombres $\theta_s(nT_e)$ et des nombres de commande mémorisés $u_C(nT_e)$. L'algorithme correspondant est à l'origine d'une transmittance de correction $\underline{C}(\underline{Z})$.

a) Montrer que le système peut être décrit par le schéma bloc de la figure 10. Quelle est l'origine de la transmittance $\underline{B}(\underline{p}) = \dfrac{1 - e^{-\underline{p}T_e}}{\underline{p}}$?

b) Établir la transmittance $\underline{A}'(\underline{P}) = \dfrac{\underline{\theta_s}(\underline{P})}{\underline{\varepsilon_2}(\underline{P})}$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{A}'(\underline{P}) = (1 - e^{-\underline{P}T_e})\left(\frac{1}{\underline{p}^2} + \frac{0{,}05}{\underline{P} + 20} - \frac{0{,}05}{\underline{P}}\right).$$

c) Sachant qu'un retard de T_e se traduit sur les transformées en Z par une multiplication par $\underline{Z}^{-1}$, et à partir des équivalences suivantes

$$\frac{1}{\underline{P}} \leftrightarrow \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - 1}; \quad \frac{1}{\underline{P} + a} \leftrightarrow \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{-aT_e}};$$
$$\frac{1}{\underline{P}^2} \leftrightarrow \frac{T_e \underline{Z}}{(\underline{Z} - 1)^2}.$$

Établir la transmittance en Z $\underline{A}'(\underline{Z}) = \underline{\theta_s}(\underline{Z})/\underline{\varepsilon_2}(\underline{Z})$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{A}'(\underline{Z}) = \frac{A\underline{Z} + B}{(\underline{Z} - 1)(\underline{Z} - \alpha)}$$

avec $\alpha = e^{-20T_e}$
$A = T_e + 0{,}05(\alpha - 1)$
$B = 0{,}05(1 - \alpha) - \alpha T_e$

d) Nous supposerons dans cette question que le calculateur réalise l'algorithme

$$\varepsilon_2(nT_e) = k_a[u_C(nT_e) - \theta_s(nT_e)]$$

α) Montrer que la transmittance $\underline{C}(\underline{Z})$ du correcteur est alors une constante. Calculer la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(\underline{Z}) = \underline{\theta_s}(\underline{Z})/\underline{\varepsilon_1}(\underline{Z})$ puis la transmittance $\underline{E}(\underline{Z}) = \underline{\varepsilon_1}(\underline{Z})/\underline{U_C}(\underline{Z})$ en fonction de $\underline{T}(\underline{Z})$.

β) Sachant que l'erreur est donnée par la limite de $\varepsilon_1(nT_e)$. Lorsque n tend vers l'infini, et à partir du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n\to\infty} f(nT_e) = \lim_{\underline{Z}\to 1} (1 - \underline{Z}^{-1}) \cdot \underline{F}(\underline{Z})$$

déterminer les erreurs suivantes :

Erreur de position ε_P : u_C est un échelon d'amplitude a dont la transformée en Z est :

$$\underline{U_C}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - 1} \cdot a.$$

Erreur de traînage ε_T : u_C est une rampe de pente a dont la transformée en Z est :

$$\underline{U_C}(\underline{Z}) = \frac{T_e \underline{Z}}{(\underline{Z} - 1)^2} \cdot a.$$

Montrer que ε_T s'écrit $\varepsilon_T = a/k_a$.

Application numérique : Calculer k_a pour que l'erreur de traînage soit inférieure à 0,5 milliradian pour $a = 2$ milliradians par seconde.

e) Établir la transmittance $\underline{A_R}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{\theta_s}(\underline{Z})}{\underline{U_C}(\underline{Z})}$ en boucle fermée. A partir de l'équivalence :

$$\frac{\omega_0^2}{\underline{P}^2 + 2m\omega_0\underline{P} + \omega_0^2} \leftrightarrow (\text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2})$$
$$\frac{\underline{Z}^{-1}X_1 + \underline{Z}^{-2}X_2}{1 - 2\,e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e \underline{Z}^{-1} + e^{-2m\omega_0 T_e} \times \underline{Z}^{-2}},$$

avec $X_1 = 1 - e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos\omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right)$

et

$$X_2 = e^{-m\omega_0 T_e}\left(e^{-m\omega_0 T_e} - \cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right),$$

établir les équations :

$$1 - e^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\sin\omega T_e\right) = k_a A;$$
$$2\,e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e = 1 + \alpha - k_a A;$$
$$e^{-2m\omega_0 T_e} = k_a B + \alpha.$$

A partir des deux premières équations, calculer

$$e^{-m\omega_0 T_e}\sin\omega T_e \quad \text{et} \quad e^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e;$$

en déduire $e^{-2m\omega_0 T_e}$ en fonction de m, k_a, A et α.

Par identification avec la troisième équation, montrer que m s'exprime en fonction de α, A, k_a, B par :

$$m = \frac{1 - \alpha - Ak_a}{2\sqrt{k_a(B + \alpha A)}}.$$

Application numérique :

$T_e = 0{,}1$ seconde. Déterminer les valeurs de A et B, puis la valeur de m pour la valeur de k_a calculée à la question 4. Cette valeur de m vous paraît-elle satisfaisante.

Calculer, pour la réponse indicielle le dépassement correspondant.

f) Afin d'annuler l'erreur de traînage, le calculateur obéit à un algorithme conduisant à une transmittance $\underline{C}(\underline{Z})$ égale à :

$$\underline{C}(\underline{Z}) = k_C T_e \frac{\underline{Z} - \beta}{\underline{Z} - 1} \quad \text{avec} \quad k_C > 0.$$

α) Déterminer la transmittance $\underline{T}_C(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{\theta}_s(\underline{Z})}{\underline{\varepsilon}_1(\underline{Z})}$.

Montrer que l'erreur de traînage est nulle.

Pour une attaque parabolique, at^2, dont la transformée en Z est $\dfrac{aT_e^2(\underline{Z}+1)\underline{Z}}{2(\underline{Z}-1)^3}$, calculer la dérive angulaire ε_a en fonction de a, k_C, β.

Application numérique :

Déterminer la relation entre k_C et β pour obtenir une dérive $\varepsilon_a = 0{,}5$ milliradian pour $a = 0{,}002$ milliradian/s^{-2}.

β) Déterminer la transmittance en boucle fermée

$$\underline{A}_{RC}(\underline{Z}) = \frac{\underline{\theta}_s(\underline{Z})}{\underline{U}_C(\underline{Z})}.$$

Montrer que si l'on voulait ramener l'étude à un système du deuxième ordre, en posant $\alpha = \beta$, tout en restant conforme au théorème de shannon ($\omega T_e < \pi$),le système serait instable ($m < 0$).

γ) Déterminer le numérateur $\underline{N}[1 + \underline{T}_C(\underline{Z})]$ de $1 + \underline{T}_C(\underline{Z})$ et le mettre sous la forme :

$$a_3\underline{Z}^3 + a_2\underline{Z}^2 + a_1\underline{Z} + a_0 \quad \text{avec} \quad a_3 > 0.$$

On donne $T_e = 0{,}1$ seconde. Déterminer les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 en fonction de β et k_C.

On donne $\beta = 0{,}72$. Déterminer la valeur de k_C permettant de satisfaire la dérive angulaire calculée à la question 5. a), puis calculer la valeur numérique des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et vérifier qu'ils satisfont au critère de Jury.

g) Établir l'algorithme du correcteur.

8 oscillateurs sinusoïdaux

1. PRINCIPE

La fonction d'un oscillateur sinusoïdal est de produire une tension sinusoïdale. Son principe de fonctionnement est basé sur un défaut des systèmes bouclés précédemment étudiés à savoir l'instabilité.

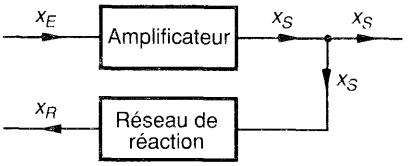


Fig. 1

Considérons le schéma bloc de la figure 1 constitué d'un amplificateur et d'un réseau de réaction. L'amplificateur attaqué par le signal x_E délivre un signal de sortie x_S qui génère un signal x_R en sortie du réseau de réaction. Si ce signal est identique à x_E, on peut le refermer sur l'entrée de l'amplificateur et on obtient ainsi un signal de sortie sans appliquer de signal extérieur.

Si l'amplificateur et le réseau de réaction ne contiennent pas d'éléments réactifs, aucune restriction n'est apportée au signal x_S, il peut donc être quelconque.

Par contre, si l'amplificateur et le réseau de réaction contiennent des éléments réactifs, la condition ne pourra être satisfaite que pour une fréquence bien déterminée appelée fréquence d'oscillation.

Critère de Barkhausen

Considérons le schéma bloc de la figure 2, en régime harmonique (régime sinusoïdal permanent). À partir des équations

$$\begin{cases} \underline{V_S} = \underline{A}\,\underline{V_E} \\ \underline{V_E} = \underline{\beta}\,\underline{V_S} \end{cases}$$

il vient :

$\underline{V_S}(1 - \underline{A}\underline{\beta}) = 0.$

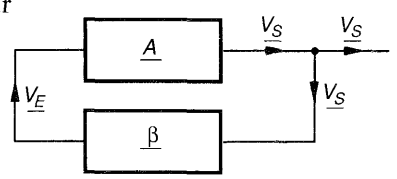


Fig. 2

Deux solutions sont alors possibles.

- Si $1 - \underline{A}\underline{\beta} \neq 0$; l'équation précédente impose $\underline{V_S} = 0$. Le système ne fait pas apparaître de signal oscillatoire en sortie;
- Si $1 - \underline{A}\underline{\beta} = 0$, l'équation précédente est satisfaite avec $\underline{V_S} \neq 0$.

La condition d'oscillation, connue sous le nom de critère de Barkhausen est donc la suivante :

$$\boxed{\underline{A}\underline{\beta} = 1}$$

Comme toute équation complexe transporte deux informations, nous en déduisons les conditions suivantes :

- Équation sur *les arguments* : $\arg \underline{A}\underline{\beta} = 0$; cette condition, qui ne peut être satisfaite que pour une fréquence donnée, *fixe la fréquence d'oscillation.*
- Équation *sur les modules* : $|\underline{A}\underline{\beta}| = 1$; cette équation impose une *condition d'amplification.*

REMARQUE

À la fréquence pour laquelle $\arg \underline{A}\underline{\beta} = 0$, *le réseau de réaction fournit la tension* $|\underline{A}\underline{\beta}|\,\underline{V_E}$.

- *Si* $|\underline{A}\underline{\beta}| < 1$ *le signal de retour est trop faible pour entretenir les oscillations et elles disparaissent.*
- *Si* $|\underline{A}\underline{\beta}| > 1$, *les oscillations ne cessent de croître et sont forcément limitées par la saturation des éléments actifs de l'amplificateur. La tension de sortie n'est donc pas sinusoïdale.*

Remarquons, dès à présent, que, si la fréquence d'oscillation est parfaitement déterminée par l'équation $\arg \underline{A}\underline{\beta} = 0$, l'oscillateur, tel qu'il a été défini jusqu'ici, présente les inconvénients suivants :

- Compte tenu de la dispersion sur les composants et des variations de leurs caractéristiques en fonction de la température, la condition $|\underline{A}\underline{\beta}| = 1$ est très difficile à obtenir en toute rigueur (rappelons que si $|\underline{A}\underline{\beta}| < 1$ les oscillations n'apparaissent pas et si $|\underline{A}\underline{\beta}| > 1$, la tension de sortie est distordue);

• Aucune condition d'amplitude ne fixe l'excursion du signal de sortie.

(Rappelons que la condition $|\underline{A}\underline{\beta}| = 1$ est une condition d'amplification et non une condition d'amplitude.)

Nous en reparlerons dans la suite de l'étude.

2. OSCILLATEUR A DÉPHASAGE

Ce type d'oscillateur utilise le réseau de réaction de la figure 3.

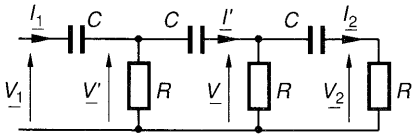


Fig. 3

En posant $\underline{x} = \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$, il vient de proche en proche :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{R};$$

$$\underline{V} = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{I}_2 = \underline{V}_2(1 + \underline{x});$$

$$\underline{I}' = \underline{I}_2 + \frac{\underline{V}}{R} = \frac{\underline{V}_2}{R} + \frac{\underline{V}_2}{R}(1 + \underline{x})$$

$$= \frac{\underline{V}_2}{R}(2 + \underline{x});$$

$$\underline{V}' = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I}' + \underline{V} = \frac{\underline{V}_2}{\mathrm{j}RC\omega}(2 + \underline{x}) + \underline{V}_2(1 + \underline{x})$$

$$= \underline{V}_2(\underline{x}^2 + 3\underline{x} + 1);$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}' + \frac{\underline{V}'}{R} = \frac{\underline{V}_2}{R}(2 + \underline{x}) + \frac{\underline{V}_2}{R}(\underline{x}^2 + 3\underline{x} + 1)$$

$$= \frac{\underline{V}_2}{R}(\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3);$$

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I}_1 + \underline{V}'$$

$$= \underline{V}_2\underline{x}(\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3) + \underline{V}_2(\underline{x}^2 + 3\underline{x} + 1)$$

$$= \underline{V}_2[\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1].$$

Le réseau de la figure 3 présente donc :

• une fonction de transfert en tension

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{1}{\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1},$$

• une impédance d'entrée :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = R\,\frac{\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1}{\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3}.$$

Oscillateur à déphasage à transistor bipolaire

Soit le schéma de la figure 4 dont le schéma équivalent pour les petits signaux est donné à la figure 5.

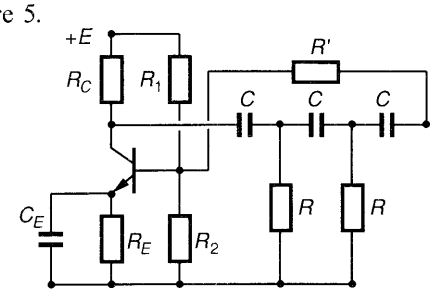


Fig. 4

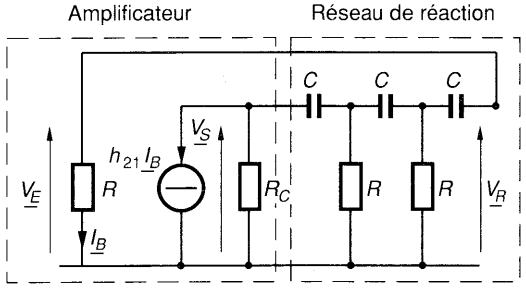


Fig. 5

La résistance $R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ est très grande par rapport à h_{11}. La résistance R' est telle que $R' + h_{11} = R$.

• Si $\underline{Z}_e$ est l'impédance d'entrée du réseau de réaction, la fonction de transfert en tension de l'amplificateur s'écrit :

$$A = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = -\frac{h_{21}}{R}\,\frac{R_C\underline{Z}_e}{R_C + \underline{Z}_e}$$

$$= -h_{21}R_C\,\frac{\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1}{R_C(\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3) + R(\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1)}$$

• La fonction de transfert du réseau de réaction est

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{V}_R}{\underline{V}_S} = \frac{1}{\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1}$$

Soit

$$\underline{A}\underline{\beta} = \frac{-h_{21}R_C}{R_C(\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3) + R(\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1)}$$

$$= \frac{-h_{21}}{\underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3 + y(\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1)}$$

en posant $y = \dfrac{R}{R_C}$.

La condition $\underline{A}\underline{\beta} = 1$ conduit à :

$$-h_{21} = \underline{x}^2 + 4\underline{x} + 3 + y(\underline{x}^3 + 5\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 1).$$

Compte tenu de $\underline{x} = \dfrac{1}{jRC\omega}$, cette équation se traduit par les deux conditions :

a) $4\underline{x} + y(\underline{x}^3 + 6\underline{x}) = 0$, soit

$$\underline{x}^2 = -\frac{1}{R^2C^2\omega^2} = -6 - \frac{4}{y}$$

ce qui donne $\omega = \dfrac{1}{RC}\dfrac{1}{\sqrt{6 + \dfrac{4}{y}}}$

qui est donc la **pulsation d'oscillation.**

b) $-h_{21} = \underline{x}^2 + 3 + y(5\underline{x}^2 + 1)$

qui s'écrit compte tenu de la condition précédente :

$$-h_{21} = -6 - \frac{4}{y} + 3 + y\left(-30 - \frac{20}{y} + 1\right)$$

soit $h_{21} = 23 + \dfrac{4}{y} + 29y$

qui est la **condition d'amplification.**

Remarquons qu'il est impossible de satisfaire la condition d'amplification pour les valeurs extrêmes du rapport $y = \dfrac{R}{R_C}$. En effet la valeur du polynôme $23 + \dfrac{4}{y} + 29y$ tend vers l'infini lorsque le rapport $y = \dfrac{R}{R_C}$ tend vers zéro ou vers l'infini. L'apparition des oscillations est alors impossible car elle nécessiterait une valeur infinie de h_{21}.

Entre les deux extrêmes il doit donc exister une valeur optimale du rapport y qui rend le polynôme $P = 23 + \dfrac{4}{y} + 29y$ minimal. Afin de la déterminer dérivons P par rapport à y :

$$\frac{dP}{dy} = 29 - \frac{4}{y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

La valeur minimale de P s'écrit donc

$$P_{min} = 23 + 2\sqrt{29} + 2 \times \frac{29}{\sqrt{29}}$$

$$= 23 + 4\sqrt{29} \approx 45.$$

La courbe représentative de P est donnée à la figure 6.

Les oscillations ne sont possibles que s'il existe un point d'intersection entre l'horizontale h_{21} et la courbe $P = 23 + \dfrac{4}{y} + 29y$, ce qui impose $h_{21} > 45$.

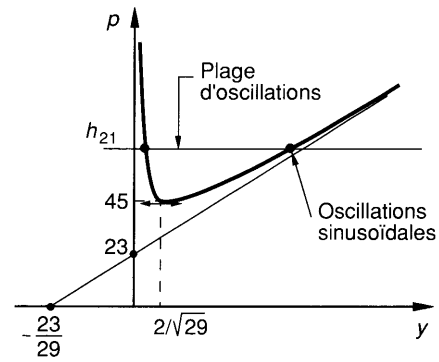


Fig. 6

L'oscillateur à déphasage est utilisé pour des fréquences allant de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz. Au-delà, les éléments actifs risquent de n'avoir pas une amplification suffisante.

Remarquons que l'on peut faire varier la fréquence en agissant simultanément sur les trois condensateurs C. Cette opération présente l'avantage de ne pas modifier les conditions imposées à l'amplificateur. En effet le produit $RC\omega = \dfrac{1}{\sqrt{6 + \dfrac{4}{y}}}$ reste constant, ainsi donc que x, et la condition imposée à h_{21}

$$(-h_{21} = \underline{x}^2 + 3 + y(5\underline{x}^2 + 1))$$

est inchangée.

3. OSCILLATEUR À PONT DE WIEN

Le schéma de l'oscillateur est donné à la figure 7.

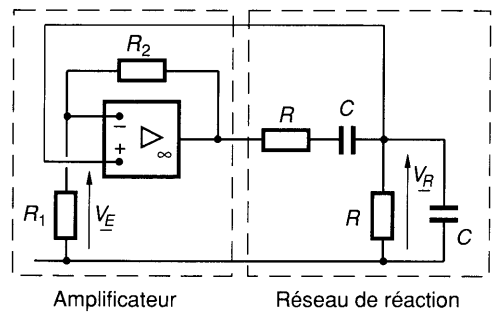


Fig. 7

• La fonction de transfert en tension de l'amplificateur est :

$$\underline{A} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

• La fonction de transfert du réseau de réaction est :

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{V_R}}{\underline{V_S}} = \frac{\dfrac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}}$$

$$= \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2 + jRC\omega}$$

$$= \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}.$$

La condition d'oscillation $\underline{A\beta} = 1$ s'écrit

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = 1.$$

• La condition $\arg \underline{A\beta} = 0$ impose

$$1 - R^2C^2\omega^2 = 0$$

soit $\omega = \dfrac{1}{RC}$ qui est la **condition de fréquence.**

• La condition $|\underline{A\beta}| = 1$ impose

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{3jRC\omega}{jRC\omega} = 3$$

soit $R_2 = 2R_1$ qui est **la condition d'amplification.**

4. FORME « GÉNÉRALE » D'UN OSCILLATEUR

La figure 8 représente la forme « générale » d'un oscillateur.

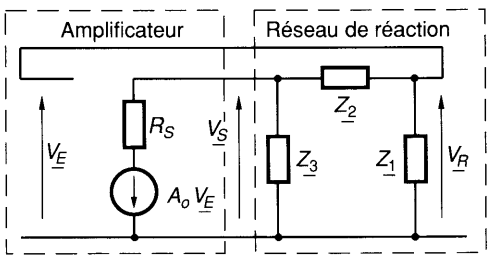


Fig. 8

• L'amplificateur est supposé posséder une très forte impédance d'entrée (J.FET, amplificateur opérationnel). Il est caractérisé en sortie par son schéma de Thévenin équivalent ($A_0\underline{V_E}$, R_S). Si A_0 est positif, il s'agit d'un amplificateur inverseur.

• Le réseau de réaction, réalisé à partir des trois impédances $\underline{Z_1}$, $\underline{Z_2}$, $\underline{Z_3}$ possède :

– l'impédance d'entrée

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{Z_3}(\underline{Z_1} + \underline{Z_2})}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}};$$

– la fonction de transfert en tension

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{V_R}}{\underline{V_S}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}.$$

• La fonction de transfert en tension $\underline{A}$ de l'amplificateur s'écrit :

$$\underline{A} = -A_0 \frac{\underline{Z_e}}{R_S + \underline{Z_e}}$$

$$= -A_0 \frac{\underline{Z_3}(\underline{Z_1} + \underline{Z_2})}{R_S(\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}) + \underline{Z_3}(\underline{Z_1} + \underline{Z_2})}.$$

• La condition d'oscillation s'écrit :

$$\underline{A\beta} = -\frac{A_0\underline{Z_1}\underline{Z_3}}{R_S(\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}) + \underline{Z_3}(\underline{Z_1} + \underline{Z_2})} = 1,$$

soit

$$-A_0\underline{Z_1}\underline{Z_3} = R_S(\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}) + \underline{Z_3}(\underline{Z_1} + \underline{Z_2}).$$

• Les impédances $\underline{Z_1}$, $\underline{Z_2}$, $\underline{Z_3}$ sont réalisées avec des éléments purement réactifs,
soit $\underline{Z_1} = jX_1$, $\underline{Z_2} = jX_2$, $\underline{Z_3} = jX_3$.

La condition d'oscillation devient :

$$+A_0X_1X_3 = jR_S(X_1 + X_2 + X_3) - X_3(X_1 + X_2)$$

Elle conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} A_0X_1X_3 = -X_3(X_1 + X_2) \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} A_0X_1 = X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$

En conséquence :

– si A_0 est positif (amplificateur inverseur), X_1 et X_3 doivent être de même signe, et les impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_3}$ sont de même nature;

– compte tenu de $X_2 = -(X_1 + X_3)$, le signe de X_2 est l'opposé de celui de X_1 et X_3 et l'impédance $\underline{Z_2}$ est de nature différente à $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_3}$.

• Si $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_3}$ sont des condensateurs, $\underline{Z_2}$ étant une inductance, le dispositif de la figure 8 est un **oscillateur Colpitts.**

• Si $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_3}$ sont des inductances, $\underline{Z_2}$ étant un condensateur, le dispositif de la figure 8 est un **oscillateur Hartley.**

4.1. OSCILLATEUR COLPITTS A TRANSISTOR BIPOLAIRE

Le schéma correspondant est décrit par la figure 9. Qualitativement, le dispositif opère comme l'oscillateur général de la figure 8, cependant l'analyse détaillée est plus complexe car le transistor n'a pas une très forte résistance d'entrée.

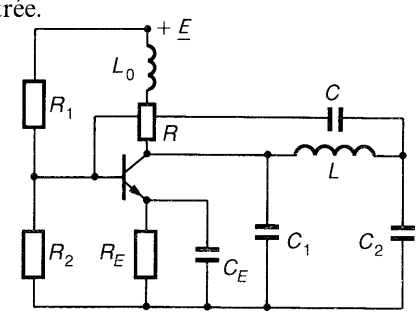


Fig. 9

A la fréquence d'oscillation, nous supposerons :

- l'inductance L_0 est suffisamment élevée pour pouvoir être considérée, par les petites variations, comme un circuit ouvert;
- les capacités C et C_E sont suffisamment grandes pour se comporter comme des court-circuits vis-à-vis des petites variations;
- la résistance $R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ est très grande devant h_{11}.

En conséquence, le comportement dynamique du dispositif est décrit par le schéma de la figure 10.

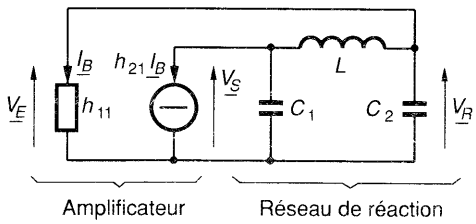


Fig. 10

– Le réseau de réaction présente :

• l'impédance d'entrée $\underline{Z_e}$

$$\underline{Z_e} = \frac{\mathrm{j}L\omega + \dfrac{h_{11}}{1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega}}{1 + \mathrm{j}C_1\omega\left[\mathrm{j}L\omega + \dfrac{h_{11}}{1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega}\right]} = \frac{h_{11} + \mathrm{j}L\omega[1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega]}{1 + \mathrm{j}h_{11}(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2(1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega)};$$

• la fonction de transfert en tension $\underline{\beta}$

$$\underline{\beta} = \frac{\dfrac{h_{11}}{1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega}}{\mathrm{j}L\omega + \dfrac{h_{11}}{1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega}} = \frac{h_{11}}{h_{11} + \mathrm{j}L\omega(1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega)}.$$

– La fonction de transfert en tension de l'amplificateur s'écrit :

$$\underline{A} = -\frac{h_{21}\underline{Z_e}}{h_{11}} = -\frac{h_{21}}{h_{11}} \cdot \frac{h_{11} + \mathrm{j}L\omega[1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega]}{1 + \mathrm{j}h_{11}(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2(1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega)}.$$

– La condition d'oscillation $\underline{A\beta} = 1$ s'écrit :

$$\underline{A\beta} = -h_{21} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}h_{11}(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2(1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega)} = 1,$$

soit $LC_1\omega^2(1 + \mathrm{j}h_{11}C_2\omega) - 1 - \mathrm{j}h_{11}(C_1 + C_2)\omega = h_{21}.$

• L'égalité des parties imaginaires conduit à :

$$LC_1C_2\omega^2 - (C_1 + C_2) = 0,$$

soit $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}}}$ **condition de fréquence**

• L'égalité des parties réelles conduit à :

$$LC_1\omega^2 - 1 = h_{21},$$

soit, compte tenu de $LC_1C_2\omega^2 = C_1 + C_2$,

$$h_{21} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} - 1 = \frac{C_1}{C_2}$$ **condition d'amplification.**

4.2. OSCILLATEUR COLPITTS A TRANSISTOR BIPOLAIRE MONTÉ EN BASE COMMUNE

Le montage base commune est non-inverseur. Il faut donc, dans la formule générale, changer A_0 en $-A_0$, ce qui revient à dire que les impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_3}$ doivent être de nature différente.

De plus, nous tiendrons compte de la résistance r de la bobine du réseau de réaction, tout en sachant qu'elle est très faible.

Le schéma du montage est donné à la figure 11 et le schéma équivalent pour les petits signaux à la figure 12.

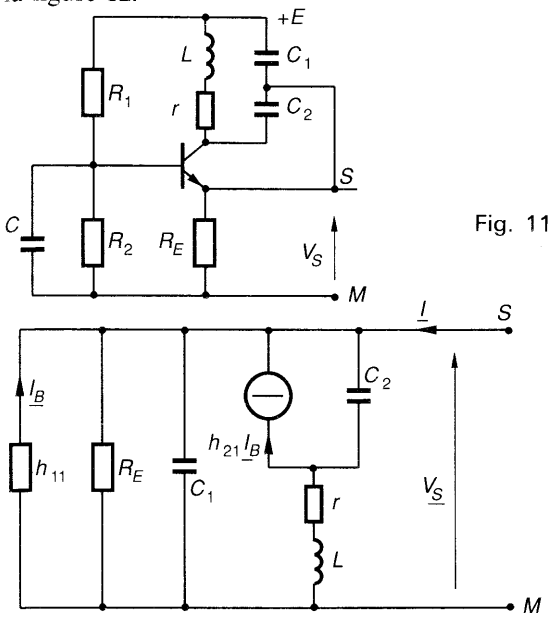


Fig. 11

Fig. 12

Soit $\underline{Y}_S$ l'admittance vue entre les deux points de sortie S et M.

Dire que le système entre en oscillation, revient à dire qu'il est susceptible de faire apparaître une tension v_S non nulle, en absorbant un courant i nul, ce qui se traduit par

$$\underline{Y}_S = \frac{\underline{I}}{\underline{V}_S} = 0.$$

Déterminons donc l'admittance vue entre les points de sortie.

La figure 13 donne les modifications successives de la branche contenant le générateur de courant $h_{21}\underline{I}_B$, obtenues par équivalences de générateurs de Thévenin et de générateurs de Norton.

Le générateur de courant

$$\frac{h_{21}\underline{I}_B}{jC_2\omega} \times \frac{1}{\left(r + jL\omega + \frac{1}{jC_2\omega}\right)}$$

impose dans sa branche un courant proportionnel à la tension $h_{11}\underline{I}_B$ à ses bornes. Il peut donc être remplacé par l'impédance :

$$\frac{h_{11}jC_2\omega}{h_{21}}\left(r + jL\omega + \frac{1}{jC_2\omega}\right).$$

L'admittance vue entre les points S et M du schéma de la figure 12 résulte donc de la mise en parallèle des impédances,

$$h_{11},\quad R_E,\quad \frac{1}{jC_1\omega},\quad r + jL\omega + \frac{1}{jC_2\omega}$$

et $\dfrac{h_{11}jC_2\omega}{h_{21}}\left(r + jL\omega + \dfrac{1}{jC_2\omega}\right)$, soit

$$\underline{Y}_S = \frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E} + jC_1\omega + \frac{1}{r + jL\omega + \frac{1}{jC_2\omega}}\left(1 + \frac{h_{21}}{jh_{11}C_2\omega}\right).$$

La condition $\underline{Y}_S = 0$ conduit à :

$$\left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E} + jC_1\omega\right)\left(r + jL\omega + \frac{1}{jC_2\omega}\right) + 1 - j\frac{h_{21}}{h_{11}C_2\omega} = 0$$

- L'égalité des parties réelles donne

$$\left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E}\right)r + 1 + \frac{C_1}{C_2} = LC_1\omega^2.$$

Dans l'hypothèse où $\left(\dfrac{1}{h_{11}} + \dfrac{1}{R_E}\right)r$ est négligeable par rapport à $1 + \dfrac{C_1}{C_2}$ il vient :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}}} \quad \textbf{condition de pulsation.}$$

- L'égalité des parties imaginaires donne

$$jrC_1\omega + \left(jL\omega - \frac{j}{C_2\omega}\right)\left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E}\right) - \frac{jh_{21}}{h_{11}C_2\omega} = 0.$$

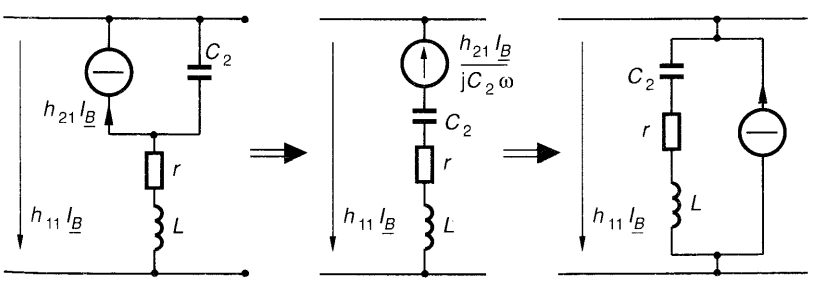


Fig. 13

soit

$$rC_1C_2\omega^2 + (LC_2\omega^2 - 1)\left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E}\right) = \frac{h_{21}}{h_{11}},$$

où compte tenu de la condition de pulsation $(LC_1C_2\omega^2 \approx C_1 + C_2)$:

$$r\frac{C_1 + C_2}{L} + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E}\right) = \frac{h_{21}}{h_{11}}$$

condition d'amplification.

REMARQUE

Pour une valeur fixe de la capacité C_2, la condition d'amplification ne peut être satisfaite lorsque C_1 tend vers zéro ou vers l'infini. Comme pour l'oscillateur à déphasage, il existe une valeur optimale de C_1 qui nécessite une valeur minimale du gain en courant h_{21}.

4.3. OSCILLATEUR À QUARTZ

Un quartz piézo électrique possède des électrodes collées sur deux faces opposées. Si on applique une différence de potentiel entre ces électrodes, des déformations apparaissent dans le cristal. Du point de vue électrique, on peut décrire le cristal par le schéma de la figure 14, dans lequel la capacité C' est très grande par rapport à C.

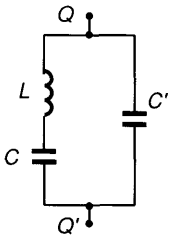


Fig. 14

Ordres de grandeur : $L \approx 0{,}2$ H, $C' \approx 25$ PF, $C \approx 0{,}05$ PF.

L'admittance vue entre les points Q et Q' s'écrit :

$$\underline{Y} = jC'\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= jC'\omega + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$= \frac{j(C + C')\omega - LC\omega^2 jC'\omega}{1 - LC\omega^2}$$

et peut être mise sous la forme

$$\underline{Y} = j(C + C')\omega \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2}$$

avec $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\omega_P = \frac{1}{\sqrt{\frac{LCC'}{C + C'}}}$.

Compte tenu de $C \ll C'$, la pulsation ω_P qui s'écrit

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{C + C'}{C'}} = \omega_S\sqrt{1 + \frac{C}{C'}}$$

est peu différente de $\omega_P = \omega_S\left(1 + \frac{C}{2C'}\right)$;

soit $\omega_P - \omega_S = \omega_S\frac{C}{2C'} \ll \omega_S$. Les deux pulsations ω_P et ω_S dont la différence est très faible par rapport à ω_S, sont très voisines.

Ordre de grandeur : $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 10^7$ rad/s et $\omega_P - \omega_S = \omega_S\frac{C}{2C'} \approx 10^4$ rad/s. Compte tenu de l'expression $\underline{Y} = j(C + C')\omega\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2}$, nous pouvons dresser le tableau suivant :

ω	0	ω_S	ω_P	∞
signe de $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^2$	+	+		−
signe de $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2$	+	−		−
Nature de $\underline{Y}$	capacité	inductance		capacité

Exemple d'oscillateur à quartz

Considérons le schéma de la figure 15 dans lequel le réseau de réaction est constitué par les deux capacités C_1 et C_2 et par le quartz d'admittance $\underline{Y}$.

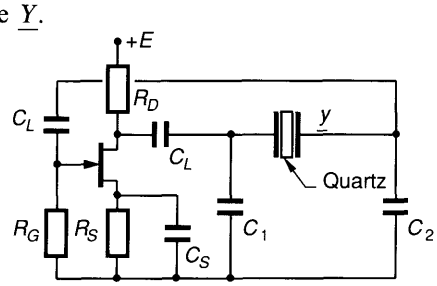


Fig. 15

• A la fréquence d'oscillation et vis-à-vis des petites variations, les capacités C_S et C_L se comportent comme des courts-circuits.

• Le transistor à effet de champ monté en source commune est un amplificateur inverseur. Par comparaison avec la forme « générale » de la figure 8, les impédances $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_1$ constituées respectivement par les capacités C_1 et C_2 sont bien identiques.

• Les oscillations ne sont possibles que si le quartz, qui réalise l'impédance $\underline{Z}_2$, se comporte comme une inductance. La pulsation d'oscillation est alors encadrée par les pulsations ω_S et ω_P qui sont très proches l'une de l'autre. La plage d'oscillation est donc très étroite.

• Du point de vue dynamique le schéma de la figure 15 peut être décrit par le schéma de la figure 16.

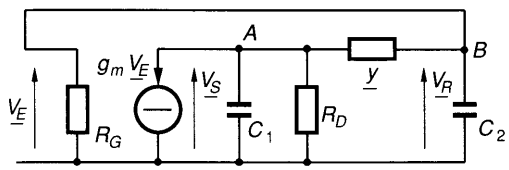


Fig. 16

• La loi des nœuds s'écrit :
Au point A :

$$g_m \underline{V}_E + jC_1\omega\underline{V}_S + \frac{\underline{V}_S}{R_D} + \underline{Y}(\underline{V}_S - \underline{V}_E) = 0.$$

Au point B :

$$\underline{Y}(\underline{V}_E - \underline{V}_S) + \frac{\underline{V}_E}{R_G} + jC_2\omega\underline{V}_E = 0.$$

Soit

$$\begin{cases} \underline{V}_S\left[jC_1\omega + \dfrac{1}{R_D} + \underline{Y}\right] - \underline{V}_E(\underline{Y} - g_m) = 0 \\ \underline{Y}\underline{V}_S - \underline{V}_E\left(\underline{Y} + \dfrac{1}{R_G} + jC_2\omega\right) = 0. \end{cases}$$

Le système possède des solutions différentes de zéro ($\underline{V}_S$ non nul) si le déterminant

$$\begin{vmatrix} jC_1\omega + \dfrac{1}{R_D} + \underline{Y} & -(\underline{Y} - g_m) \\ \underline{Y} & -\left(\underline{Y} + \dfrac{1}{R_G} + jC_2\omega\right) \end{vmatrix}$$

est nul.
Soit

$$-\left(jC_1\omega + \frac{1}{R_D} + \underline{Y}\right)\left(\underline{Y} + \frac{1}{R_G} + jC_2\omega\right) + (\underline{Y} - g_m)\underline{Y} = 0$$

$$\underline{Y}\left[g_m + j(C_1 + C_2)\omega + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_G}\right] + \frac{1}{R_D R_G} - C_1C_2\omega^2 + \frac{jC_1\omega}{R_G} + \frac{jC_2\omega}{R_D} = 0.$$

Sachant que $\underline{Y} = jA(\omega)$

avec $A(\omega) = (C + C')\omega \dfrac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_S}\right)^2}$

a) **L'égalité des parties réelles conduit à :**

$$-(C_1 + C_2)\omega A(\omega) + \frac{1}{R_D R_G} - C_1C_2\omega^2 = 0.$$

Ordre de grandeur : $R_D \approx 1\ \text{k}\Omega$, $R_G \approx 1\ \text{M}\Omega$.
C_1 et $C_2 \approx 10$ pF, $\omega \approx 2\pi \times 10^7$ rad/s.

Le terme $\dfrac{1}{R_D R_G}$ est négligeable par rapport à $C_1C_2\omega^2$ et la condition de fréquence s'écrit :

$$-\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\omega = A(\omega) = (C + C')\frac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_S}\right)^2}\omega$$

soit $$-\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \times \frac{1}{C + C'} = \frac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_S}\right)^2}.$$

L'égalité ne pouvant être satisfaite que si

$$\frac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_S}\right)^2}$$

est négatif : nous retrouvons la condition de fréquence $\omega_S < \omega < \omega_P$.

La représentation de $20 \lg \left| \dfrac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_P}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_S}\right)^2} \right|$ dans les diagrammes de Bode est donnée à la figure 17.

La fréquence d'oscillation se trouve au point d'intersection de l'horizontale

$$20 \lg \frac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)} \times \frac{1}{(C + C')}$$

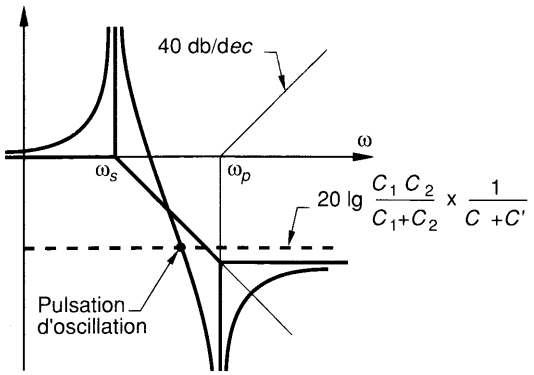


Fig. 17

avec la courbe, qui est quasiment verticale dans l'intervalle $[\omega_S, \omega_P]$. Ainsi la fréquence d'oscillation peut être réglée de façon très fine et sa stabilité est assurée par l'invariance des propriétés du quartz.

b) **L'égalité des parties imaginaires conduit à :**

$$\underline{Y}\left[g_m + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_G}\right] + \frac{jC_1\omega}{R_G} + \frac{jC_2\omega}{R_D} = 0.$$

Compte tenu de la condition de fréquence :

$\underline{Y} = -j\omega\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, il vient

$$g_m + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_G} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\left[\frac{C_1}{R_G} + \frac{C_2}{R_D}\right]$$

$$= \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_D} + \frac{C_1}{C_2}\frac{1}{R_G} + \frac{C_2}{C_1}\frac{1}{R_D}$$

soit $g_m = \dfrac{C_1}{C_2}\dfrac{1}{R_G} + \dfrac{C_2}{C_1}\dfrac{1}{R_D}$.

Remarquons que lorsque le rapport $y = \dfrac{C_1}{C_2}$ tend vers zéro ou vers l'infini, les oscillations sont impossibles. La valeur optimale du rapport $y = \dfrac{C_1}{C_2}$ est celle qui rend le polynôme

$$P = \frac{y}{R_G} + \frac{1}{yR_D}$$

minimal, en annulant sa dérivée :

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{R_G} - \frac{1}{y^2 R_D} = 0$$

soit $y_{opt} = \sqrt{\dfrac{R_G}{R_D}}$,

et les oscillations ne sont possibles que si

$$g_m > \frac{2}{\sqrt{R_G R_D}}.$$

5. DÉTERMINATION DE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Rappelons, compte tenu de la condition d'oscillation ($\underline{A\beta} = 1$), que l'oscillateur, tel qu'il a été défini jusqu'ici présente les inconvénients suivants :

- aucune condition ne fixe l'amplitude du signal de sortie qui est, de ce fait, quelconque;
- la condition d'amplification $|\underline{A\beta}| = 1$ est difficile à maintenir
  - si $|\underline{A\beta}| > 1$ le signal de sortie est distordu,
  - si $|\underline{A\beta}| < 1$ les oscillations disparaissent.

Pour y remédier, et afin de **transformer la condition d'amplification en condition d'amplitude,** on utilise un amplificateur non linéaire.

Sur le schéma synoptique de la figure 18, la relation $V_S = f(V_E)$ imposée par l'amplificateur, entre les valeurs efficaces de v_S et de v_E est représentée sur le graphe de la figure 19.

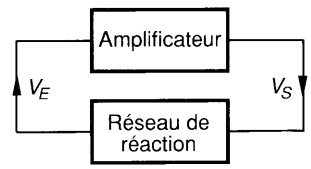


Fig. 18

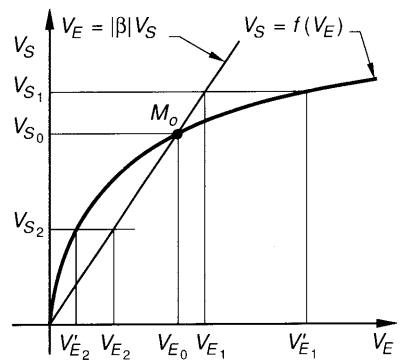


Fig. 19

- A la fréquence pour laquelle $\arg \underline{A\beta} = 0$, le réseau de réaction impose entre les valeurs efficaces V_E et V_S une relation de la forme $V_E = |\beta| V_S$ représentée, sur la figure 19, par une droite qui coupe la courbe $V_S = f(V_E)$ au point M_0 de coordonnées V_{E_0}, V_{S_0}.
- Les valeurs efficaces V_E et V_S devant satisfaire le système

$$\begin{cases} V_S = f(V_E) \\ V_E = |\beta| V_S \end{cases}$$

le point de fonctionnement se fixe en M_0, et la valeur efficace de la tension de sortie, égale à V_{S_0}, est parfaitement déterminée.

• Le point M_0 correspond à un équilibre stable, en effet :

– Si la valeur efficace V_S devient $V_{S_1} > V_{S_0}$ (*fig.* 19), le réseau de réaction fait apparaître une valeur V_{E_1} de V_E inférieure à la valeur V'_{E_1} qui permettrait à l'amplificateur de maintenir la valeur V_{S_1} de V_S. L'amplitude des oscillations décroît et le point de fonctionnement revient vers M_0.

– Si la valeur efficace de V_S devient $V_{S_2} < V_{S_0}$ (*fig.* 19) le réseau de réaction fait apparaître une valeur V_{E_2} de V_E supérieure à la valeur V'_{E_2} nécessaire à l'amplificateur pour maintenir la valeur V_{S_2} de V_S. L'amplitude des oscillations augmente et le point de fonctionnement revient vers M_0.

REMARQUE

Il est nécessaire que la concavité de la courbe $V_S = f(V_E)$ soit orientée vers le bas. S'il en était autrement, on montrerait, comme précédemment que le point M_0 correspond à un équilibre instable.

5.1. EXEMPLE DE L'OSCILLATEUR À PONT DE WIEN

Le réseau de réaction d'un oscillateur à pont de Wien est rappelé à la figure 20.

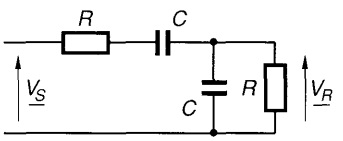


Fig. 20

La fonction de transfert $\underline{\beta} = \dfrac{\underline{V_R}}{\underline{V_S}}$ est

$$\underline{\beta} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

A la pulsation $\omega = \dfrac{1}{RC}$ pour laquelle Arg $\underline{\beta} = 0$,

le module de β est égal à $|\beta| = \dfrac{1}{3}$.

On réalise un amplificateur non linéaire par le dispositif de la figure 21.

Si la tension $v_E = v_{DS}$ reste inférieure à 100 mV, le transistor se comporte entre drain et source comme une résistance variable, de la forme :

$$R_{DS} = \frac{R_0}{1 - \dfrac{U}{V_{GS\,off}}}$$

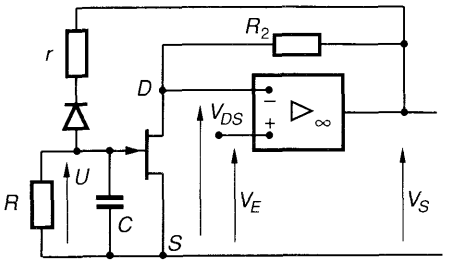


Fig. 21

où $V_{GS\,off}$ est la tension de seuil de J.FET, et U une tension continue telle que $V_{GS\,off} < U < 0$.

L'amplification $A = \dfrac{v_S}{v_E}$ s'établit ainsi à

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_{DS}} = 1 + \frac{R_2}{R_0}\left(1 - \frac{U}{V_{GS\,off}}\right)$$

La tension U est obtenue à partir de la tension de sortie v_S par redressement et filtrage. Si les tensions v_E et v_S sont sinusoïdales de pulsation ω, et si la capacité C est telle que $RC\omega \gg 1$, la tension U est négative et pratiquement constante. En supposant que la diode est parfaite, la tension U dépend de la valeur efficace V_S de v_S par une relation de la forme $U = -aV_S$.

Dans ces conditions et en régime harmonique la fonction de transfert en tension de l'amplificateur s'écrit $\underline{A} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = 1 + \dfrac{R_2}{R_0}\left(1 + \dfrac{aV_S}{V_{GS\,off}}\right)$.

Ce qui conduit à la relation entre valeurs efficaces :

$$\frac{V_S}{V_E} = 1 + \frac{R_2}{R_0} + \frac{aV_S R_2}{R_0 V_{GS\,off}}$$

$$V_S\left[1 - \frac{aR_2}{R_0}\frac{V_E}{V_{GS\,off}}\right] = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right)V_E$$

et

$$V_S = \frac{\left(1 + \dfrac{R_2}{R_0}\right)V_E}{1 - \dfrac{aR_2}{R_0} \times \dfrac{V_E}{V_{GS\,off}}}.$$

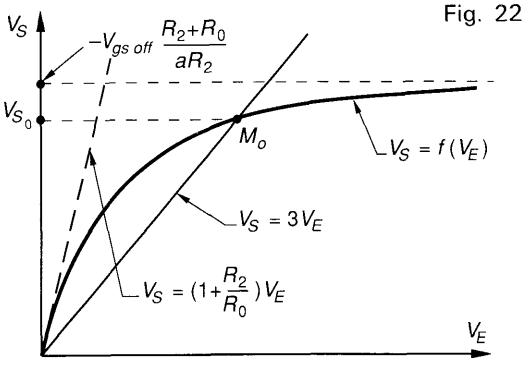


Fig. 22

Sachant que $V_{GS\,off} < 0$, la courbe $V_S = f(V_E)$ est décrite à la figure 22. Elle a bien l'allure souhaitée et la valeur efficace V_{S_0} de la tension de sortie v_S correspond à l'ordonnée du point d'intersection M_0 de la courbe $V_S = f(V_E)$ et de la droite $V_S = 3V_E$.

5.2. EXEMPLE DE L'OSCILLATEUR COLPITTS

Rappelons que, pour le transistor bipolaire de la figure 23, le courant de collecteur i_C est lié à la tension base émetteur v_{BE} par la relation

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \quad \text{avec} \quad V_T \approx 30 \text{ mV}.$$

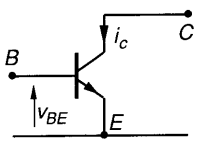


Fig. 23

Supposons que la tension v_{BE} varie sinusoïdalement autour d'une valeur de polarisation V_{BE},

soit $v_{BE} = V_{BE} + V_e \cos \theta$
avec $\theta = \omega t$.

Le courant i_C s'écrit alors :

$$i_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} e^{\frac{V_e}{V_T}\cos\theta}.$$

Si l'amplitude des variations sinusoïdales de v_{BE} est faible par rapport à V_T, alors, $x = \dfrac{V_e}{V_T} \ll 1$ et un développement limité au premier ordre conduit à :

$$i_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}\left(1 + \frac{V_e}{V_T}\cos\theta\right) = I_C + I_c \cos\theta,$$

avec

$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$ courant de polarisation de collecteur

$I_c = I_C \dfrac{V_e}{V_T}$ amplitude des variations sinusoïdales de i_C.

Du point de vue des petites variations sinusoïdales le fonctionnement du transistor peut ainsi être décrit par le schéma de la figure 24 avec

$$g_m = \frac{I_c}{V_e} = \frac{I_C}{V_T}.$$

Si l'amplitude des variations sinusoïdales de v_{BE}, n'est pas très faible par rapport à V_T, le courant de collecteur $i_C = e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} e^{x\cos\theta}$ n'est pas sinusoïdal. Il est cependant périodique et peut être décomposé en série de Fourier

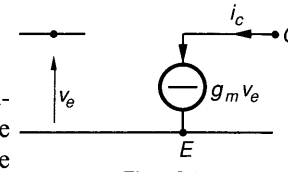


Fig. 24

$$i_C = I_{C_0} + I_{C_1} \cos\theta + \ldots$$

avec $I_{C_0} = e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} F_0$, $I_{C_1} = e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} F_1$.

et
$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\, d\theta \\ F_1 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos\theta\, d\theta. \end{cases}$$

Supposons que la polarisation soit telle que la valeur moyenne I_{C_0} de i_C reste constante lorsque $x = \dfrac{V_e}{V_T}$ varie (la tension V_{BE} s'ajustant de façon à satisfaire

$$I_{C_0} = e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\, d\theta = \text{Cte} = I_C\Big).$$

Il vient alors : $\dfrac{I_{C_1}}{I_{C_0}} = \dfrac{F_1}{F_0}$

et $I_{C_1} = \dfrac{F_1}{F_0} I_{C_0} = \dfrac{F_1}{F_0} I_C = \dfrac{F_1}{F_0} g_m V_T.$

Du point de vue du premier harmonique $I_{C_1} \cos\theta$, le transistor peut être décrit par le schéma de la figure 25 avec

$$G_m = \frac{I_{C_1}}{V_e} = \frac{F_1}{F_0} g_m \frac{V_T}{V_e} = \frac{F_1}{F_0} \times \frac{g_m}{x}.$$

Les intégrales F_0 et F_1 peuvent être calculées numériquement et les résultats correspondants sont consignés dans le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
F_0	1	1,06	1.27	1,65	2,28	3,29	4,88	7,38	11,3	17,5	27,2
F_1	0	0,516	1,13	1,96	3,18	5,03	7,91	12,4	19,5	30,8	48,7
$\dfrac{G_m}{g_m}$	1	0,97	0,89	0,79	0,70	0,61	0,54	0,48	0,43	0,39	0,36

La dernière ligne de ce tableau montre que, du point de vue de l'harmonique 1, la transconductance G_m diminue lorsque $x = \dfrac{V_e}{V_T}$ augmente.

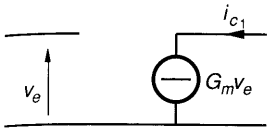


Fig. 25

Considérons dès lors l'oscillateur Colpitts de la figure 9. Le circuit de réaction (C_1, L, C_2) étant très sélectif, la tension ramenée sur l'entrée du transistor est sinusoïdale.

Supposons qu'à la mise sous tension

$$(V_e = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow G_m = g_m)$$

la condition d'amplification soit plus que satisfaite ($|\underline{A\beta}| > 1$). Les oscillations apparaissent et croissent. L'amplitude V_e du signal sinusoïdal d'entrée augmente ainsi donc que $x = \dfrac{V_e}{V_T}$.

Compte tenu du tableau précédent, la transconductance G_m du transistor diminue entraînant une décroissance de l'amplification A de l'amplificateur et limitant l'amplitude des oscillations.

Ainsi la décroissance de G_m avec $x = \dfrac{V_e}{V_T}$ permet de stabiliser l'amplitude V_e des oscillations à une valeur telle que $|\underline{A\beta}| = 1$, transformant ainsi la condition d'amplification en condition d'amplitude.

EXERCICES

1.

1° Un oscillateur à réaction comporte deux quadripôles associés de la manière suivante (*fig.* 1) :

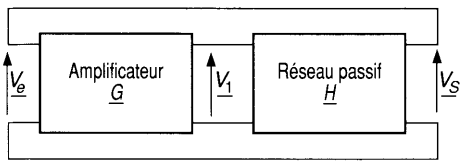


Fig. 1

Dans la pratique, pour ce type d'oscillateur, l'amplificateur non sélectif fonctionne à la limite du régime non-linéaire et le réseau passif est linéaire.

a) Préciser le rôle de chacun des quadripôles qui constituent l'oscillateur.
Dire pourquoi le signal à l'entrée de l'oscillateur $v_e(t)$ est sensiblement sinusoïdal, même si l'amplificateur sort quelque peu du régime linéaire.

b) Ecrire la condition limite d'entretien des oscillations.

2° Le schéma de l'oscillateur est le suivant (*fig.* 2) :

On donne : $R_C = 3{,}9$ kΩ; $R_E = 90$ Ω; $C_1 = 5{,}11$ nF; $C_2 = 3{,}86$nF.

L'impédance présentée par la capacité C_3 est négligeable à la fréquence de travail.

En régime dynamique le transistor est décrit par le modèle de la figure 3 dans lequel i_b, v_{be}, i_C et v_{Ce} constituent respectivement les variations des grandeurs totales $\mathfrak{I}_B$, $\mathfrak{V}_{BE}$, $\mathfrak{I}_C$, $\mathfrak{V}_{CE}$.

$\beta = 100$, $\quad r = 1$ kΩ (on négligera 1 devant β).

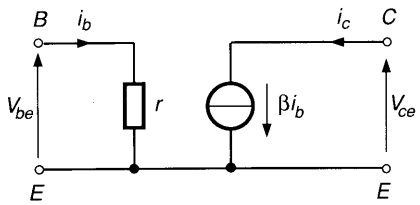


Fig. 3

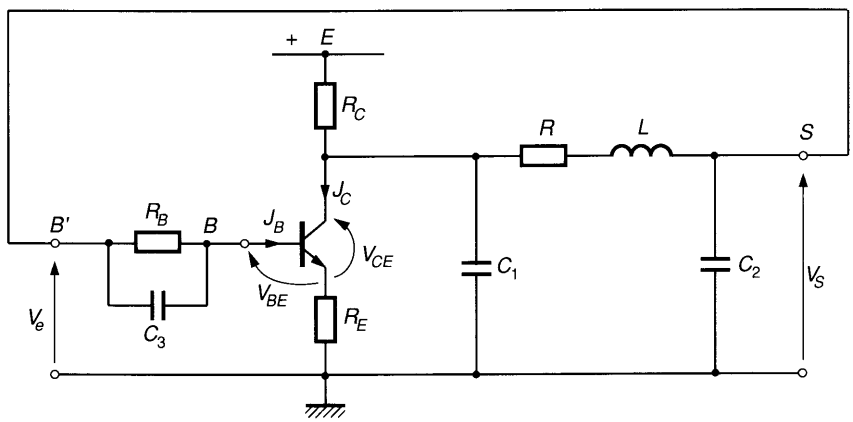


Fig. 2

Dessiner un modèle dynamique de l'ensemble du circuit, que l'on présentera de manière à faire apparaître à gauche la tension d'entrée v_e et à droite la tension de sortie v_s.

3° Afin de déterminer les conditions d'oscillation, on suppose ouverte la boucle de réaction SB' de l'oscillateur.

a) Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}$ de la chaîne ouverte.

Écrire la condition que doit remplir $|\underline{Z}_e|$ pour que son influence sur la sortie de la chaîne soit négligeable lors de la fermeture de celle-ci.

b) En supposant que la condition précédente est vérifiée, déterminer la transmittance en chaîne ouverte du système :

$$\underline{T}(j\Omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}.$$

c) Quelles sont, en fonction des éléments du montage, les conditions sur $\underline{T}(j\Omega)$ pour que les oscillations puissent exister?

4° On donne les valeurs numériques suivantes :

$$L = 72\ \mu H \quad \text{et} \quad R = 75\ \Omega.$$

a) Déterminer l'expression littérale de la pulsation Ω_0 des oscillations en écrivant que la condition de phase est vérifiée.

Montrer que compte tenu de la valeur des éléments, Ω_0 ne dépend pratiquement que de L_0, C_1 et C_2.

(On conservera cette expression simplifiée pour la suite du problème.) Calculer la valeur numérique de la fréquence F_0 des oscillations.

b) Montrer que la condition sur l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ est vérifiée.

e) On pose $A_{v0} = \dfrac{R_C\beta}{r + \beta R_E}$, soit $A_{v0} = 39$.

Déterminer en fonction de R, R_C, C_1, C_2 et L_0, la valeur minimale de A_{v0} pour qu'il y ait entretien des oscillations.

Commenter brièvement.

2. 1° *Montage amplificateur*

On rappelle qu'un T.E.C., utilisé en dipôle entre drain et source, est équivalent à une résistance variable R_{DS}, fonction de la tension *source-grille* U, lorsque la tension drain-source V_{DS} est maintenue très faible devant la tension de pincement U_p (suivant les conventions de signes de la figure 1).

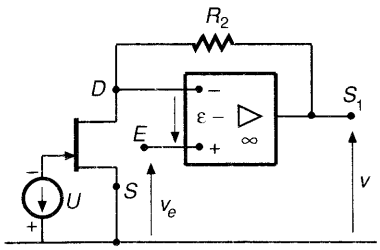


Fig. 1

On admettra que R_{DS} est définie de la façon suivante, avec $R_0 = 200\ \Omega$ et $U_p = 3$ V :

- si $U < U_p$, $R_{DS} = \dfrac{R_0}{1 - \dfrac{U}{U_p}}$;
- si $U \geqslant U_p$, R_{DS} est infiniment grande.

Ce dipôle résistant fait partie du circuit de la figure 1, utilisant un amplificateur linéaire que l'on idéalisera (amplification infinie, résistance d'entrée infinie, résistance de sortie nulle) et une résistance $R_2 = 20\ k\Omega$.

a) Étudier et représenter graphiquement les variations de l'amplification en tension

$$A_v = \frac{V}{V_e} \quad \text{en fonction de } U, \text{ lorsque } \quad 0 \leqslant U < 4\ \text{V}.$$

b) La polarisation est obtenue en redressant la tension de sortie de l'amplificateur à l'aide du montage représenté figure 2. On admettra les relations suivantes entre U et V:

- si $2 \leqslant V < 15$, $U = \dfrac{V}{5} - 0{,}4$ (en volts);
- si $V < 2$, $U = 0$.

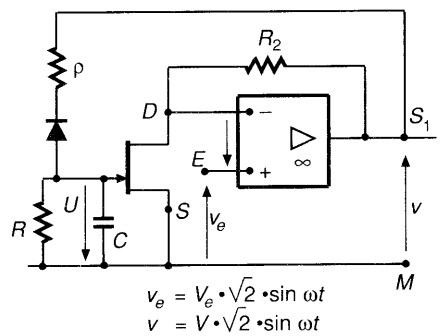


Fig. 2

α) Pour chacun de ces deux cas, établir la relation entre V_e et V.

β) Tracer la courbe représentative de la fonction $V = f(V_e)$.

γ) On s'impose $|V_{DS}| \leqslant 200$ mV (pour que le dipôle DS reste linéaire).

Calculer la valeur limite de V.

2° *Montage oscillateur*

Le schéma de principe de l'amplificateur suivant (*fig.* 3) comporte un amplificateur linéaire idéalisé (voir question 1°). On note kR la valeur de la portion de résistance comprise entre les points S_2 et M.

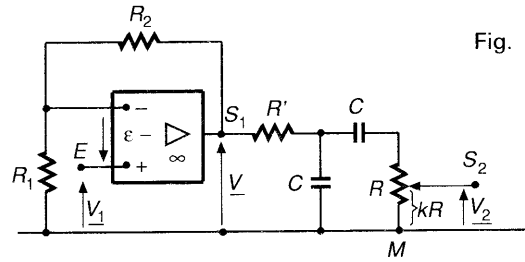


Fig. 3

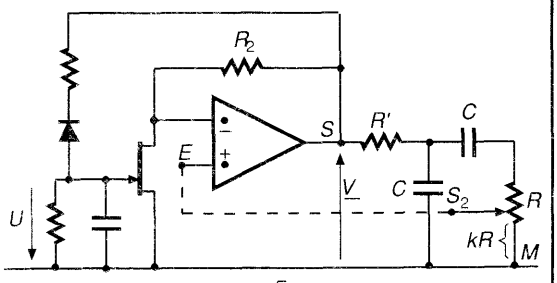
$\underline{V}$, $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ désignent, maintenant, les notations complexes des tensions correspondantes. On fixe $R' = R = 1\,000\ \Omega$ et $C = 0{,}1\ \mu F$ (microfarad).

a) Calculer le rapport complexe

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \quad \text{(poser } x = RC\omega\text{)}.$$

b) Quelles sont les deux conditions pour que $\underline{V}_2 = \underline{V}_1$ en régime sinusoïdal?

c) On remplace l'amplificateur par le dispositif étudié dans la question 1°, *b*), et on relie les points E et S_2 (voir figure 4).



$v = V\sqrt{2}\sin\omega t$

Fig. 4

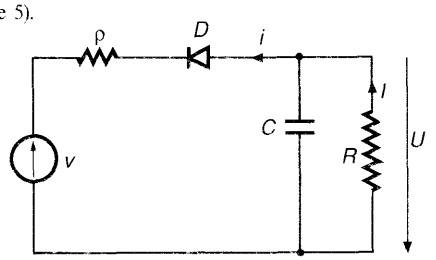
α) Montrer qu'une oscillation de fréquence F_0 peut s'amorcer et se stabiliser dans le domaine linéaire du dispositif.

β) Calculer k pour que l'amplitude de l'oscillation permanente ($V\sqrt{2}$), soit égale à 10 volts.

γ) Comparer cet oscillateur à celui que l'on peut réaliser en reliant les points E et S_2 de l'amplificateur proposé figure 3.

3° *Montage redresseur*

Un générateur de f.é.m., $v = V\sqrt{2}\,.\sin\omega t$, de période T, alimente un circuit de redressement à travers une résistance ρ. La diode D est supposée parfaite ($V_D = 0$ pour $i > 0$). En supposant $RC \gg T$, on admet que le groupe résistance condensateur RC se comporte comme une f.c.é.m. pratiquement constante, indéterminée, notée : U (voir figure 5).



$v = V\sqrt{2}\sin\omega t$

Fig. 5

a) Étudier et représenter graphiquement les variations du courant i à travers la diode en fonction du temps. On désignera par aT la durée de conduction de la diode.

b) Calculer la valeur moyenne I_0 du courant i, en fonction de V, a et ρ. Comparer I_0 au courant I traversant R.

c) Sachant que l'on veut avoir $U = 2$ V lorsque

$$V\sqrt{2} = 10 \text{ volts},$$

calculer le rapport $\dfrac{\rho}{R}$.

3. Oscillateur colpitts

1° Soit le montage ci-dessous (*fig.* 1) C_E et C_B se comportent comme des court-circuits en régime alternatif. On prendra pour le transistor, le schéma équivalent (*fig.* 2) pour les petites variations.

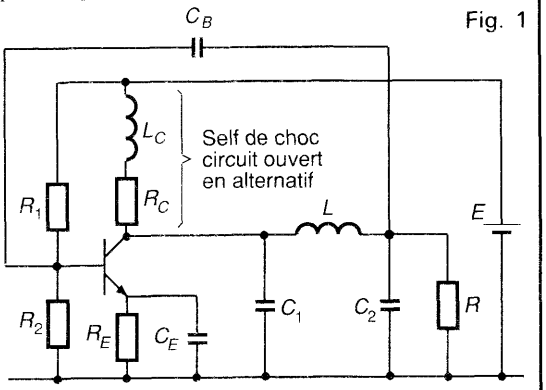


Fig. 1

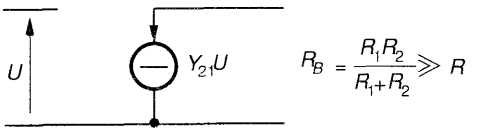


Fig. 2

a) Montrer que le schéma équivalent alternatif du montage se ramène au schéma de la figure 3.

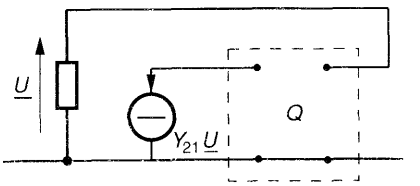


Fig. 3

Calculer les paramètres $\underline{Z}_{22}$ et $\underline{Z}_{21}$ du quadripôle Q.

b) Établir, en fonction de $\underline{Z}_{22}$, $\underline{Z}_{21}$, R et Y_{21} la condition d'oscillation du montage.

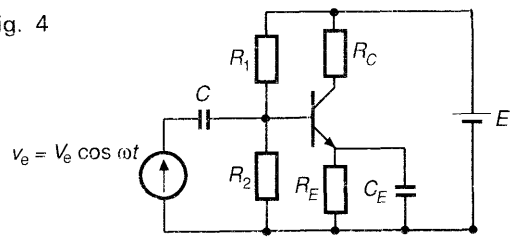
c) Déduire, de la condition précédente, la fréquence d'oscillation, ainsi que la valeur de Y_{21} en fonction de R, C_1, C_2.

d) En réalité, Y_{21} n'est pas indépendant de l'amplitude des oscillations. On posera :

- $Y_{21} = g_m$ pour les petites variations;
- $Y_{21} = G_m$ pour les fortes amplitudes.

Considérons le montage de la figure 4 : C et C_E sont des courts-circuits pour l'alternatif.

Fig. 4



On rappelle que, pour un transistor bipolaire,

$$i_E = i_C = I_{ES} \cdot \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right) \quad \text{avec} \quad V_T = 30 \text{ mV}.$$

2° On pose $v_{BE} = V_{BE0} + V_e \cdot \cos\theta$ avec $\theta = \omega t$ et $x = \dfrac{V_e}{V_T}$.

Pour les petites amplitudes $x \ll 1$.

a) Interpréter le terme V_{BE0}.

En posant : $i_E = I_{E0} + I_e \cdot \cos\theta$, et en effectuant un développement de $\exp(x \cdot \cos\theta)$ limité au premier ordre, calculer $g_m = I_e/V_e$, en fonction de I_{E0} et V_T.

Application numérique : $I_{E0} = 3$ mA.

b) Pour les fortes amplitudes, x n'est plus très petit par rapport à 1.

α) Quand on fait varier, à partir d'une valeur très faible, et en l'augmentant l'amplitude V_e du signal d'entrée, la valeur moyenne de v_{BE} change. Pourquoi?

β) Exprimer i_E sous la forme d'une série de Fourrier limitée au terme constant et au premier harmonique :

$$i_E = I'_{E0} + I_{E1} \cdot \cos\theta.$$

On pose :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\,d\theta \quad \text{et} \quad F_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos\theta\,.\,d\theta.$$

Calculer I'_{E0} et I_{E1} en fonction de F_0, F_1, I_{ES}, V_{BE0}.

On modifie la polarisation de façon à maintenir constante la valeur moyenne du courant i_E ($I_{E0} = I'_{E0}$). En déduire

$G_m = \dfrac{I_{E1}}{V_e}$ en fonction de F_0, F_1, g_m, x.

On donne le tableau ci-dessus.

Complétez-le pour établir la relation entre G_m et x.

En déduire, à partir du 1° *d*), l'amplitude des oscillations.

Existe-t-il une valeur minimale de R.

Application numérique :

$C_1 = 68$ pF; $C_2 = 33$ pF; $L = 6$ µH; $R = 50$ Ω.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
F_0		1,06	1,27	1,65	2,28	3,29	4,88	7,38	11,3	17,5	27
F_1		0,516	1,13	1,96	3,18	5,03	7,91	12,4	19,5	30,8	48,7
G_m											

Annexe : machines à courant continu

1. DESCRIPTION D'UNE MACHINE À COURANT CONTINU

La machine à courant continu (*fig.* 1) est constituée de deux pièces ferromagnétiques appelées respectivement stator et rotor.

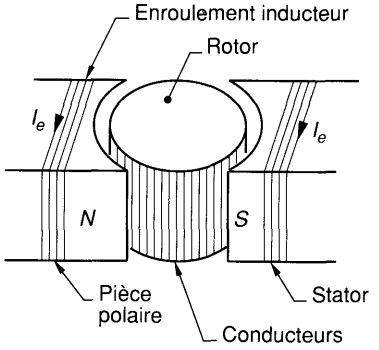
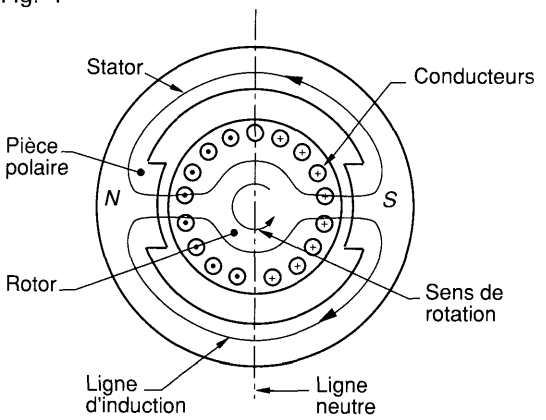


Fig. 1



1.1. L'INDUCTEUR OU STATOR

Il possède un nombre pair de pièces polaires sur lesquelles est bobiné un enroulement parcouru par un courant inducteur I_e.

Pour simplifier l'étude, nous limiterons à deux le nombre de pièces polaires.

Ce courant I_e est à l'origine de lignes d'induction et transforme les pièces polaires en pôles respectivement Nord (N) et Sud (S).

1.2. L'INDUIT OU ROTOR

L'induit porte à sa périphérie des conducteurs régulièrement répartis dans des encoches. Ces conducteurs se déplacent dans le champ magnétique produit par l'inducteur; il y apparaît ainsi des forces électromotrices induites.

Compte tenu du sens de rotation du rotor et du sens d'orientation des lignes d'induction, le sens de la force électromotrice induite dépend de la nature du pôle en regard duquel se trouve le conducteur.

Entre pôle Nord et pôle Sud, il apparaît une ligne neutre telle que la force électromotrice induite dans les conducteurs se trouvant sur cette ligne soit nulle.

La symétrie de construction de la machine est telle que deux conducteurs symétriques par rapport à la ligne neutre sont le siège de deux forces électromotrices égales et opposées.

2. GÉNÉRATRICE À COURANT CONTINU

Pour un fonctionnement en génératrice, un dispositif extérieur provoque la rotation de l'induit à une vitesse Ω. La machine à courant continu doit faire apparaître une force électromotrice susceptible de fournir une énergie électrique. Elle transforme ainsi l'énergie mécanique nécessaire à la rotation de l'induit en énergie électrique.

Les conducteurs de l'induit doivent donc être reliés entre eux de telle sorte que les forces électromotrices dont ils sont le support, s'ajoutent et que la force électromotrice totale reste sensiblement constante quelle que soit la position du rotor par rapport au stator. La figure 2 donne un exemple de connexion des conducteurs du rotor.

Les conducteurs sont répartis à la périphérie de l'induit, à raison de deux conducteurs par encoche.

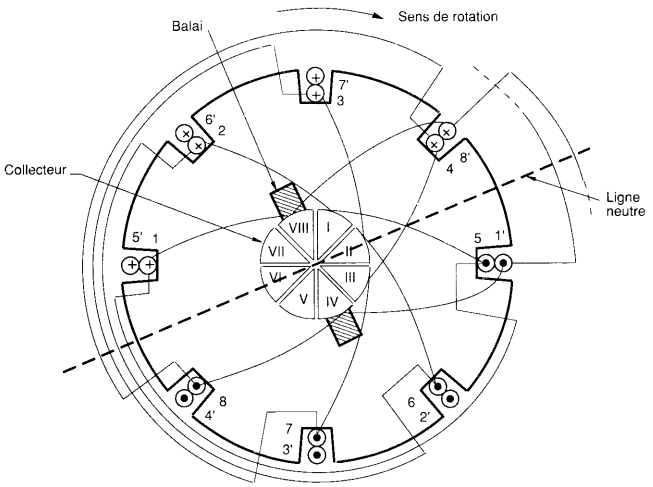


Fig. 2

Les liaisons entre brins sont réalisées de part et d'autre de l'induit. Pour des facilités de dessin, les connexions sur la face arrière du rotor sont représentées à sa périphérie. Sur la face avant, les connexions entre brins sont réalisées par l'intermédiaire du **collecteur** qui est constitué d'un ensemble de lames conductrices (numérotées ici de I à VIII) séparées par un isolant. Le cylindre du collecteur est solidaire de l'induit et tourne à la même vitesse.

Sur le collecteur, frottent deux pièces conductrices fixes appelées **balais.**

Les brins sont connectés de telle sorte que les forces électromotrices s'ajoutent. Partant du conducteur 1, on rencontre successivement les conducteurs 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8. A partir du conducteur 8, la symétrie impose de réaliser la connexion 8-1′. Il apparaît ainsi sur la lame IV du collecteur deux forces électromotrices en opposition. Le même phénomène apparaît sur la lame VIII sur laquelle s'opposent les forces électromotrices des conducteurs 1 et 8′.

Les balais sont calés sur les lames du collecteur sur lesquelles les forces électromotrices arrivent en opposition.

Schématiquement, on réalise ainsi le générateur de la figure 3.

Il apparaît entre les balais deux ensembles de forces électromotrices montées en opposition et qui par symétrie ont la même valeur. En l'absence de charge extérieure, la maille apparaissant sur la figure 3 n'est parcourue par aucun courant.

Chaque ensemble de force électromotrice est appelé **voie d'enroulement.**

Il apparaît entre les balais une force électromotrice correspondant à la mise en série de toutes les forces électromotrices d'une voie d'enroulement.

Sur la figure 4, l'ensemble forces électromotrices-lames du collecteur tourne entre les balais à la manière d'une « chenille ». Pour une rotation de $1/8^{e}$ de tour, les conducteurs 4, 8, 4′ et 8′ franchissent la ligne neutre (*fig.* 2) les forces électromotrices qui y apparaissent changent de signe et l'on retrouve sur la figure 3 la même disposition. Le seul changement consistant en une permutation circulaire des indices.

La force électromotrice entre les balais garde ainsi toujours le même signe et reste sensiblement constante si on néglige l'ondulation résultant du passage d'une lame du collecteur à la suivante au contact des balais.

Si une charge extérieure est placée entre les balais, il y apparaît un courant qui par symétrie se répartit uniformément sur les deux voies d'enroulement.

2.1. FORCE ÉLECTROMOTRICE À VIDE

La force électromotrice mesurée entre les balais a l'allure décrite sur la figure 4.

Elle présente, autour d'une valeur moyenne E une ondulation dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse de rotation et au nombre de lames du collecteur.

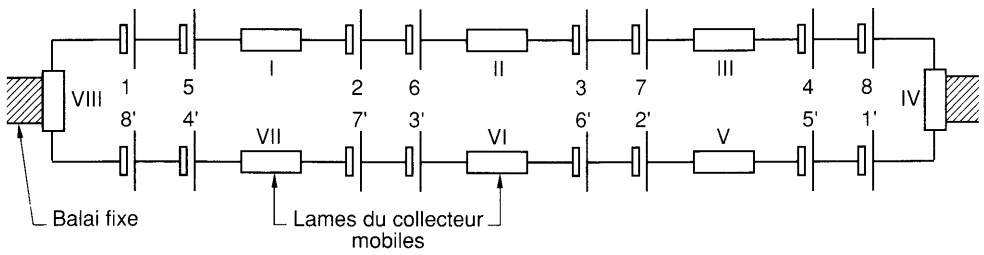


Fig. 3

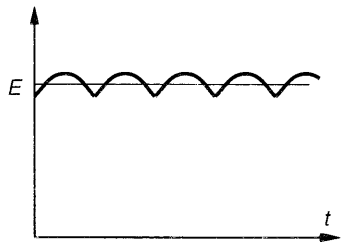


Fig. 4

Soient : N, la vitesse de rotation en tours par seconde,
n, le nombre total de conducteurs;
Φ, le flux total par pôle;
$2a$, le nombre de voies d'enroulement;
$2P$, le nombre de pôles.

Afin de calculer la valeur moyenne E de la force électromotrice considérons le temps Δt nécessaire pour qu'un conducteur d'une voie d'enroulement prenne la place de celui qui le précède sur la même voie (*fig.* 5).

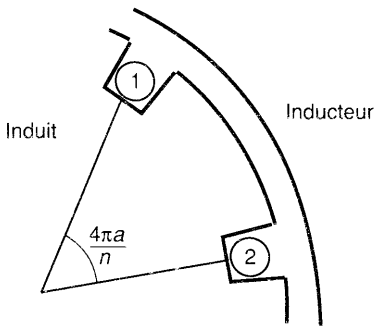


Fig. 5

Par symétrie le nombre de conducteurs par voie d'enroulement est $\frac{n}{2a}$, l'angle séparant deux conducteurs consécutifs d'une même voie est $\frac{2\pi}{\frac{n}{2a}} = \frac{4\pi a}{n}$. Sur la figure 5, le temps Δt nécessaire pour que le conducteur 1 prenne la place qu'occupait le conducteur 2 est tel que :

$$2\pi N\ \Delta t = \frac{4\pi a}{n}, \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{2a}{nN}.$$

Pendant ce temps Δt le conducteur 1 coupe un flux $\Delta\Phi$. Il est ainsi le support d'une force électromotrice

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = nN\,\frac{\Delta\Phi}{2a}.$$

La force électromotrice de la machine est la somme de toutes les forces électromotrices d'une même voie d'enroulement, soit :

$$E = \sum e = \frac{nN}{2a} \sum \Delta\Phi.$$

$\sum \Delta\Phi$ est le flux coupé par l'ensemble des conducteurs d'une voie d'enroulement dans la rotation qui fait passer un conducteur à la place qu'occupait celui qui le précède, $\sum \Delta\Phi$ correspond ainsi au flux total produit par l'inducteur. Il est égal à $2P\Phi$, Φ étant le flux par pôle.
La force électromotrice de la machine s'écrit donc :

$$\boldsymbol{E = \frac{P}{a}\, nN\Phi.}$$

REMARQUES

1. *Le facteur* $\frac{P}{a}\,n$ *dépend des caractéristiques de construction de la machine. C'est une constante, indépendante des conditions de fonctionnement. La force électromotrice à vide peut aussi être retenue sous la forme* $\boldsymbol{E = kN\Phi}$.

2. *Le flux par pôle* Φ *dépend du courant inducteur* I_e *suivant une courbe dont l'allure est donnée à la figure 6. Pour* $I_e < I_{es}$, *la machine n'est pas saturée et le flux est proportionnel au courant inducteur* I_e. *La force électromotrice s'écrit*
$\boldsymbol{E = k_0 N I_e}$.

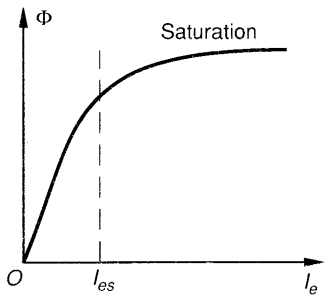


Fig. 6

3. *Pour une machine à flux constant, la force électromotrice ne dépend que de la vitesse de rotation N, soit* $\boldsymbol{E = \mu_0 N}$. *On peut ainsi construire une machine appelée* ***dynamo tachymétrique*** *qui délivre une tension proportionnelle à la vitesse de rotation. Ce fonctionnement correspond à la principale utilisation de la machine en génératrice.*

4. *Pour un fonctionnement en charge le courant d'induit* I_A *provoque une modification du flux magnétique. Ce phénomène appelé* ***réaction d'induit*** *est à l'origine d'une diminution du flux* Φ *par pôle. Les machines étant compensées pour limiter cette décroissance, nous pourrons la négliger dans la plupart des applications.*

2.2. COUPLE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

La génératrice à courant continu, dont l'induit est entraîné à la vitesse Ω rad/s, transforme l'énergie mécanique en énergie électrique.

Si le courant parcourant l'induit est égal à I_A, la génératrice fournit la puissance électrique EI_A.

La conservation de la puissance impose qu'elle exerce sur l'entraînement mécanique le couple électromagnétique résistant $\mathcal{C}_e$ (*fig.* 7) tel que la puissance mécanique $\mathcal{C}_e\Omega$ soit égale à la puissance électrique EI_A. Sachant que la force électromotrice E s'écrit $E = \dfrac{k}{2\pi}\,\Omega\Phi$ $\left(\text{avec } k = \dfrac{P}{a}\,n\right)$,

il vient $\mathcal{C}_e\Omega = \dfrac{k}{2\pi}\,\Omega\Phi I_A$

soit

$$\mathcal{C}_e = \frac{k}{2\pi}\,\Phi I_A.$$

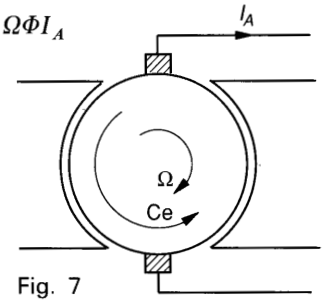


Fig. 7

REMARQUE

Pour une machine à flux constant et en regroupant les relations $E = \lambda\Omega$ *et* $\mathcal{C}_e = \lambda I_A$, *on constate que la constante de proportionnalité* λ *est identique pour les deux formules, à condition de mesurer la force électromotrice en volts, la vitesse de rotation en* radians par seconde, *le couple en mètre-newton, et le courant en ampère. La constante* λ *est alors appelée constante de couple (elle se mesure en mètre-newton par ampère).*

3. MOTEUR À COURANT CONTINU

A partir du fonctionnement décrit par le schéma de la figure 7, supposons que le courant inducteur restant constant, on supprime l'entraînement mécanique extérieur et on alimente l'induit par un générateur qui fournit le même courant I_A. Les conditions de flux et de courant étant inchangées, il en va de même pour le couple électromagnétique $\mathcal{C}_e = \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi I_A$. Ce couple est alors un couple moteur qui entraîne l'induit à une vitesse Ω (*fig.* 8). Le déplacement des conducteurs de l'induit, dans le champ produit par l'inducteur, crée la force contre-électromotrice E qui par un calcul identique à celui effectué pour la génératrice s'établit à $E = \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi\Omega$.

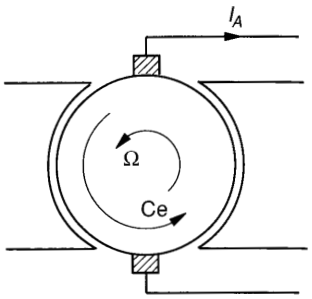


Fig. 8

Le moteur transforme ainsi la puissance électrique EI_A en puissance mécanique $\mathcal{C}_e\Omega$.

Équations fondamentales du moteur

Considérons le moteur à courant continu décrit à la figure 9 :

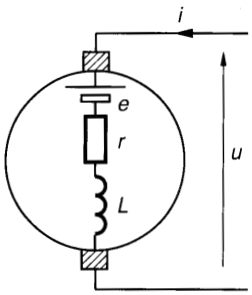


Fig. 9

Soient : u, la tension aux bornes de l'induit;
i, le courant d'induit;
e, la force contre-électromotrice du moteur;
r, la résistance de l'induit;
l, l'inductance de l'induit;
$\mathfrak{J}$, le moment d'inertie du moteur;
f, le coefficient de frottements visqueux provoquant le couple résistant $\mathcal{C}_r = f\Omega$.

Aux équations internes du moteur

$$\mathcal{C}_e = \frac{k}{2\pi}\,\Phi i \quad \text{et} \quad e = \frac{k}{2\pi}\,\Phi\Omega,$$

il faut ajouter la loi d'Ohm $\boldsymbol{u = e + ri + l\dfrac{di}{dt}}$,

et la loi fondamentale de la dynamique

$$\mathfrak{J}\,\frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{C}_e - f\Omega.$$

2e partie

LES SYSTÈMES DE COMMUNICATION

I généralités

Les systèmes de communication permettent de transmettre des informations à l'aide d'un signal se propageant dans l'espace entre une antenne d'émission et une antenne de réception.

1. ONDE PROGRESSIVE

Une onde progressive est constituée par un signal périodique, de période T, qui se déplace à la vitesse C. (Dans l'air les ondes hertziennes se propagent à la vitesse $C = 3 \times 10^8$ m/s.)

Soient respectivement $s_0(t)$ et $s_{x_1}(t)$ les expressions du signal aux abscisses $x = 0$ et $x = x_1$ (*fig.* 1). Le signal se propageant, avec la vitesse C, suivant l'axe Ox, $s_{x_1}(t)$ est égal à la valeur qu'avait $s_0(t)$ à l'instant $t - t_1$, où $t_1 = \dfrac{x_1}{C}$ est le temps nécessaire au signal pour parcourir la distance x_1

soit $$s_{x_1}(t) = s_0\left(t - \frac{x_1}{C}\right).$$

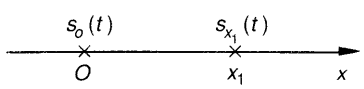


Fig. 1

La fonction $s_0(t)$ étant périodique

$$(s_0(t + T) = s_0(t)),$$

il apparaît une double périodicité.

Périodicité temporelle

En un point donné $x = x_1 = \text{Cte}$, le signal varie périodiquement dans le temps avec la période T.

Périodicité spatiale

À un instant donné $t = t_1 = \text{Cte}$, le signal varie en fonction de l'abscisse x suivant l'expression $s_x(t_1) = s_0\left(t_1 - \dfrac{x}{C}\right)$. La fonction $s_0(t)$ admettant T pour période, $s_x(t_1)$ reprend la même valeur si l'on se déplace spatialement de $\lambda = CT$.

Il apparaît ainsi une périodicité spatiale λ que l'on appelle **longueur d'onde** et qui est égale à la distance parcourue par le signal pendant une période temporelle soit

$$\boxed{\lambda = CT}.$$

À un instant donné, deux points distants d'une longueur d'onde voient la même valeur du signal.

2. TRANSMISSION D'UNE INFORMATION

2.1. SIGNAL PERMANENT

Un signal sinusoïdal *permanent* ne transporte aucune information. En effet supposons, qu'étant isolés de tout, nous entendions *depuis toujours* un sifflement émis par une antenne. Ce signal ne nous apporte aucune information, si ce n'est l'existence de l'antenne émettrice. La disparition de ce sifflement constituerait déjà une première information.

Toute transmission d'information, à l'aide d'un signal sinusoïdal, ne peut se faire qu'en perturbant une de ses caractéristiques (amplitude, fréquence ou phase).

2.2. TRANSMISSION D'UN SIGNAL AUDIO ENCOMBRANT SUR UNE PLAGE DE 50 Hz À 20 kHz

Supposons que l'on veuille transmettre un signal sonore encombrant une plage de fréquence s'étendant de 50 Hz à 20 kHz. La transmission directe de ce signal par onde hertzienne est impossible, en effet :

- il serait impossible, à la réception, de distinguer ce signal de tout autre signal encombrant la même plage de fréquence;
- les dimensions des antennes, étant de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du signal émis, atteindraient des dimensions prohibitives.

Pour un signal de fréquence égale à 1 kHz, la longueur d'onde est égale à

$$\lambda = CT = C/f = \frac{3 \times 10^8}{10^3} = 300 \text{ km (?)};$$

- même s'il était possible de construire l'antenne, la fréquence du signal émis variant entre 50 Hz et 20 kHz, elle ne pourrait être adaptée pour toute la plage de fréquence.

2.3. SIGNAL PORTEUR. SIGNAL MODULANT

Pour toutes ces raisons, le signal à transmettre est utilisé pour moduler une des caractéristiques d'un signal sinusoïdal porteur de fréquence f_C beaucoup plus élevée.

- Pour la modulation d'amplitude, f_C varie de quelques centaines de kilohertz à quelques mégahertz.
- Pour la modulation de fréquence, f_C varie autour d'une centaine de mégahertz.

Remarquons qu'une simple translation de fréquence du signal à transmettre suffirait pour éliminer les inconvénients que nous venons de décrire. Par exemple, une translation de $f_C = 1$ MHz conduirait à un signal encombrant la plage de fréquence s'étendant de 1,000 050 à 1,020 MHz.

- La fréquence f_C de l'onde progressive étant de l'ordre du mégahertz, la longueur d'onde λ est voisine de $\lambda = \frac{C}{f_C} = \frac{3 \times 10^8}{10^6} = 300$ m, et la dimension des antennes devient plus raisonnable.

- La fréquence du signal émis allant de 1,000 050 à 1,020 MHz, varie peu en valeur relative et l'antenne est pratiquement adaptée pour toute la plage fréquentielle.

- A la réception, il est désormais possible de séparer le signal utile de tout autre signal ayant subi une translation fréquentielle f'_C différente de f_C. Chaque station émettrice est ainsi caractérisée par la fréquence f_C qui lui est allouée, et il lui correspond une longueur d'onde déterminée.

2 □ modulation par multiplication

Supposons, dans un premier temps que le signal $s_m(t)$ à transmettre soit sinusoïdal :

$$s_m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t.$$

La multiplication de ce signal par la porteuse $s_C(t) = A_C \cos 2\pi f_C t$ conduit au signal émis

$$s(t) = kA_C A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_C t.$$

1. FORME DU SIGNAL

Pour une modulation sinusoïdale, le signal émis est donné à la figure 1.

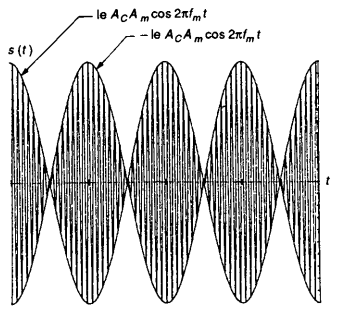


Fig. 1

Il s'agit d'une pseudo-sinusoïde de fréquence f_C évoluant entre les sinusoïdes

$$kA_C A_m \cos 2\pi f_m t \quad \text{et} \quad -kA_C A_m \cos 2\pi f_m t.$$

2. SPECTRE DU SIGNAL

L'écriture du signal

$$s(t) = kA_C A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_C t$$

sous la forme

$$s(t) = \frac{kA_C A_m}{2} [\cos 2\pi(f_C + f_m)t + \cos 2\pi(f_C - f_m)t]$$

montre qu'il est constitué de deux sinusoïdes d'amplitude $\frac{kA_C A_m}{2}$ et de fréquences $f_C + f_m$ et $f_C - f_m$, d'où le spectre de la figure 2.

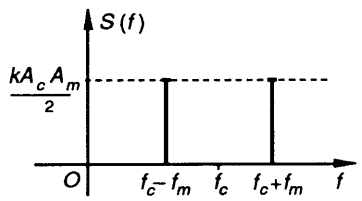


Fig. 2

Plus généralement, pour un signal $s_m(t)$ dont le spectre encombre la plage de fréquences s'étendant de f_m à f_M (*fig.* 3) et en répétant pour chaque composante sinusoïdale, l'opération précédente, on obtient pour $s(t)$ le spectre de la figure 4.

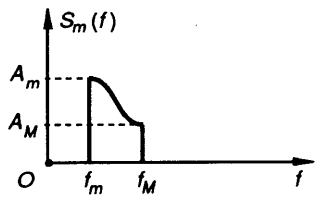


Fig. 3

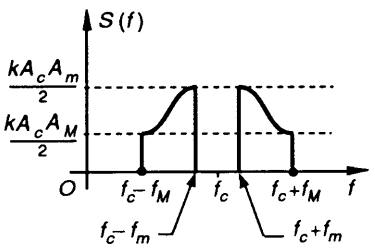


Fig. 4

Il résulte de la **superposition** des spectres correspondant à chacune des composantes sinusoïdales à transmettre.

La bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal s'étend de $f_C - f_M$ à $f_C + f_M$.

3. PRODUCTION DU SIGNAL

Le signal $s(t)$ peut être obtenu à l'aide d'un multiplicateur (*fig.* 5) que l'on appelle ici **modulateur équilibré.**

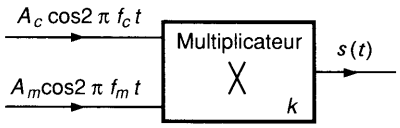


Fig. 5

4. DÉMODULATION DU SIGNAL

La démodulation consiste à restituer, à partir du signal reçu

$$s(t) = kA_C A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_C t$$

le signal à transmettre

$$s_m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t.$$

Cette démodulation peut être effectuée en multipliant le signal reçu par une porteuse locale $A'_C \cos 2\pi f_C t$ puis en filtrant le signal obtenu (*fig.* 6).

Il vient alors :

$$u = kk' A_C A'_C A_m \cos^2 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t$$

$$= \frac{kk' A_C A'_C}{2} A_m (1 + \cos 2\pi 2 f_C t) \cos 2\pi f_m t$$

$$u = \frac{kk' A_C A'_C}{2} A_m \cos 2\pi f_m t$$

$$+ \frac{kk' A_C A'_C}{4} [\cos 2\pi (2f_C - f_m)t + \cos 2\pi (2f_C + f_m)t].$$

La fréquence f_m étant très inférieure à $2f_C$, le filtre passe-bas élimine les composantes de fréquence voisine de $2f_C$ et isole le signal

$$v(t) = \frac{kk' A_C A'_C}{2} A_m \cos 2\pi f_m t,$$

proportionnel au signal à transmettre $A_m \cos 2\pi f_m t$.

Ce système présente l'inconvénient de nécessiter, à la réception, un oscillateur délivrant un signal $A'_C \cos 2\pi f_C t$ exactement synchrone de l'oscillateur à l'émission. Supposons, en effet, que la fréquence de l'oscillateur à la réception soit $f_C + \Delta f_C$; il vient alors :

$$u = kk' A_C A'_C A_m \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi (f_C + \Delta f_C)t \cos 2\pi f_m t$$

$$= \frac{kk' A_C A'_C A_m}{2} \cos 2\pi f_m t [\cos 2\pi \Delta f_C t + \cos 2\pi (2f_C + \Delta f_C)t]$$

$$= \frac{kk' A_C A'_C A_m}{2} \cos 2\pi \Delta f_C t \cos 2\pi f_m t$$

$$+ \frac{kk' A_C A'_C A_m}{4} [\cos 2\pi (2f_C + \Delta f_C + f_m)t$$

$$+ \cos 2\pi (2f_C + \Delta f_C - f_m)t].$$

A la sortie du filtre passe-bas, le signal s'écrit :

$$v = \frac{kk' A_C A'_C \cos 2\pi \Delta f_C t}{2} A_m \cos 2\pi f_m t.$$

L'amplitude de ce signal varie au cours du temps au rythme de $\cos 2\pi \Delta f_C t$. Ce qui est à l'origine d'un défaut appelé *« fading »*.

REMARQUE

A la réception, il est possible de reconstituer la porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$ *à partir du signal reçu*

$$s(t) = kA_C A_m \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t.$$

On commence par multiplier le signal $s(t)$ *par lui-même; on obtient alors*

$$k's^2(t) = k'k^2 A_C^2 A_m^2 \cos^2 2\pi f_m t \cos^2 2\pi f_C t$$

$$= \frac{k'k^2 A_C^2 A_m^2}{4} (1 + \cos 2\pi 2 f_m t)(1 + \cos 2\pi 2 f_C t)$$

$$= \frac{k'k^2 A_C^2 A_m^2}{4} \left[1 + \cos 2\pi 2 f_m t + \cos 2\pi 2 f_C t \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [\cos 2\pi (2f_C - 2f_m)t + \cos 2\pi (2f_C + 2f_m)t] \right].$$

Le terme $\cos 2\pi 2 f_C t$ *peut être isolé à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase et il est alors possible de reconstituer la porteuse par division de fréquence par 2.*

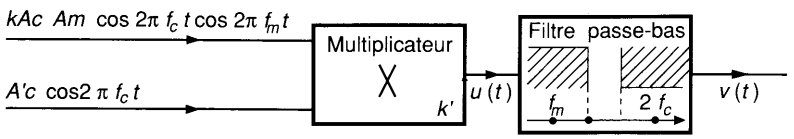


Fig. 6

3 modulation d'amplitude (A.M.)

La méthode précédente présente le principal inconvénient de nécessiter la reconstitution de la porteuse à la réception. Pour l'éviter, la porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$ est ajoutée au signal émis qui s'écrit alors :

$$s(t) = A_C \cos 2\pi f_C t + kA_C A_m \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t$$

ou en posant $m = kA_m$,

$$s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t$$

m est appelé **indice de modulation.**

1. FORME DU SIGNAL A.M.

Le signal AM a la forme décrite par la figure 1; c'est une sinusoïde de fréquence f_C dont l'amplitude est modulée au rythme du signal à transmettre (ici $m \cos 2\pi f_m t$).

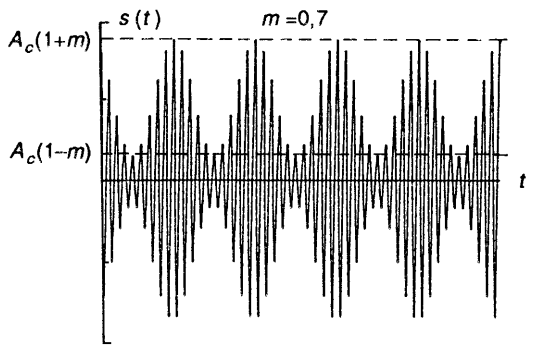


Fig. 1

2. SPECTRE DU SIGNAL MODULÉ EN AMPLITUDE

A partir de

$$s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t,$$

il vient :

$$s(t) = A_C \cos 2\pi f_C t + \frac{mA_C}{2} [\cos 2\pi(f_C + f_m)t + \cos 2\pi(f_C - f_m)t].$$

Le spectre (*fig.* 2) comprend la porteuse (d'amplitude A_C et de fréquence f_C) et deux composantes latérales d'amplitude $m\frac{A_C}{2}$ et de fréquences $f_C - f_m$ et $f_C + f_m$.

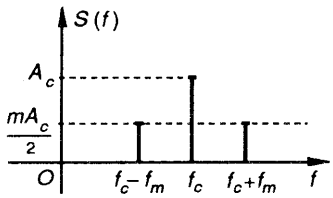


Fig. 2

Plus généralement, pour un signal de modulation s_m dont le spectre encombre la plage de fréquence s'étendant de f_m à f_M (*fig.* 3), le spectre du signal émis (*fig.* 4) est obtenu, à partir du spectre de la figure 4 du chapitre 2, en ajoutant une composante spectrale, d'amplitude A_C et de fréquence f_C, correspondant à la porteuse.

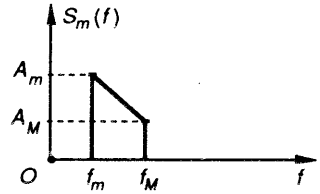


Fig. 3

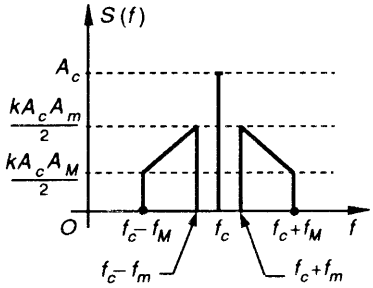


Fig. 4

La bande de fréquence nécessaire à la transmission s'étend de $f_C - f_M$ à $f_C + f_M$.

3. PRODUCTION DU SIGNAL A.M.

3.1. PRODUCTION PAR MODULATEUR ÉQUILIBRÉ

Le signal A.M. est obtenu en additionnant la porteuse au signal de sortie du modulateur équilibré de la figure 5 du chapitre 2. Le schéma synoptique du dispositif est donné à la figure 5.

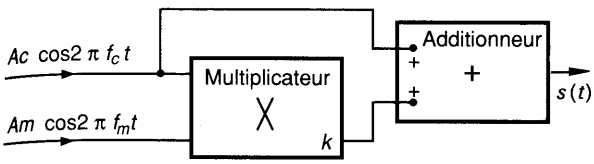


Fig. 5

3.2. PRODUCTION PAR MODIFICATION DU POINT DE REPOS D'UN ÉLÉMENT NON LINÉAIRE

Considérons le transistor bipolaire de la figure 6. Le courant d'émetteur i_E dépend de la tension base émetteur v_{BE} suivant l'expression :

$$i_E = I_S \, e^{\frac{v_{BE}}{V_T}},$$

où V_T est de l'ordre de 30 mV.

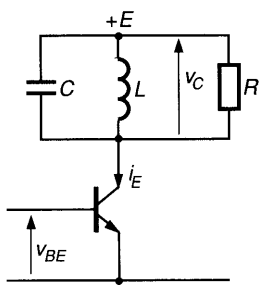


Fig. 6

• La tension v_{BE} est obtenue en sommant le signal de modulation $A_m \cos 2\pi f_m t$, la porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$ et une tension constante V_0 :

$$v_{BE} = V_0 + A_m \cos 2\pi f_m t + A_C \cos 2\pi f_C t.$$

• Le courant i_E s'établit alors à

$$i_E = I_S \, e^{\frac{V_0}{V_T}} \, e^{\frac{A_m}{V_T} \cos 2\pi f_m t} \, e^{\frac{A_C}{V_T} \cos 2\pi f_C t}.$$

Si les tensions A_C et A_m sont faibles par rapport à $V_T = 30$ mV, le développement des exponentielles limité au premier ordre conduit à

$$i_E = I_S \, e^{\frac{V_0}{V_T}} \left(1 + \frac{A_m}{V_T} \cos 2\pi f_m t\right) \left(1 + \frac{A_C}{V_T} \cos 2\pi f_C t\right)$$

$$= I_S \, e^{\frac{V_0}{V_T}} \left[1 + \frac{A_m}{V_T} \cos 2\pi f_m t + \frac{A_C}{V_T} \cos 2\pi f_C t + \frac{A_C A_m}{2V_T^2} [\cos 2\pi (f_C + f_m)t + \cos 2\pi (f_C - f_m)t]\right]$$

En régime harmonique, le circuit R-L-C fait apparaître une tension v_C :

$$\underline{V_C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} \underline{I_E}$$

$$= R\underline{I_E} \frac{1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

ou en posant

$$\frac{Q_0}{\omega_0} = RC \quad \text{et} \quad Q_0 \omega_0 = \frac{R}{L},$$

$$\underline{V_C} = R\underline{I_E} \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)};$$

le circuit R-L-C est un circuit sélectif dont la fréquence centrale est égale à

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

et dont la bande passante $\frac{f_0}{Q_0} = \frac{1}{2\pi RC}$ dépend de la résistance R.

• Sachant que la fréquence f_m est très faible par rapport à f_C, les éléments R, L et C peuvent être choisis de telle sorte que la tension $v_C(t)$ ne contienne que les composantes de fréquence f_C, $f_C - f_m$, $f_C + f_m$. Soit :

$$v_C(t) = \frac{kAC}{V_T} \cos 2\pi f_C t + k\frac{A_C A_m}{V_T^2} \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t$$

$$= \frac{kA_C}{V_T}\left(1 + \frac{A_m}{V_T} \cos 2\pi f_m t\right) \cos 2\pi f_C t$$

qui est bien l'expression d'un signal modulé en amplitude.

• Ce dispositif ne peut convenir que pour les faibles indices de modulation dans la mesure où la tension A_m doit rester faible par rapport à V_T.

4. DÉMODULATION DU SIGNAL A.M.

Il s'agit de reconstituer le signal $m \cos 2\pi f_m t$ à partir du signal reçu :

$$s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t.$$

4.1. DÉMODULATEUR À DIODE

Considérons le dispositif de la figure 7, attaqué par le signal modulé en amplitude :

$$s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t.$$

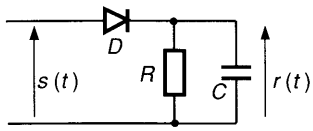


Fig. 7

La forme du signal $r(t)$ est donnée à la figure 8.

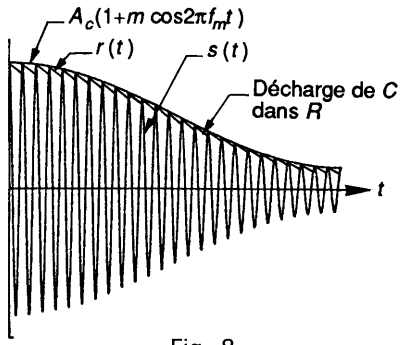


Fig. 8

Supposons que la diode D soit parfaite.

• Lorsque la diode conduit, la tension $r(t)$ est égale à la tension $s(t)$.

• Lors de la décroissance de $s(t)$, le condensateur C, interdisant toute variation rapide de la tension $r(t)$, freine sa décroissance. La tension $r(t)$ quitte la tension $s(t)$, et lui devient supérieure, ce qui bloque la diode D. L'évolution de la tension $r(t)$ est alors régie par la loi de décharge du condensateur C dans la résistance R.

4.1.1. Calcul de la constante de temps RC

La figure 8 montre qu'il est possible de reconstituer, à partir de $r(t)$ la tension

$$A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$$

et par suite $mA_C \cos 2\pi f_m t$. Il suffit pour cela de supprimer, par filtrage, l'ondulation résiduelle et la composante continue.

Les éléments R et C doivent être choisis de telle sorte que les tensions $r(t)$ et $A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$ soient peu différentes.

a) Afin que $r(t)$ ne puisse pas suivre les variations rapides de $s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t$, il est nécessaire que la constante de temps RC soit grande devant la période $T_C = \dfrac{1}{f_C}$, soit :

$$RCf_C \gg 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{RC} \ll f_C.$$

b) Il est nécessaire, qu'après avoir quitté la tension $s(t)$ au cours d'une alternance, la tension $r(t)$ la retrouve à l'alternance suivante (*fig.* 9). La

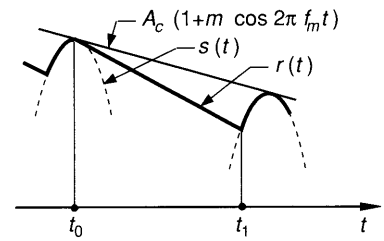


Fig. 9

fréquence f_C étant très grande par rapport à f_m, entre deux alternances de $\cos 2\pi f_C t$, les courbes représentant les tensions $r(t)$ et

$$A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$$

peuvent être assimilées à des droites.

La tension $r(t)$ quitte la tension $s(t)$ à l'instant $t = t_0$ (*fig.* 9). Afin qu'elle puisse la retrouver à l'instant $t = t_1$, il est nécessaire, qu'à l'instant $t = t_0$, la pente de $r(t)$ soit plus négative que celle de $A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$.

La constante de temps RC étant très élevée par rapport à $T_C = \dfrac{1}{f_C}$, la tension $r(t)$ quitte la courbe $s(t)$ dès que cette dernière commence à décroître et l'instant $t = t_0$ correspond à l'instant de tangence des courbes $s(t)$ et $A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$.

• A partir de l'instant t_0, la tension $r(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$C\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{r(t)}{R} \quad \text{où} \quad \frac{dr(t)}{dt} = -\frac{r(t)}{RC}$$

A l'instant $t = t_0$

$$r(t_0) = s(t_0) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t_0)$$

et

$$\left[\frac{dr(t)}{dt}\right]_{t_0} = -\frac{A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t_0)}{RC}$$

• A l'instant $t = t_0$, la pente de la courbe

$$A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$$

s'écrit

$$- A_C m 2\pi f_m \sin 2\pi f_m t_0.$$

• A l'instant $t = t_0$, la pente de $r(t)$ devant être plus négative que celle de $A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$, il vient :

$$\frac{A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t_0)}{RC} > m2\pi f_m A_C \sin 2\pi f_m t_0$$

soit :

$$\frac{1}{RC} > \frac{m2\pi f_m \sin 2\pi f_m t_0}{1 + m \cos 2\pi f_m t_0}$$

Les fréquences f_C et f_m n'étant pas corrélées, l'instant de tangence t_0 peut être quelconque et, sous peine de distorsion, la relation précédente doit être vérifiée quel que soit t_0.

La valeur maximale de

$$y(t_0) = \frac{m2\pi f_m \sin 2\pi f_m t_0}{1 + m \cos 2\pi f_m t_0}$$

est telle que

$$\frac{dy}{dt_0} = \frac{(m2\pi f_m)^2 + m(2\pi f_m)^2 \cos 2\pi f_m t_0}{(1 + m \cos 2\pi f_m t_0)^2} = 0$$

$y(t_0)$ est donc maximal pour $\cos 2\pi f_m t_0 = -m$ soit

$\sin 2\pi f_m t_0 = \sqrt{1 - m^2}$ et

$$y_{\text{Max}} = \frac{m2\pi f_m \sqrt{1 - m^2}}{1 - m^2} = \frac{m2\pi f_m}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

La constante de temps RC doit donc vérifier l'inégalité

$$\frac{1}{RC} > \frac{m2\pi f_m}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

Au total les composants R et C doivent obéir à la double inégalité

$$\frac{m2\pi f_m}{\sqrt{1 - m^2}} < \frac{1}{RC} \ll f_C.$$

4.1.2. Modulation maximale autorisée

La double inégalité précédente est d'autant plus difficile à satisfaire que l'indice de modulation m se rapproche de 1; la quantité $\frac{m2\pi f_m}{\sqrt{1 - m^2}}$ devient très grande, réduisant à néant la marge de choix de la constante de temps RC. En fait pour m supérieur à 1, on obtient les courbes de la figure 10.

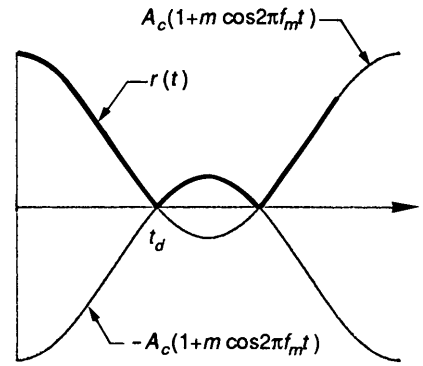


Fig. 10

La diode interdit à la tension $r(t)$ de devenir négative si bien qu'à l'instant $t = t_d$, la tension $r(t)$ quitte la courbe $A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$ pour suivre la courbe $- A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t)$. Il apparaît ainsi une distorsion du signal démodulé $r(t)$.

Le démodulateur à diode ne tolère que des indices de modulation inférieurs à 1.

4.2. DÉMODULATEUR SYNCHRONE

A partir du signal A-M,

$$s(t) = A_C(1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t,$$

il est possible de reconstituer le signal de modulation $m \cos 2\pi f_m t$, à l'aide du dispositif de la figure 11.

La tension $d(t)$ résulte de la multiplication du signal modulé en amplitude, par une porteuse locale $A'_C \cos 2\pi f_C t$.

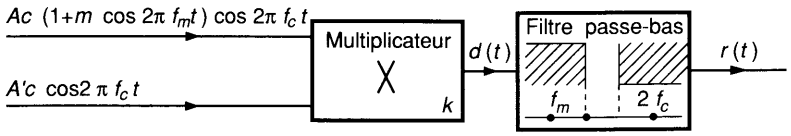


Fig. 11

$$d(t) = kA_C A'_C(1 + m\cos 2\pi f_m t)\cos^2 2\pi f_C t$$
$$= \frac{kA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)(1 + \cos 2\pi 2 f_C t)$$
$$= \frac{kA_C A'_C}{2}\left[1 + m\cos 2\pi f_m t + \cos 2\pi 2 f_C t + \frac{m}{2}\cos 2\pi(2f_C - f_m)t + \frac{m}{2}\cos 2\pi(2f_C + f_m)t\right].$$

Le filtre passe bas élimine les composantes de fréquences $2f_C$, $2f_C - f_m$ et $2f_C + f_m$ si bien que la tension $r(t)$ s'écrit

$$r(t) = \frac{kA_C A'_C}{2}[1 + m\cos 2\pi f_m t].$$

Après élimination de la composante continue, on isole le signal $\frac{kA_C A'_C}{2} m\cos 2\pi f_m t$ qui est bien proportionnel au signal de modulation. Dans les calculs précédents, aucune restriction ne limite la valeur de l'indice de modulation; en conséquence :

Le démodulateur synchrone tolère des indices de modulation supérieurs à 1.

Le dispositif de la figure 11 suppose que l'on dispose, à la réception d'un oscillateur

$$A'_C \cos 2\pi f_C t$$

exactement synchrone de l'oscillateur à l'émission $A_C \cos 2\pi f_C t$.

Étudions, à cet égard, l'effet d'un déphasage φ entre les deux oscillateurs. Sur la figure 11, la tension $d(t)$ s'écrit

$$d(t) = kA_C A'_C(1 + m\cos 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_C t \times \cos(2\pi f_C t + \varphi)$$
$$= \frac{kA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)[\cos(2\pi 2 f_C t + \varphi) + \cos\varphi].$$

Le filtre passe-bas éliminant les composantes de fréquences $2f_C$, $2f_C - f_m$ et $2f_C + f_m$, la tension $r(t)$ devient

$$r(t) = \frac{kA_C A'_C}{2}\cos\varphi(1 + m\cos 2\pi f_m t)$$

et le signal démodulé s'écrit

$$\frac{kA_C A'_C \cos\varphi}{2} m\cos 2\pi f_m t.$$

Si le déphasage φ varie au cours du temps il en va de même pour l'amplitude du signal démodulé. Ce défaut (fading) rend la transmission inacceptable.

A la réception, il est donc nécessaire de reconstituer la porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$, à partir du signal modulé en amplitude

$$s(t) = A_C(1 + m\cos 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_C t.$$

Cette opération peut être effectuée à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (*fig.* 12).

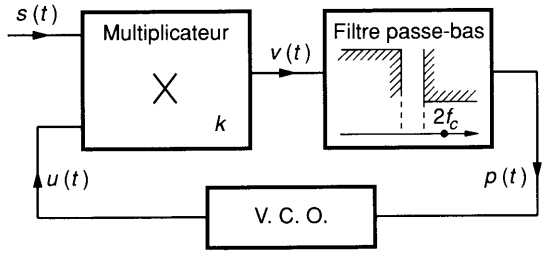


Fig. 12

• L'oscillateur commandé par tension (*V-C-O*) délivre une tension sinusoïdale

$u(t) = A'_C \sin[2\pi f_C t - \varphi_S(t)]$ dont la phase $\varphi_S(t)$ dépend de la tension de commande $P(t)$ sous la forme

$$\frac{d\varphi_S(t)}{dt} = aP(t),$$

ou a est une constante, et $\left|\frac{d\varphi_S(t)}{dt}\right| \ll 2\pi f_C$.

• La tension à la sortie du multiplicateur s'écrit :

$$v(t) = ks(t)u(t) = kA_C A'_C(1 + m\cos 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_C t \sin[2\pi f_C t - \varphi_S(t)]$$
$$= \frac{kA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)[\sin[2\pi 2 f_C t - \varphi_S(t)] - \sin[\varphi_S(t)].$$

La pulsation instantanée du terme

$$\sin[2\pi 2 f_C t - \varphi_S(t)]$$

est :

$$\left|\frac{d}{dt}[4\pi f_C t - \varphi_S(t)]\right| = \left|4\pi f_C - \frac{d\varphi_S(t)}{dt}\right| \approx 4\pi f_C.$$

La pulsation instantanée du terme sin $[\varphi_S(t)]$ est $\left|\frac{d\varphi_S(t)}{dt}\right|$.

• Le filtre passe-bas élimine les termes de fréquence voisine de $2f_C$ et est transparent aux fréquences f_m et $\frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi_S(t)}{dt}\right|$ si bien que sa tension de sortie $P(t)$ s'écrit :

$$P(t) = -\frac{kA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)\sin[\varphi_S(t)]$$

• Compte tenu de la relation imposée par le V-C-O, il vient :

$$\frac{d\varphi_S(t)}{dt} = aP(t)$$

$$= -\frac{akA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)\sin[\varphi_S(t)].$$

Sachant que la phase $\varphi_S(t)$ reste faible, la relation précédente devient :

$$\frac{d\varphi_S(t)}{dt} = -\frac{akA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)\,\varphi_S(t)$$

$$\frac{d\varphi_S(t)}{\varphi_S(t)} = -\frac{akA_C A'_C}{2}(1 + m\cos 2\pi f_m t)\,dt.$$

L'intégration membre à membre de cette relation conduit à

$$L_n\left|\frac{\varphi_S(t)}{K}\right| = -\frac{akA_C A'_C}{2}\left(t + \frac{m}{2\pi f_m}\sin 2\pi f_m t\right)$$

où :

$$\varphi_S(t) = K\,e^{-a\frac{akA_C A'_C t}{2}}\,e^{-m\frac{kA_C A'_C}{2}\frac{\sin 2\pi f_m t}{2\pi f_m}}$$

Le terme $e^{-m\frac{akA_C A'_C}{2}\times\frac{\sin 2\pi f_m t}{2\pi f_m}}$ est inférieur à $e^{m\frac{akA_C A'_C}{4\pi f_m}}$.

Sachant que $e^{-\frac{akA_C A'_C t}{2}}$ tend vers zéro lorsque t devient infini, la phase $\varphi_S(t)$ tend rapidement vers zéro, et la tension de sortie du V-C-O s'écrit :

$$u(t) = A'_C \sin 2\pi f_C t.$$

On reconstitue ainsi, à la réception, un signal dont la fréquence f_C est exactement égale à la fréquence de la porteuse à l'émission.

REMARQUE

Le signal reconstitué par la boucle à verrouillage de phase est $A'_C \sin 2\pi f_C t$ *alors que la porteuse locale de la figure* 11 *s'écrit* $A'_C \cos 2\pi f_C t$. *Il est donc nécessaire de faire subir au signal issu du V.C.O. un déphasage de* $\frac{\pi}{2}$ *avant de l'appliquer au démodulateur de la figure* 11, *ce qui conduit au schéma complet de la figure* 13.

5. RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Pendant le trajet entre l'émetteur et le récepteur, un signal aléatoire, le bruit $n(t)$ vient se superposer au signal transmis $s(t)$ et altère ainsi la qualité de la transmission. Afin de chiffrer la perturbation, on définit le rapport signal sur bruit S-N-R (de l'anglais *signal to noise ratio*) par le rapport $\frac{S}{B}$, où S et B sont les puissances fournies à la charge respectivement par le signal utile et par le signal de bruit.

Nous limiterons l'étude au calcul du rapport signal sur bruit correspondant au démodulateur synchrone.

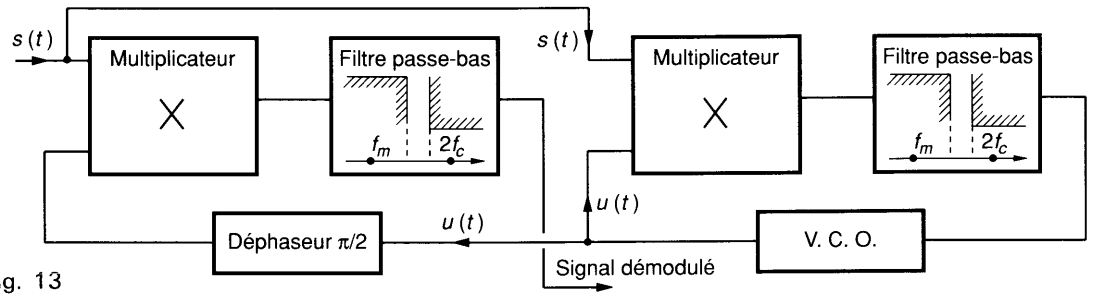


Fig. 13

La puissance instantanée fournie à une résistance R par le signal $s(t)$ s'écrit :

. $Rs^2(t)$ si $s(t)$ est le courant qui parcourt la résistance R;

. $\dfrac{s^2(t)}{R}$ si $s(t)$ est la tension aux bornes de la résistance R.

Dans tous les cas, la puissance moyenne dépend de la valeur moyenne σ^2 de $s^2(t)$ que l'on appelle **puissance normalisée** de $s(t)$ (c'est la puissance développée par le signal dans la résistance unité, c'est aussi le carré de la valeur quadratique moyenne qui, en régime harmonique, correspond à la valeur efficace).

• Le bruit $n(t)$ est une variable aléatoire dont la valeur moyenne est nulle et que l'on peut considérer comme une fonction périodique dont la période T tendrait vers l'infini (*fig.* 14). Il est ainsi possible de la décomposer en série de Fourier et les amplitudes de ses composantes spectrales s'écrivent (voir Tome I, chapitre 3)

$$C_n = |\underline{C}_n| \text{ avec } \underline{C}_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n(t)\,e^{-2\pi j\frac{nt}{T}}\,dt.$$

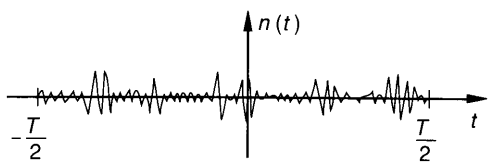


Fig. 14

Lorsque T tend vers l'infini, les composantes spectrales $\left(\text{distantes de } \dfrac{1}{T}\right)$ se rapprochent infiniment, en même temps que leur amplitude devient infiniment petite. On définit alors la **densité spectrale de puissance** η par $\eta = \dfrac{dP_N}{df}$ ou dP_N est la puissance normalisée développée par les composantes spectrales du bruit situées dans la bande de fréquence df. Nous supposerons que **la densité spectrale de puissance du bruit est constante sur toute la plage de fréquence (bruit blanc)**; ainsi la puissance normalisée de bruit développée dans la plage de fréquence s'étendant de 0 à F_B s'écrit

$$\int_0^{F_B} dP_N = \int_0^{F_B} \eta\, df = \eta F_B.$$

Cette puissance normalisée étant égale au carré de la valeur quadratique moyenne σ^2, nous sommes amenés à définir une bande passante de bruit ΔF_B telle que $\eta\,\Delta F_B = \sigma^2$.

• Le signal de bruit peut être représenté par la projection, sur un axe Ox, d'un vecteur $\vec{n}$ dont la longueur N dépend de l'intensité du bruit et qui fait avec l'axe Ox un angle $\varphi_n(t)$ dont les variations sont aléatoires.

Le signal de bruit s'écrit ainsi

$$n(t) = N\cos[\varphi_n(t)]$$

et sa fréquence instantanée, $\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{d\varphi_n(t)}{dt}\right|$ dépend de la vitesse de variation de $\varphi_n(t)$ (*fig.* 15).

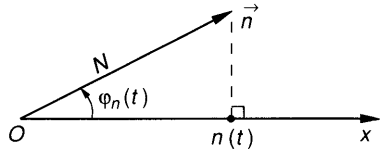


Fig. 15

L'angle $\varphi_n(t)$ est aléatoire, mais, pour un bruit blanc, encombrant la bande passante de bruit ΔF_B, $\varphi_n(t)$ doit vérifier la relation :

$$\text{val moy}\,[n^2(t)] = \overline{n^2(t)} = N^2\,\overline{\cos^2[\varphi_n(t)]} = \sigma^2 = \eta\,\Delta F_B.$$

Soit

$$\overline{\cos^2[\varphi_n(t)]} = \frac{\eta}{N^2}\Delta F_B.$$

Si l'on convient de choisir la longueur N du vecteur $\vec{n}$ proportionnellement à $\sqrt{\eta}$, soit

$$N^2 = F\eta,$$

ou F est une fréquence constante, le bruit s'écrit :

$$n(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta}\cos[\varphi_n(t)]$$

avec

$$\overline{\cos^2[\varphi_n(t)]} = \text{val moy}\,[\cos^2[\varphi_n(t)]] = \frac{\Delta F_B}{F},$$

où ΔF_B est la bande passante de bruit.

5.1. PUISSANCE NORMALISÉE DU SIGNAL UTILE

• Le signal reçu s'écrit

$$s(t) = A_C(1 + m\cos 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_C t.$$

Sa puissance normalisée est la valeur moyenne de

$$s^2(t) = A_C^2[1 + m\cos 2\pi f_m t]^2\cos^2 2\pi f_C t$$

$$= A_C^2\left[1 + 2m\cos 2\pi f_m t + m^2\frac{1+\cos 2\pi 2f_m t}{2}\right]\left[\frac{1+\cos 2\pi 2f_C t}{2}\right].$$

$s^2(t)$ comprend le terme constant

$$\left(\frac{A_C^2}{2} + \frac{m^2 A_C^2}{4}\right)$$

et des termes sinusoïdaux de fréquences f_m, $2f_m$, $2f_C$, $2f_C - f_m$, $2f_C + f_m$, $2f_C - 2f_m$ et $2f_C + 2f_m$. Sachant que la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle, la puissance normalisée du signal reçu s'écrit :

$$S_i = \frac{A_C^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right).$$

• Considérant le démodulateur synchrone de la figure 11, le signal démodulé s'écrit

$$r(t) = \frac{kA'_C}{2} mA_C \cos 2\pi f_m t$$

et sa puissance normalisée (qui est aussi le carré de sa valeur efficace) est égale à

$$S_0 = \left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 \frac{m^2 A_C^2}{2}.$$

5.2. PUISSANCE NORMALISÉE DE BRUIT

• Nous avons montré (paragraphe 2 de ce chapitre) que la transmission du signal utile nécessite une bande de fréquence s'étendant de $f_C - f_M$ à $f_C + f_M$, alors que le signal de bruit encombre une bande de fréquence beaucoup plus large. Afin de limiter l'influence du bruit, le démodulateur est précédé d'un filtre passe-bande qui ne transmet que les signaux dont les fréquences sont comprises entre $f_C - f_M$ et $f_C + f_M$ (*fig.* 16).

Ce filtre est supposé parfait, et le module de sa fonction de transfert $H(f)$ est idéalisé par la courbe de la figure 17.

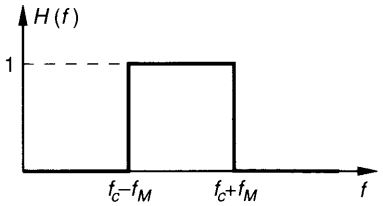


Fig. 17

• Le signal de bruit incident $n(t)$ peut être écrit :

$$n(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta}\cos[\varphi_n(t)]$$

où η est la densité spectrale de puissance du bruit à l'entrée du détecteur.

• La traversée du filtre passe-bande limite le module de la vitesse de variations de $\varphi_n(t)$ si bien qu'à la sortie de ce filtre, le signal de bruit s'écrit :

$$n_i(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta}\cos[\varphi_{ni}(t)]$$

avec $f_C - f_M \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi_{ni}(t)}{dt}\right| \leqslant f_C + f_M$.

• Le signal de bruit à la sortie du multiplicateur s'écrit :

$$n_s(t) = kn_i(t)A'_C\cos 2\pi f_C t$$

$$= k\sqrt{F}\sqrt{\eta}\frac{A'_C}{2}[\cos[2\pi f_C t + \varphi_{ni}(t)] + \cos[2\pi f_C t - \varphi_{ni}(t)]].$$

Ce signal de bruit est constitué de deux termes dont les fréquences instantanées sont respectivement

$$\left|f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_{ni}(t)}{dt}\right| \quad \text{et} \quad \left|f_C - \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_{ni}(t)}{dt}\right|$$

Sachant que $f_C - f_M \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi_{ni}(t)}{dt}\right| \leqslant f_C + f_M$, chaque terme est susceptible de faire apparaître indépendamment deux bandes de fréquence

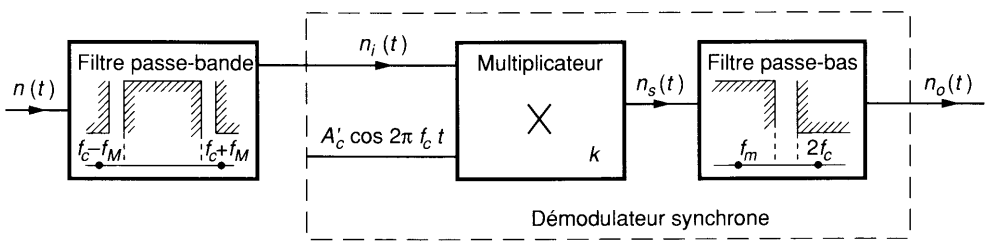


Fig. 16

s'étendant respectivement de $2f_C - f_M$ à $2f_C + f_M$ et de 0 à f_M.

• Le filtre passe-bas du démodulateur ne transmet que les composantes de fréquence inférieure à f_M si bien que le signal de bruit à la sortie du filtre passe-bas s'écrit

$$n_0(t) = k\sqrt{F}\sqrt{\eta}\frac{A'_C}{2}[\cos[\varphi_{n0}(t)] + \cos[\varphi'_{n0}(t)]]$$

avec $0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi_{n0}(t)}{dt}\right| \leqslant f_M$

et $0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi'_{n0}(t)}{dt}\right| \leqslant f_M$

ce qui correspond à la superposition des deux signaux de bruit indépendants dont la bande de fréquence s'étend de 0 à f_M.

Le carré de la valeur quadratique moyenne $\overline{n_0^2(t)}$ du bruit $n_0(t)$ s'écrit donc :

$$\overline{n_0^2(t)} = 2\left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 F\eta\ \overline{\cos^2[\varphi_{n0}(t)]}$$

Sachant que la valeur moyenne $\overline{\cos^2[\varphi_{n0}(t)]}$ de $\cos[\varphi_{n0}(t)]$ est liée à la bande passante de bruit par $\overline{\cos^2[\varphi_{n_0}(t)]} = \frac{f_M}{F}$,

il vient :

$$n_0^2(t) = B_0 = 2\left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 \eta F\frac{f_M}{F} = \left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 2\eta f_M.$$

A la sortie du démodulateur (*fig.* 16) le rapport signal sur bruit s'écrit :

$$\text{S.N.R.} = \frac{S_0}{B_0} = \frac{\left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 \frac{m^2A_C^2}{2}}{\left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 2\eta f_M}$$

$$= \frac{m^2A_C^2}{4\eta f_M} = \frac{m^2}{2+m^2}\frac{S_i}{nf_M}$$

$$\textbf{S.N.R.} = \frac{\boldsymbol{m^2}}{\boldsymbol{2+m^2}}\frac{\boldsymbol{S_i}}{\boldsymbol{\eta f_M}}.$$

REMARQUES

a) Pour une valeur donnée de la puissance incidente S_i (qui dépend de la puissance de l'émetteur), le rapport signal sur bruit est d'autant meilleur que l'indice de modulation m est plus grand, pour atteindre $\frac{S_i}{\eta f_M}$ *pour* $m \gg 1$.

b) Il est relativement difficile de construire, en haute fréquence, un filtre dont la fonction de transfert se rapproche de la courbe idéalisée de la figure 17. L'élaboration de ce filtre s'avérant plus facile en basse fréquence, on procède à un changement de fréquence avant d'aborder la démodulation.

On obtient le dispositif de la figure 18 appelé ***système superhétérodyne.***

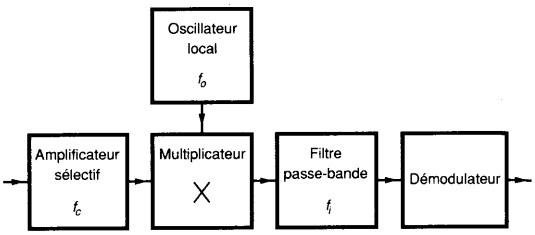


Fig. 18

Après amplification, la porteuse de fréquence f_C, modulée en amplitude, est multipliée par le signal issu d'un oscillateur local de fréquence f_0 faisant ainsi apparaître les signaux de fréquence $f_C - f_0$ et $f_C + f_0$.

La fréquence $f_i = f_C - f_0 \ll f_C$ est appelée fréquence intermédiaire f_i et le signal correspondant est sélectionné par le filtre passe-bande, centré sur $f_i \ll f_C$, précédant le démodulateur.

La fréquence centrale f_i du filtre passe-bande étant constante, la recherche du canal est effectuée en réglant la fréquence f_0 de l'oscillateur local de telle sorte que $f_0 = f_C - f_i$.

EXERCICES

1. Modulation d'amplitude

Soit à transmettre, à l'aide d'un signal porteur $v(t) = V_0 \cdot \cos(\Omega_0 t)$, une information $s(t)$. Le signal $s(t)$ module l'amplitude du signal porteur $v(t)$ qui est alors de la forme $v(t) = V_0(1 + s(t)) \cdot \cos(\Omega_0 t)$.

1° Donner le spectre de fréquences de $v(t)$ dans le cas où $s(t) = m \cdot \cos \omega t$.

2° Dans le cas où $s(t) = m \cdot \cos \omega t$, en assimilant la charge apportée par l'antenne à une résistance R, et en admettant que le rendement de l'antenne est égal à l'unité, calculer, en fonction de v et R, la puissance rayonnée par l'antenne. Calculer sa valeur moyenne en fonction de V_0, R et m (*fig.* 1).

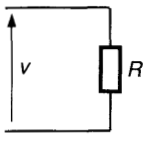


Fig. 1

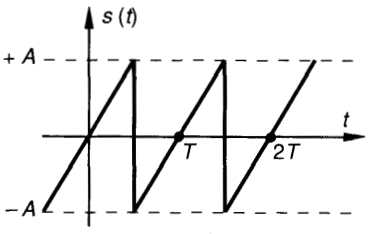


Fig. 2

3° $s(t)$ est un signal périodique de fréquence 1 kHz représenté sur la figure 2.

a) Montrer que la décomposition en série de Fourrier de $s(t)$ s'écrit : $s(t) = \frac{2A}{\pi}\left(\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \ldots\right)$ et représenter sa décomposition spectrale.

b) On souhaite transmettre les dix premiers harmoniques de $s(t)$. Calculer la bande passante des circuits de transmission. Donner la représentation spectrale du signal modulé.

c) Montrer que le signal modulé s'écrit :

$$v(t) = V_0\left(1 + m \sum_{n=1}^{n=10} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(n\omega t)}{n}\right) \cdot \cos \Omega_0 t$$

Donner l'expression de m en fonction de A.

d) En admettant les mêmes hypothèses que dans la question 2°, calculer en fonction de V_0, R et m, la puissance moyenne rayonnée par l'antenne. Quelle est son expression en fonction de V_0 et R pour $m = 1$ et $n = 10$?

4° On supprime maintenant une bande latérale du signal à transmettre pour réduire la bande occupée par le signal et la puissance nécessaire à l'émission. Dans le cas où $s(t) = m \cdot \cos \omega t$, le signal modulé peut s'écrire

$$v(t) = V_0 \cdot \cos \Omega_0 t + \frac{mV_0}{2} \cdot \cos(\Omega_0 + \omega)t.$$

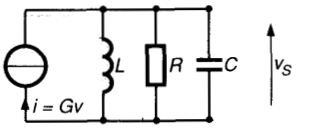
$v(t)$ pouvant être mis sous la forme

$$v(t) = V(t) \cdot \cos(\Omega_0 t + \varphi(t)),$$

calculer tan $\varphi(t)$ et $V(t)$ en fonction de m, V_0.
Que peut-on en conclure?

2. Transmission du signal modulé

On peut schématiser les étages d'amplification à circuits accordés comme l'indique la figure. G est la pente de l'amplificateur équivalent. Le circuit R, L, C est accordé sur la fréquence $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ du signal porteur.



Son facteur de qualité Q_0 est supposé grand par rapport à 1.

1° Soit Ω la fréquence du signal d'attaque du circuit accordé.
Calculer son impédance $\underline{Z}$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jQ_0\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega}\right)}.$$

Montrer que dans le cas où $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 \ll \Omega_0$, $\underline{Z} \approx \frac{R}{1 + 2jQ_0 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}}$.

Calculer alors son module et son argument.

2° Le signal d'entrée de l'étage amplificateur est modulé en amplitude $v(t) = V_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega_0 t$.
Calculer $v_S(t)$ par application du théorème de superposition et montrer qu'il se met sous la forme

$$v_S(t) = V_0 RG(1 + m' \cos(\omega t + \varphi)) \cos \Omega_0 t.$$

Calculer m' et tan φ en fonction de m, Q_0, ω et Ω_0.

3° L'information à transmettre est celle définie dans la question 3° de l'exercice 1.

a) Montrer que si l'on veut reconstituer fidèlement le signal $s(t)$, à partir de $v_S(t)$, il est nécessaire que $\varphi = \omega\tau$.
Quelle est la signification de τ?

b) En effectuant un développement de tan φ limité à l'ordre 3, établir la valeur maximale φ_M de φ permettant de vérifier la relation précédente à 10 % près.

c) La transmission du signal étant limitée à l'harmonique 10, établir la valeur maximale $Q_{0\text{Max}}$ de Q_0 en fonction de F_0, f, tan φ_M.
Quelle est alors la valeur minimale B_{min} de la bande passante du circuit R, L, C?
Établir, en fonction de m, $Q_{0\text{Max}}$, f, F_0, le taux de modulation m'_{10}, du dixième harmonique.

d) *Application numérique :* On donne $F_0 = 1$ MHz, $f = 1$ kHz; calculer $Q_{0\text{Max}}$, B_{min} et m'_{10} en fonction de m.

3. Étude d'un modulateur

Le modulateur proposé est représenté (*fig.* 1).

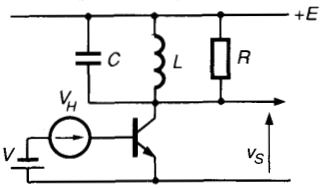
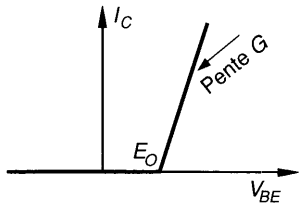


Fig. 1

Le transistor est caractérisé par sa fonction de transfert idéalisée $I_C = f(V_{BE})$ de pente $G = \frac{\Delta I_C}{\Delta V_{BE}}$. (*fig.* 2).

Fig. 2



La tension $v_H = V_H \cos \Omega_0 t$.

Le circuit R, L, C, est accordé sur la fréquence $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$. A cette fréquence le circuit R, L, C se comporte comme une résistance R.

1° On pose $\theta = \Omega_0 t$. Donner la courbe de variations de $i_C = f(\theta)$. Y faire apparaître l'angle d'ouverture θ_0 tel que $\cos \theta_0 = \frac{V + E_0}{V_H}$.
Montrer que i_C s'écrit $i_C(\theta) = I(\cos \theta - \cos \theta_0)$.
Exprimer I en fonction de G et V_H.

On pose $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Montrer que, si $V_H \gg V + E_0$,

$$\varepsilon \approx \sin \varepsilon = \frac{V + E_0}{V_H}.$$

2° Montrer que $i_C(t)$ peut s'écrire

$$i_C(t) = I_0 + I_1 \cos \Omega_0 t + I_2 \cos (2\Omega_0 t) + \ldots$$

Calculer I_0 et I_1 en fonction de I et θ_0.
Montrer que le fondamental peut s'écrire

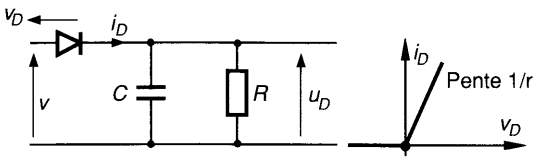
$$i_1(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{\pi}\right) \cos \Omega_0 t.$$

3° La tension V est maintenant variable suivant l'expression $v = -E_0 + V_B \cos \omega t$, avec $V_B \ll V_H$ et $\omega \ll \Omega_0$.
Montrer à partir du schéma équivalent alternatif que $v_S(t)$ s'écrit : $v_S \approx V_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega_0 t$.
Calculer V_0 et m en fonction de R, G, V_H, V_B.

4° Quelle est la valeur maximale de ε qui permet de confondre $\sin \varepsilon$ et ε avec 5 % d'erreur? Quel est alors le taux de modulation limite m?

4. Étude d'un démodulateur

On réalise la détection à l'aide du schéma ci-dessous.



La caractéristique idéalisée de la diode a une pente égale à $\frac{1}{r}$.

1° On pose $\theta = \Omega_0 t$; $v(t) = V \cdot \cos \Omega_0 t$ avec $RC\Omega_0 \gg 1$ donner l'allure de $u_D(t)$.

2° Le condensateur possède une capacité suffisante pour que u_D puisse être considéré comme une constante.
Soit θ_0 l'angle d'ouverture défini par $u_D = V \cdot \cos \theta_0$.
Calculer i_D en fonction de V, r, θ et θ_0.
Calculer sa valeur moyenne $I_{D\,moy}$ en fonction de V, r, θ_0.
Établir la relation entre θ_0, r, R.

3° Calculer la puissance moyenne absorbée par le détecteur. En déduire la résistance R_e équivalente au circuit détecteur.

4° La tension $v(t)$ est maintenant modulée en amplitude :

$$v(t) = V_0(1 + m \cos \omega t) \cdot \cos \Omega_0 t.$$

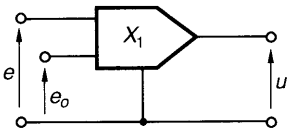
Montrer que $u_D(t) \approx V_0 \cos \theta_0 (1 + m \cos \omega t)$.

5° Quelle est la puissance moyenne absorbée par le détecteur?

5. Principe de la démodulation cohérente

1° *a*) Le circuit multiplieur représenté figure 1 délivre une tension de sortie $u = K_1 e \cdot e_0$, K_1 étant un coefficient positif mesuré en volts moins un.

Fig. 1



Vis-à-vis de la sortie, il se comporte comme un générateur de tension, d'impédance interne nulle.
Les signaux $e(t)$ et $e_0(t)$ sont respectivement l'onde modulée en amplitude, soit

$$e(t) = E(1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t$$

et un signal d'amplitude constante et de même pulsation que la porteuse, soit $e_0(t) = E_0 \sin \omega_0 t$.
Exprimer le signal de sortie $u(t)$ et montrer que son spectre comporte cinq composantes que l'on précisera.

b) Comment peut-on faire pour ne conserver que l'information basse fréquence et une image de l'amplitude de la porteuse?

c) Quelle peut être l'utilité de conserver une image de l'amplitude de la porteuse?

2° ***Filtre passe-bas (F1)***

On fait suivre le multiplieur précédent d'un filtre passe-bas dont le schéma est donné figure 2.

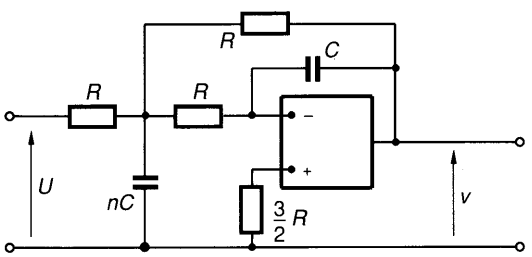


Fig. 2

a) L'amplificateur opérationnel étant considéré comme parfait, calculer, en régime sinusoïdal permanent, l'expression de la transmittance du circuit et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}}{\underline{U}} = \frac{-1}{1 + 2jk\frac{\omega}{\omega_C} + \left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}.$$

Déterminer les valeurs de ω_C et k en fonction des éléments du montage.

b) Représenter le diagramme de Bode du filtre (amplitude et phase).

c) On s'impose une valeur de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et une atténuation de 80 dB à la fréquence de 2 MHz.

– Justifier le choix de cette fréquence.
– On choisit $C = 1\,000$ pF. Calculer n, ω_C et R.

c) Représenter les signaux $e(t)$ et $v(t)$ pour des taux de modulation m inférieurs et supérieurs à 1. Comparer les signaux obtenus à la sortie du filtre avec ceux que l'on obtiendrait dans le cas d'une détection d'enveloppe. Que peut-on conclure?

3° *Reconstitution de la porteuse*

Le signal reçu à l'entrée du récepteur est modulé en amplitude. Il ne peut donc pas constituer le signal $e_0(t)$ à l'entrée du multiplieur de la figure 1. Pour reconstituer la porteuse à partir du signal $e(t)$, on utilise une boucle à verrouillage de phase (*fig.* 3) comprenant :

– un multiplieur X_2, identique à celui de la figure 1,
– un filtre passe-bas F_2 dont la transmittance est égale à 1 pour tous les signaux de fréquence très inférieure à f_0,
– un oscillateur contrôlé en tension, *OCT*, délivrant un signal sinusoïdal d'amplitude constante E_S et de pulsation ω_S proportionnelle à la tension de sortie du filtre F_2 :

$$\omega_S = \omega_0 + K_0 v_C,$$

d'où $v_S(t) = E_S \cos(\omega_0 t + \varphi_S)$, E_S étant une constante,

avec $\frac{d\varphi_S}{dt} = K_0 v_C$, K_0 étant positif.

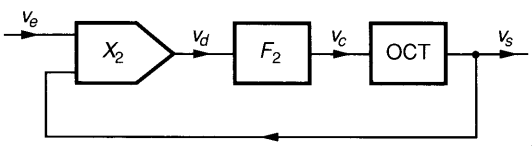


Fig. 3

La boucle est dite «verrouillée» quand la fréquence du signal incident est égale à celle du signal de sortie de l'oscillateur contrôlé.

a) Pour des tensions

$v_e(t) = E \sin(\omega_0 t + \varphi_e)$ et $v_S(t) = E_S \cos(\omega_0 t + \varphi_S)$

et si $\left|\frac{d\varphi_e}{dt}\right|$ et $\left|\frac{d\varphi_S}{dt}\right|$ restent très inférieurs à ω_0, montrer que la valeur de la tension de sortie du filtre F_2 est :

$$v_C = K_d \sin(\varphi_e - \varphi_S).$$

Donner la valeur de K_d.
Quand la boucle est verrouillée qu'en déduisez-vous quant à la différence de phase des signaux d'entrée et de sortie?
Montrer que, pour un régime proche du verrouillage, on peut admettre que $v_C \approx K_d(\varphi_e - \varphi_S)$.

b) Le signal $v_e(t)$ est maintenant un signal modulé en amplitude du type :

$$v_e(t) = e(t) = E(1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Exprimer la tension de commande de l'oscillateur contrôlé par tension en admettant l'approximation du paragraphe précédent (régime proche du verrouillage) et en déduire l'équation différentielle donnant $\varphi_S(t)$.
Résoudre cette équation différentielle et en déduire que φ_S tend vers 0 rapidement.
En déduire que le signal de sortie de l'oscillateur contrôlé se fixe rapidement à la valeur $v_S(t) = E_S \cos \omega_0 t$, qu'il y ait ou non une modulation d'amplitude sur la porteuse.

c) On fait suivre l'oscillateur contrôlé d'un quadripôle introduisant un déphasage φ et une atténuation A à la fréquence f_0 (F_3).

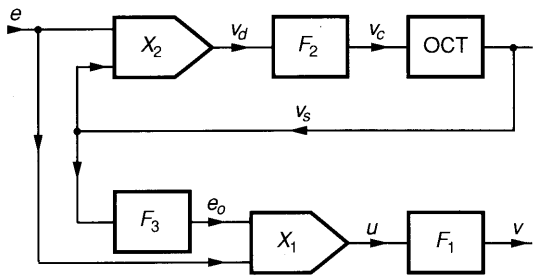


Fig. 4

Quelle doit être la valeur de φ pour obtenir le signal $e_0(t)$ de la première partie?
L'atténuation introduite par le quadripôle a-t-elle une importance?
Quelle serait la valeur du signal de sortie $v(t)$ si φ avait une valeur quelconque?

4 modulation □ bande latérale unique

Soit à transmettre le signal $s_m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ à l'aide d'une porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$. Nous avons vu que la multiplication du signal $s_m(t)$ par la porteuse conduit à deux composantes sinusoïdales d'amplitude $\frac{kA_CA_m}{2}$ et de fréquences $f_C + f_m$ et $f_C - f_m$.

On réalise une modulation B-L-U en ne conservant qu'une seule de ces deux composantes sinusoïdales. Si l'on conserve la bande latérale supérieure, le signal transmis s'écrit

$$s(t) = \frac{kA_CA_m}{2} \cos 2\pi(f_C + f_m)t.$$

1. FORME DU SIGNAL B-L-U

L'expression de $s(t)$ montre que si le signal modulant est une sinusoïde de fréquence f_m, le signal B-L-U est une sinusoïde d'amplitude constante et de fréquence $f_C + f_m$. La modulation B-L-U se traduit par une translation du signal à transmettre dans le domaine fréquentiel.

2. SPECTRE DU SIGNAL B-L-U

Pour un signal modulant $s_m(t)$ dont le spectre s'étend de f_m à f_M (*fig.* 1), le signal B-L-U, $s(t)$, encombre l'intervalle de fréquence $[f_C + f_m, f_C + f_M]$ (*fig.* 2).

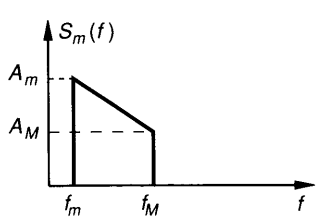


Fig. 1

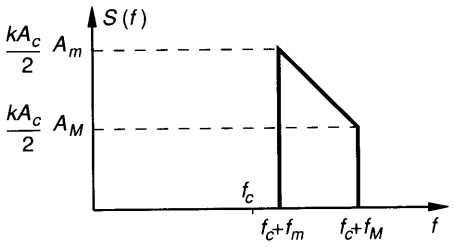


Fig. 2

En ne conservant qu'une seule bande latérale, on limite la bande de fréquence nécessaire à la transmission.

3. PRODUCTION DU SIGNAL B-L-U

3.1. PRODUCTION PAR FILTRAGE

Le signal B-L-U peut être obtenu par filtrage en supprimant une des bandes latérales du signal de sortie du modulateur équilibré.

Supposons que l'on souhaite transmettre, à l'aide d'une porteuse de fréquence $f_C = 10$ MHz, un signal qui encombre la plage de fréquence s'étendant de 300 Hz à 3kHz. Après multiplication, la bande latérale supérieure s'étend de 10,000 3 MHz à 10,003 MHz alors que la bande latérale inférieure s'étend de 9,997 MHz à 9,999 7 MHz.

Sachant qu'un signal peut être considéré comme éliminé s'il est divisé par 100, il faut disposer d'un filtre qui fait apparaître une atténuation de 40 db entre 9,999 7 MHz et 10,000 3 MHz. Un tel filtre est pratiquement impossible à construire. On peut alors procéder par deux changements de fréquence, suivant le schéma synoptique de la figure 3.

– A la sortie du premier multiplicateur X_1 le signal comprend deux bandes de fréquence

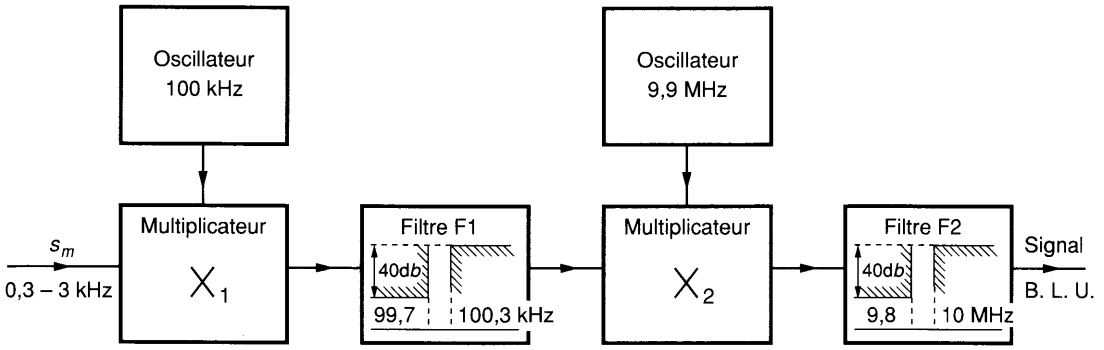


Fig. 3

s'étendant respectivement de 100,3 à 103 kHz et de 97 à 99,7 kHz.

– En provoquant une atténuation de 40 db entre les fréquences 99,7 et 100,3 kHz, le filtre F_1 isole la bande de fréquence s'étendant de 100,3 à 103 kHz.

– Le signal en sortie du deuxième multiplicateur X_2 est constitué de deux plages fréquentielles allant respectivement de 10,000 3 à 10,003 MHz et de 9,797 à 9,799 7 MHz.

– Le filtre F_2, en faisant apparaître une atténuation de 40 db entre les fréquences 9,8 et 10 MHz isole la bande latérale supérieure de 10,000 3 à 10,003 MHz.

3.2. PRODUCTION PAR DÉPHASAGE

Le signal B-L-U $s(t) = k_0 A_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t$ peut être écrit sous la forme :

$$s(t) = k_0 A_C A_m[\cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t - \sin 2\pi f_C t \sin 2\pi f_m t]$$

$$= k_0 A_C A_m\left[\cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t - \cos\left(2\pi f_C t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Le signal B-L-U peut donc être élaboré par un dispositif conforme au schéma synoptique de la figure 4.

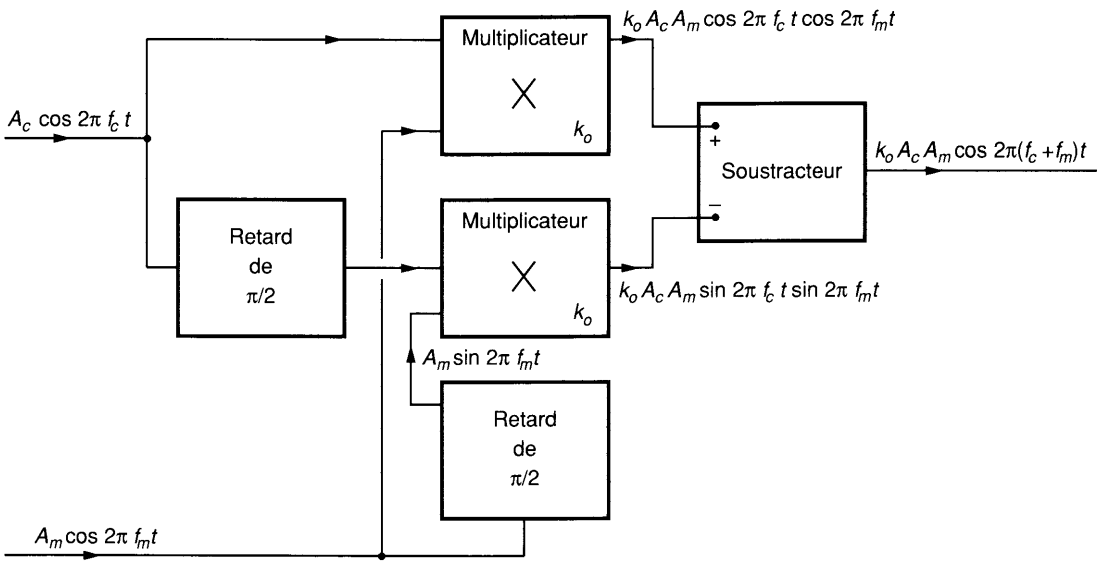


Fig. 4

• Le système effectue sur la porteuse $A_C \cos 2\pi f_C t$ et sur le signal de modulation $A_m \cos 2\pi f_m t$ les opérations suivantes :

– multiplication directe pour produire le signal

$$k_0 A_C A_m \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t;$$

– multiplication après déphasage de $\frac{\pi}{2}$, conduisant au signal

$$k_0 A_C A_m \sin 2\pi f_C t \sin 2\pi f_m t.$$

Les résultats des deux multiplications sont alors soustraits pour obtenir le signal B-L-U :

$$\begin{aligned} s(t) &= k_0 A_C A_m [\cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t \\ &\qquad - \sin 2\pi f_C \sin 2\pi f_m t] \\ &= k_0 A_C A_m \cos 2\pi [f_C + f_m] t. \end{aligned}$$

• La plupart des circuits déphaseurs imposent un déphasage qui dépend de la fréquence du signal d'attaque. Cela ne pose pas de problème pour la porteuse car sa fréquence f_C est fixée avec précision. Par contre le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ du signal de modulation est plus difficile à réaliser car sa fréquence f_m est susceptible de fortes variations (par exemple de 300 Hz à 3 kHz pour la transmission de la parole).

Étudions, à cet effet, l'influence d'un déphasage imparfait, égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$, sur le signal de fréquence f_m.

Le dispositif de la figure 4 fait apparaître le signal de sortie

$$\begin{aligned} s(t) &= k_0 A_C A_m \cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t - k_0 A_C A_m \\ &\qquad \cos\left[2\pi f_C t - \frac{\pi}{2}\right] \cos\left[2\pi f_m t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right] \\ &= k_0 A_C A_m [\cos 2\pi f_C t \cos 2\pi f_m t \\ &\qquad - \sin 2\pi f_C t \sin (2\pi f_m t + \varphi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t) = \frac{k_0 A_C A_m}{2} &\Big[\cos 2\pi (f_C + f_m) t + \cos 2\pi (f_C - f_m) t \\ &+ \cos [2\pi (f_C + f_m) t + \varphi] \\ &- \cos [2\pi (f_C - f_m) t - \varphi]\Big] \end{aligned}$$

où en regroupant les termes de fréquences $f_C + f_m$ et $f_C - f_m$,

$$\begin{aligned} s(t) = \frac{k_0 A_C A_m}{2} &\left[2 \cos\left[2\pi (f_C + f_m) t + \frac{\varphi}{2}\right] \cos\frac{\varphi}{2}\right. \\ &\left. - 2 \sin\left[2\pi (f_C - f_m) t - \frac{\varphi}{2}\right] \sin\frac{\varphi}{2}\right] \\ = k_0 A_C A_m &\left[\cos\frac{\varphi}{2} \cos\left[2\pi (f_C + f_m) t + \frac{\varphi}{2}\right]\right. \\ &\left. - \sin\frac{\varphi}{2} \sin\left[2\pi (f_C - f_m) t - \frac{\varphi}{2}\right]\right] \end{aligned}$$

Ainsi les deux composantes latérales, de fréquences $f_C + f_m$ et $f_C - f_m$, sont présentes à la sortie du dispositif de la figure 4 et leurs amplitudes sont respectivement égales à $k_0 A_C A_m \cos\frac{\varphi}{2}$ et $k_0 A_C A_m \sin\frac{\varphi}{2}$, leur rapport étant égal à

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \tan\frac{\varphi}{2}.$$

• Sachant que l'on peut considérer qu'une composante latérale est éliminée si elle est atténuée de 40 décibels par rapport à l'autre, il vient :

$$20 \lg\left[\tan\frac{\varphi}{2}\right] < -40$$

soit $\tan\frac{\varphi}{2} < \frac{1}{100}$ et $\varphi < 1{,}14°$.

Lorsque la fréquence f_m varie de 300 Hz à 3 kHz, le déphasage correspondant ne doit pas varier de plus de 1,14° autour de 90°.

• Supposons que le déphaseur soit construit conformément au schéma de la figure 5.

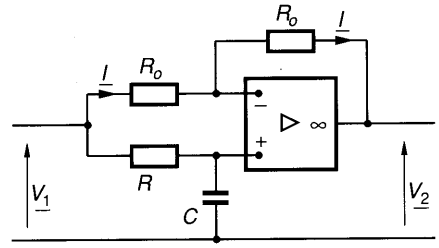


Fig. 5

A partir de l'équation :

$$\underline{I} = \frac{\underline{V_1} - \dfrac{\underline{V_1}}{1 + jRC\omega}}{R_0} = \frac{\dfrac{\underline{V_1}}{1 + jRC\omega} - \underline{V_2}}{R_0},$$

il vient : $\underline{V_2} = \dfrac{2\underline{V_1}}{1 + jRC\omega} - \underline{V_1} = \dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{V_1}$.

Sachant que le module de $\dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$ est égal à 1 et que son argument est égal à $-2\arctan(RC\omega)$, la tension de sortie garde la même amplitude que

la tension d'entrée mais elle est retardée d'un angle θ qui dépend de $RC\omega$.

Si les éléments R et C ont été choisis de façon à imposer un retard de 90° sur la fréquence $f_0 = 1$ kHz, ils vérifient l'équation $2\pi RCf_0 = 1$.

Calculons le déphasage correspondant

$$\left(\varphi = -2 \arctan RC\omega_m = -2 \arctan \frac{f_m}{f_0}\right)$$

sur les limites de la bande à transmettre.

- pour $f_m = 300$ Hz

$$\varphi = -2 \arctan \frac{300}{1\,000} = -33{,}4°;$$

- pour $f_m = 3$ kHz

$$\varphi = -2 \arctan \frac{3\,000}{1\,000} = -143°.$$

Le dispositif de la figure 5 ne peut donc pas convenir pour déphaser de 90° le signal de modulation dont la fréquence f_m varie entre 300 Hz et 3 kHz.

- On réalise alors un banc de déphaseurs (*fig.* 6) construits sur le principe du dispositif de la figure 5 et provoquant un déphasage de 90° sur des fréquences décalées, respectivement 49,85 Hz, 206 Hz, 597 Hz, 1 658 Hz, 4 853 Hz, 20 060 Hz.

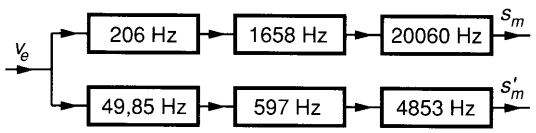


Fig. 6

Pour un signal sinusoïdal v_e, de fréquence f_m, le système fournit deux signaux s_m et s'_m déphasés de

$$\varphi = -2 \arctan \frac{f_m}{20\,060} - 2 \arctan \frac{f_m}{1\,658} - 2 \arctan \frac{f_m}{206} + 2 \arctan \frac{f_m}{49{,}85} + 2 \arctan \frac{f_m}{597} + 2 \arctan \frac{f_m}{4\,853}.$$

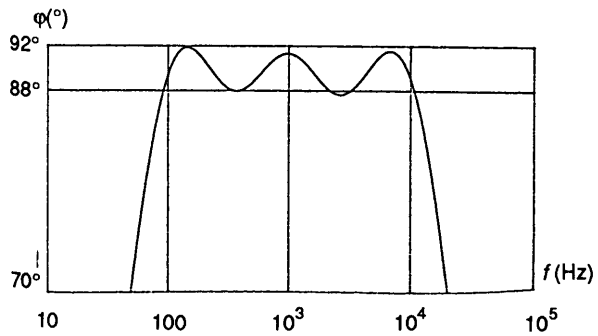


Fig. 7

Les variations de φ en fonction de f_m sont données à la figure 7. Lorsque f_m varie entre 100 Hz et 10 kHz, le déphasage φ reste compris entre 88° et 92°, ce qui est proche des conditions requises.

4. DÉMODULATION DU SIGNAL B-L-U

Le signal à transmettre peut être reconstitué à l'aide du démodulateur synchrone de la figure 8.

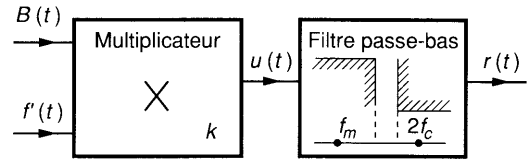


Fig. 8

- Le signal B-L-U,

$$B(t) = k_0 A_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t$$

est multiplié par le signal issu d'un oscillateur local $f'(t) = A'_C \cos 2\pi f_C t$, ce qui conduit au signal

$$u(t) = k_0 k A_C A'_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t \cos 2\pi f_C t$$

$$u(t) = \frac{k_0 k A_C A'_C A_m}{2} \times [\cos 2\pi(2f_C + f_m)t + \cos 2\pi f_m t].$$

La fréquence f_m du signal modulant est très faible par rapport à la fréquence f_C de la porteuse. Le filtre passe-bas élimine les composantes dont la fréquence est voisine de $2f_C$, et délivre le signal :

$$r(t) = \frac{kk_0 A_C A'_C}{2} A_m \cos 2\pi f_m t$$

qui est bien proportionnel au signal modulant $A_m \cos 2\pi f_m t$.

Comme pour toutes les démodulations synchrones, il faut disposer à la réception d'un oscillateur local synchrone de l'oscillateur à l'émission.

Étudions l'effet d'un décalage fréquentiel Δf_C de l'oscillateur local à la réception. Le signal $u(t)$ s'écrit alors :

$$u(t) = k_0 k A_C A'_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t \cos 2\pi(f_C + \Delta f_C)t$$

$$= \frac{k_0 k A_C A'_C}{2} A_m [\cos [2\pi(2f_C + f_m + \Delta f_C)]t + \cos 2\pi[f_m - \Delta f_C]t].$$

Après filtrage, le signal de sortie s'écrit

$$r(t) = \frac{k_0 k A_C A'_C}{2} A_m \cos 2\pi[f_m - \Delta f_C]t$$

La fréquence est translatée de Δf_C par rapport à celle du signal modulant. L'expérience montre qu'un décalage $\Delta f_C = 10$ Hz est tolérable. Si la fréquence de la porteuse est 10 MHz, la stabilité en fréquence de l'oscillateur local à la réception doit être $\frac{10}{10^7} = 10^{-6}$ ce qui nécessite l'utilisation d'oscillateurs à quartz.

La recherche du canal s'effectue en réglant l'oscillateur local jusqu'à ce que le signal démodulé soit « acceptable ». Dès lors on conçoit que la modulation B-L-U soit essentiellement utilisée pour la transmission de la parole sur des canaux disposant d'une faible bande de fréquence.

5. MODULATION BANDE LATÉRALE UNIQUE AVEC PORTEUSE

Afin de pouvoir synchroniser l'oscillateur à la réception, la porteuse peut être ajoutée au signal bande latérale unique qui s'écrit alors :

$$s(t) = k_0 A_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t + A_C \cos 2\pi f_C t.$$

L'accroissement de la bande de fréquence nécessaire à la transmission est minime.

Remarquons que le signal émis peut être mis sous la forme

$$s(t) = A_C[(1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_C t - k_0 A_m \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_C t]$$

$$s(t) = A_C[1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t]\left[\cos 2\pi f_C t - \frac{k_0 A_m \sin 2\pi f_m t}{1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t} \sin 2\pi f_C t\right]$$

où en posant

$$\tan \varphi(t) = \frac{k_0 A_m \sin 2\pi f_m t}{1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t} = \frac{\sin \varphi(t)}{\cos \varphi(t)}$$

$$s(t) = A_C\left[\frac{1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t}{\cos \varphi(t)}\right] [\cos 2\pi f_C t \,.\, \cos \varphi(t) - \sin 2\pi f_C t \,.\, \sin \varphi(t)]$$

Sachant que

$$\frac{1}{\cos \varphi(t)} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi(t)} = \frac{\sqrt{1 + 2k_0 A_m \cos 2\pi f_m t + (k_0 A_m)^2}}{1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t}$$

il vient :

$$s(t) = A_C \sqrt{1 + 2k_0 A_m \cos 2\pi f_m t + (k_0 A_m)^2} \cos [2\pi f_C t + \varphi(t)].$$

Il s'agit d'un signal modulé à la fois en fréquence (par $\varphi(t)$) et en amplitude par

$$\sqrt{1 + 2k_0 A_m \cos 2\pi f_m t + (k_0 A_m)^2}.$$

Dans le cas où la profondeur de modulation est faible, on peut négliger le terme $(k_0 A_m)^2$ devant 1 et écrire :

$$\sqrt{1 + 2k_0 A_m \cos 2\pi f_m t + (k_0 A_m)^2} \approx 1 + k_0 A_m \cos 2\pi f_m t.$$

La modulation d'amplitude est alors linéaire et il est possible, à la réception de reconstituer le signal modulant $A_m \cos 2\pi f_m t$ en détectant l'enveloppe du signal $s(t)$ par un démodulateur à diode.

6. RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Déterminons le rapport signal sur bruit, correspondant à un signal B-L-U sans porteuse, démodulé par le dispositif de la figure 8.

Sachant que le signal utile encombre une bande de fréquence s'étendant de f_C à $f_C + f_M$, et afin d'éliminer un maximum de bruit, le signal reçu est au préalable passé à travers un filtre dont la fonction de transfert idéalisée est donnée à la figure 9.

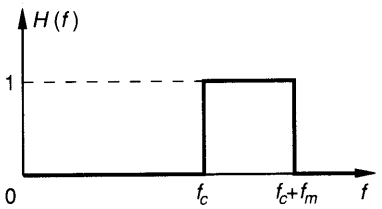


Fig. 9

• A partir de l'écriture du bruit incident sous la forme

$$n(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta} \cos [\varphi_n(t)],$$

le signal de bruit après filtrage s'écrit

$$n_i(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta} \cos [\varphi_{n_i}(t)]$$

avec $$f_C \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\varphi_{n_i}(t)}{dt}\right| \leqslant f_C + f_M.$$

• A la sortie du multiplicateur, le signal de bruit devient

$$n_s(t) = \frac{kA'_C}{2}\sqrt{F}\sqrt{\eta}\,[\cos[2\pi f_C t + \varphi_{n_i}(t)] + \cos\,[2\pi f_C t - \varphi_{n_i}(t)]]$$

Il est constitué de deux termes dont les fréquences instantanées sont

$$\left|f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi_{n_i}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \quad \text{et} \quad \left|f_C - \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi_{n_i}(t)}{\mathrm{d}t}\right|.$$

Sachant que le filtre limite les variations de $\varphi_{n_i}(t)$ à $f_C \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_{n_i}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant f_C + f_M$, l'un des termes fait apparaître la bande de fréquence s'étendant de $2f_C$ à $2f_C + f_M$, alors que l'autre encombre la bande de fréquence allant de 0 à f_M.

• Le filtre passe-bas du démodulateur ne transmet que les composantes de fréquence inférieure à f_M et le signal de bruit à la sortie du démodulateur de la figure 8 s'écrit :

$$n_0(t) = \frac{kA'_C}{2}\sqrt{F}\sqrt{\eta}\,\cos\,[\varphi_{n_0}(t)]$$

avec $0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_{n_0}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant f_M$.

Le carré de sa valeur quadratique moyenne est :

$$B_0 = \overline{n_0^2(t)} = \left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 \eta F\,\overline{\cos^2\,[\varphi_{n_0}(t)]}$$

avec $\overline{\cos^2\,[\varphi_{n_0}(t)]} = \frac{f_M}{F}$

soit $B_0 = \left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 \eta f_M$.

Cette puissance normalisée de bruit est deux fois plus faible que celle correspondant à la modulation d'amplitude, ce qui est justifié par le fait que le filtre passe-bande à l'entrée du démodulateur possède une bande passante deux fois plus faible.

• Le signal utile incident qui s'écrit

$$k_0 A_C A_m \cos 2\pi(f_C + f_m)t,$$

développe une puissance normalisée

$$S_i = \frac{(k_0 A_C A_m)^2}{2}.$$

A la sortie du démodulateur, le signal utile qui s'écrit

$$r(t) = k_0 A_C A_m \frac{kA'_C}{2}\cos 2\pi f_m t$$

développe la puissance normalisée

$$S_0 = \frac{(k_0 A_C A_m)^2}{2}\left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 = \left(\frac{kA'_C}{2}\right)^2 S_i.$$

• Le rapport signal sur bruit s'écrit en sortie du démodulateur

$$S\,.\,N\,.\,R = \frac{S_0}{B_0} = \frac{\left(k\frac{A'_C}{2}\right)^2 S_i}{\left(k\frac{A'_C}{2}\right)^2 \eta f_M} = \frac{S_i}{\eta f_M},$$

soit : $\boldsymbol{S\,.\,N\,.\,R = \frac{S_i}{\eta f_M}}$.

Il est égal à la valeur que prend le $S\,.\,N\,.\,R$ de la modulation d'amplitude dans le meilleur des cas ($m \gg 1$).

EXERCICE

1. Circuit déphaseur

1° Soit le schéma 1 ci-dessous :

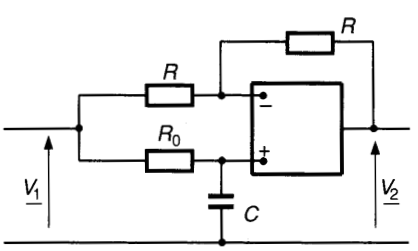


Fig. 1

a) Établir la transmittance

$$\underline{T} = \underline{V_2}/\underline{V_1}$$

b) Sachant que $v_1 = V\,.\,\cos\,(\omega\,.\,t)$, donner l'expression de $v_2(t)$ en régime permanent.

c) Quel est le rôle de ce circuit.

2° *Production d'un signal B-L-U*

À partir d'une porteuse $A_C\,.\,\cos\,(\omega_C\,.\,t)$ et du signal à transmettre, $A_m\,.\,\cos\,(\omega_m\,.\,t)$, on obtient le signal B-L-U, en élaborant le signal $K\,.\,A_m \cos\,(\omega_C + \omega_m)t$.

a) Soit le schéma 2 ci-dessous :

Montrer que, si les déphaseurs imposent un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$, la tension $s(t)$ correspond au signal B-L-U souhaité.

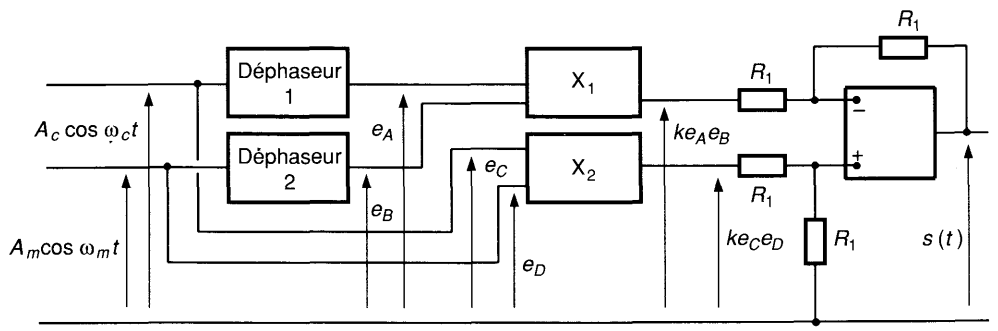


Fig. 2

Donner l'expression de K.

b) La fréquence f_m du signal à transmettre varie entre 100 Hz et 10 kHz. La fréquence f_C de la porteuse est de 1 MHz.
Les circuits déphaseurs sont réalisés conformément au schéma de la question 1°.

α) Le déphaseur 2 provoque un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ pour $f_m = 1$ kHz. Calculer les valeurs $R_1 \cdot C_1$ et $R_2 \cdot C_2$ des produits $R \cdot C$ de chaque déphaseur.

β) Quel est le déphasage provoqué par le déphaseur 2 pour les deux fréquences extrêmes de 100 Hz et de 10 kHz.

3° Pour une fréquence différente de 1 kHz, le déphasage provoqué par le déphaseur 2 est $-\frac{\pi}{2} + \varphi$.

α) Montrer que $s(t)$ s'écrit :

$$A_1 \cdot \cos [(\omega_C + \omega_m)t + \theta] + A_2 \cdot \sin [(\omega_C - \omega_m)t - \theta].$$

β) Exprimer A_1, A_2, θ, en fonction de k, A_m, A_C et φ.

γ) Sachant qu'on veut réaliser

$$20 \cdot \lg |A_1/A_2| > 40 \text{ db}.$$

Quelle est la valeur maximale admissible pour φ?
Quelle conclusion peut-on en tirer?

4° On réalise le déphaseur 2 par un banc de déphaseurs (*fig.* 3 ci-dessous), élaborés à partir de la figure 1, et imposant des déphasages de $-\frac{\pi}{2}$ pour des fréquences $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

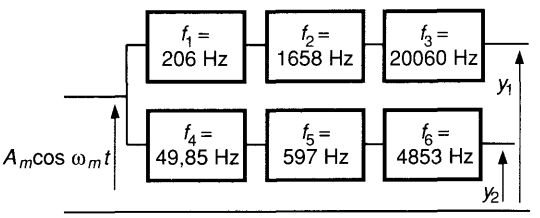


Fig. 3

a) Quel est, en fonction de ω_m, l'angle de retard de y_2 sur y_1.

b) Calculer les valeurs numériques de cet angle de retard pour $f = \frac{\omega_m}{2\pi} = 100$ Hz; 300 Hz; 1 kHz; 3 kHz; 10 kHz.
Conclure.

c) Donner le schéma synoptique complet permettant de produire des signaux B-L-U pour un signal de modulation dont la fréquence varie entre 100 Hz et 10 kHz.

5 □ modulation de fréquence

D'une manière générale le signal transmis s'écrit sous la forme

$$s(t) = S(t) \cos [\theta(t)]$$

- pour une modulation d'amplitude, le signal modulant intervient, à l'extérieur de la fonction sinusoïdale, sur le terme $S(t)$;
- pour une modulation de fréquence, c'est le terme $\theta(t)$ placé à l'intérieur de la fonction sinusoïdale qui évolue au rythme du signal modulant.

1. MODULATION DE PHASE ET MODULATION DE FRÉQUENCE

Dans ce mode de transmission, l'angle $\theta(t)$ peut être écrit sous la forme

$$\theta(t) = 2\pi f_C t + \varphi(t).$$

Le signal émis, dont l'amplitude reste constante et égale à A_C, s'écrit

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + \varphi(t)].$$

Sa fréquence instantanée est :

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right| = \left|f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|.$$

Le terme $\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$ étant très faible par rapport à f_C, il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right| = f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Cette fréquence est susceptible de varier, autour de f_C, par l'intermédiaire du terme $\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$ qui dépend du signal à transmettre $s_m(t)$. On distingue, dès lors, deux dispositifs de modulation.

a) Modulation de phase

La phase $\varphi(t)$ est directement proportionnelle au signal modulant $s_m(t)$ soit

$$\varphi(t) = k s_m(t).$$

b) Modulation de fréquence

La partie variable de la fréquence, $\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$, varie proportionnellement au signal à transmettre $s_m(t)$ soit :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k s_m(t).$$

Si le signal modulant $s_m(t)$ est inconnu, l'observation du signal transmis $s(t)$, sur un oscilloscope ne permet pas de conclure à une modulation de phase où à une modulation de fréquence.

Déviation de phase et déviation de fréquence

Dans le cas où le signal modulant est sinusoïdal et de fréquence f_m, le signal transmis s'écrit :

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + \beta \sin 2\pi f_m t],$$

sa fréquence instantanée est

$$f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\beta \sin 2\pi f_m t) = f_C + \beta f_m \cos 2\pi f_m t.$$

- Le terme $\beta \sin 2\pi f_m t$ est la **déviation de phase.** Sa valeur maximale β est appelée **indice de modulation.**
- Le terme $\beta f_m \cos 2\pi f_m t$, qui est l'écart de fréquence par rapport à f_C est appelé **déviation de fréquence.** Sa valeur maximale Δf est liée à l'indice de modulation β par

$$\Delta f = \beta f_m.$$

Bien que la fréquence instantanée du signal modulé en fréquence reste dans la plage fré-

quentielle $f_C - \Delta f$, $f_C + \Delta f$, on ne peut pas conclure que toutes ses composantes spectrales soient comprises dans cet intervalle, car elles dépendent de la vitesse de variations de la fréquence instantanée.

2. FORME DU SIGNAL MODULÉ EN FRÉQUENCE

Un oscilloscope synchronisé sur le signal modulé en fréquence permet d'observer la courbe de la figure 1.

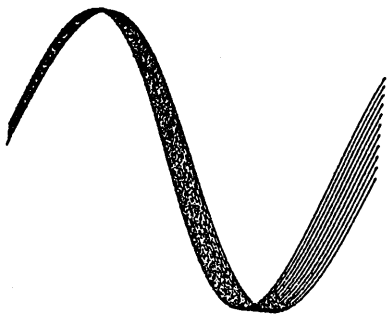


Fig. 1

3. SPECTRE DU SIGNAL MODULÉ SINUSOÏDALEMENT EN FRÉQUENCE

Si le signal modulant est une sinusoïde de fréquence f_m, le signal émis $s(t)$ s'écrit sous la forme

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + \beta \sin 2\pi f_m t]$$

Sa décomposition conduit à

$$s(t) = A_C[\cos 2\pi f_C t \cos (\beta \sin 2\pi f_m t) - \sin 2\pi f_C t \sin (\beta \sin 2\pi f_m t)]$$

Elle fait apparaître les termes

$f(t) = \cos (\beta \sin 2\pi f_m t)$ et

$g(t) = \sin (\beta \sin 2\pi f_m t)$ que nous allons étudier séparément.

La fonction $f(t) = \cos (\beta \sin 2\pi f_m t)$ présente les propriétés suivantes :

- Elle est périodique, de période $T = \frac{1}{f_m}$. Elle peut donc être décomposée en série de Fourier;
- Elle est paire ($f(-t) = f(t)$). La décomposition en série de Fourier ne contient donc que des termes en cosinus;
- Elle vérifie l'équation $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = f(t)$. Sa décomposition ne comprend que des harmoniques de rang pair.

La fonction $f(t) = \cos (\beta \sin 2\pi f_m t)$ dépend de l'indice de modulation β. Il en va de même pour les amplitudes de ses harmoniques, et $f(t)$ s'écrit sous la forme :

$$f(t) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\pi 2 f_m t + 2J_4(\beta) \cos 2\pi 4 f_m t + ...$$

La fonction $g(t) = \sin (\beta \sin 2\pi f_m t)$ présente les propriétés suivantes :

- elle est périodique $\left(T = \frac{1}{f_m}\right)$ et peut être décomposée en série de Fourier;
- elle est impaire $f(-t) = -f(t)$: sa décomposition ne comprend que des termes en sinus;
- elle vérifie la relation $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$: sa décomposition ne contient que des harmoniques de rang impair.

L'amplitude de ses harmoniques dépendant de l'indice de modulation β, la fonction $g(t)$ s'écrit sous la forme :

$$g(t) = 2J_1(\beta) \sin 2\pi f_m t + 2J_3(\beta) \sin 2\pi 3 f_m t + 2J_5(\beta) \sin 2\pi 5 f_m t + ...$$

Après remplacement des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ par leur décomposition, l'expression du signal modulé sinusoïdalement en fréquence devient

$$s(t) = A_C[\cos 2\pi f_C t[J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\pi 2 f_m t + ...] + \sin 2\pi f_C t[2J_1(\beta) \sin 2\pi f_m t + 2J_3(\beta) \sin 2\pi 3 f_m t + ...]].$$

En distribuant les termes $\cos 2\pi f_C t$ et $\sin 2\pi f_C t$, de façon à faire apparaître les composantes élémentaires, il vient :

$$s(t) = A_C[J_0(\beta)\cos 2\pi f_C t + J_1(\beta)[\cos 2\pi(f_C - f_m)t - \cos 2\pi(f_C + f_m)t] + J_2(\beta)[\cos 2\pi(f_C + 2f_m)t + \cos 2\pi(f_C - 2f_m)t] + J_3(\beta)[\cos 2\pi(f_C - 3f_m)t - \cos 2\pi(f_C + 3f_m)t] + \ldots$$

Les fonctions $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$, $J_2(\beta)$... sont les fonctions de Bessel. Elles sont données par des tables.

La représentation graphique des variations de leurs modules, en fonction de l'indice de modulation β est donné à la figure 2.

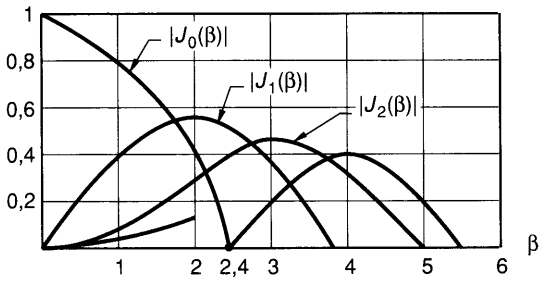


Fig. 2

La décomposition spectrale d'un signal modulé sinusoïdalement en fréquence fait donc apparaître :

- une composante sinusoïdale, à la fréquence de la porteuse et d'amplitude $|J_0(\beta)|$;
- une infinité de composantes latérales de fréquences $f_C - nf_m$ et $f_C + nf_m$ et d'amplitude $J_n(\beta)$.

La figure 3 donne un exemple de décomposition spectrale ($\beta = 2$).

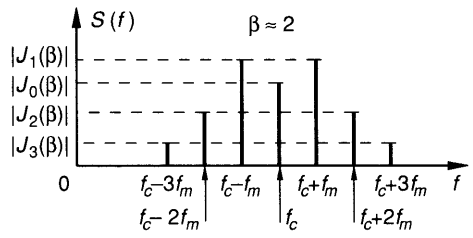


Fig. 3

REMARQUES

a) Pour $\beta = 0$, $J_0(0) = 1$ et $J_n(0) = 0$ quelque soit n non nul. Ce résultat était prévisible, dans la mesure où, en l'absence de modulation ($\beta = 0$), le signal émis $s(t)$ se compose uniquement de la porteuse de fréquence f_C.

b) Pour les faibles valeurs de β, on peut utiliser les formules d'approximation : $J_0(\beta) = 1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ et $J_n(\beta) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^n$. (La pente de la tangente à l'origine est égale à 0,5 pour $n = 1$ et vaut zéro pour $n > 1$.)

c) Lorsque la profondeur de modulation augmente, la puissance du signal modulé se répartit sur les composantes latérales, au détriment de la porteuse.

d) Pour $\beta = 2{,}4$, la porteuse disparaît et le signal $s(t)$ est entièrement distribué sur les bandes latérales. Cette dernière remarque est utilisée, en pratique, pour régler la profondeur de modulation.

Supposons que l'on souhaite obtenir une déviation maximale de fréquence fixée à Δf_0. Sachant que la déviation maximale de fréquence Δf est liée à l'indice de modulation par la relation $\Delta f = \beta f_m$, on procède de la façon suivante :

- *le signal F.M. est modulé sinusoïdalement à la fréquence*

$$f_m = \frac{\Delta f_0}{2{,}4};$$

- *la profondeur de modulation est ajustée de manière à annuler la porteuse de fréquence f_C. L'indice de modulation β est alors égal à 2,4 et la déviation maximale de fréquence est réglée à*

$$\Delta f = 2{,}4 f_m = \Delta f_0.$$

4. ENCOMBREMENT FRÉQUENTIEL DU SIGNAL F.M.

En principe, le signal modulé en fréquence occupe toute la plage de fréquences allant de $-\infty$ à $+\infty$. En pratique l'amplitude $|J_n(\beta)|$ des composantes latérales diminue rapidement lorsque leur ordre n augmente et le signal F.M. peut être transmis, avec une bonne précision dans une bande limitée.

4.1. LE SIGNAL MODULANT EST SINUSOÏDAL

Le signal émis s'écrit

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + \beta \sin 2\pi f_m t].$$

On montre que 98 % de la puissance du signal est alors transmise dans la bande fréquentielle

$$f_C - (\beta + 1)f_m,\ f_C + (\beta + 1)f_m.$$

La transmission du signal nécessite ainsi une plage de fréquence de largeur

$$B = 2(\beta + 1)f_m = 2(\Delta f + f_m).$$

Ce résultat est appelé Règle de CARSON.

En pratique les stations F.M. ont droit à une déviation maximale de fréquence $\Delta f = 75$ kHz. Chaque station encombre alors une plage fréquentielle de l'ordre de 200 kHz, ce qui justifie que leur fréquence d'émission f_C soit relativement élevée (de l'ordre de 100 mégahertz).

Comparaison entre modulation de phase et modulation de fréquence pour $\beta \gg 1$

Supposons que l'on veuille transmettre le signal $s_m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$.

— Pour une modulation de phase, la phase $\varphi(t)$ est directement proportionnelle au signal $s_m(t)$ et le signal modulé s'écrit

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + kA_m \cos 2\pi f_m t].$$

L'indice de modulation β est égal à $\beta = kA_m$ et la transmission nécessite une bande de fréquence

$$B = 2(\beta + 1)f_m \approx 2\beta f_m = 2kA_m f_m.$$

L'encombrement fréquentiel du signal F.M. dépend de la fréquence f_m du signal modulant.

— Pour une modulation de fréquence, la phase $\varphi(t)$ vérifie la relation

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = ks_m(t) = kA_m \cos 2\pi f_m t$$

soit $\varphi(t) = \dfrac{kA_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t$, et le signal modulé s'écrit

$$s(t) = A_C \cos \left[2\pi f_C t + \frac{kA_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t \right].$$

L'indice de modulation est égal à $\beta = \dfrac{kA_m}{2\pi f_m}$ et l'encombrement fréquentiel s'établit à

$$B = 2(\beta + 1)f_m \approx 2\beta f_m = \frac{kA_m}{\pi}.$$

Il est indépendant de la fréquence f_m du signal modulant. C'est le principal avantage de la modulation de fréquence sur la modulation de phase.

4.2. LE SIGNAL MODULANT EST PÉRIODIQUE

Dans le cas où le signal modulant est la somme de plusieurs signaux sinusoïdaux de fréquences $f_1, f_2, \ldots f_n$, le spectre du signal modulé ne résulte pas de la superposition des spectres des signaux modulés successivement par chaque sinusoïde élémentaire de fréquence $f_1, f_2 \ldots f_n$. En d'autres termes, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de superposition.

En effet le signal modulé par la somme de deux signaux sinusoïdaux, de fréquences f_1 et f_2, s'écrit :

$$\begin{aligned} &s_1(t) \\ &= A_C[\cos [2\pi f_C t + \beta_1 \sin 2\pi f_1 t + \beta_2 \sin 2\pi f_2 t]] \\ &= A_C[\cos 2\pi f_C t \cos (\beta_1 \sin 2\pi f_1 t + \beta_2 \sin 2\pi f_2 t) \\ &\quad - \sin 2\pi f_C t \sin (\beta_1 \sin 2\pi f_1 t + \beta_2 \sin 2\pi f_2 t)]. \end{aligned}$$

Alors que la somme des signaux modulés sinusoïdalement s'écrit

$$\begin{aligned} s_2(t) &= A_C[\cos (2\pi f_C t + \beta_1 \sin 2\pi f_1 t) \\ &\qquad + \cos (2\pi f_C t + \beta_2 \sin 2\pi f_2 t)] \\ &= A_C[\cos 2\pi f_C t[\cos (\beta_1 \sin 2\pi f_1 t) \\ &\quad + \cos (\beta_2 \sin 2\pi f_2 t)] - \sin 2\pi f_C t[\sin (\beta_1 \sin 2\pi f_1 t) \\ &\quad + \sin (\beta_2 \sin 2\pi f_2 t)]]. \end{aligned}$$

$\cos [\beta_1 \sin 2\pi f_1 t + \beta_2 \sin 2\pi f_2 t]$ ne pouvant être identifié à $\cos [\beta_1 \sin 2\pi f_1 t] + \cos [\beta_2 \sin 2\pi f_2 t]$, la modulation par la somme $(s_1(t))$ est différente de la somme des modulations $(s_2(t))$. La détermination du spectre est alors compliquée, cependant, on peut admettre la règle suivante :

La bande de fréquence B nécessaire à la transmission s'écrit :

$$B = 2\sqrt{(\Delta f_1)^2 + (\Delta f_2)^2 + \ldots + (\Delta f_n)^2}$$

où Δf_n est la déviation maximale de fréquence que produirait le signal modulant sinusoïdal de fréquence f_n s'il était le seul signal de modulation.

5. PRODUCTION DU SIGNAL F.M.

5.1. PRODUCTION PAR MODULATION DES PARAMÈTRES D'UN CIRCUIT OSCILLANT ACCORDÉ

Le circuit oscillant LC de la figure 4 sélectionne la fréquence $f_C = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

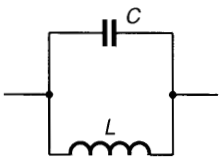


Fig. 4

Si ce circuit est introduit dans la boucle de réaction d'un oscillateur, ce dernier produit un signal sinusoïdal de fréquence $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Il existe des éléments susceptibles de présenter, aux petites variations du signal, une capacité ou une inductance variable, ce sont :

- les varicaps (voir tome I) qui présentent une capacité dynamique qui dépend de la tension moyenne à leurs bornes;
- les inductances saturables, dont l'inductance dynamique L est égale à la pente $\frac{\Delta\Phi}{\Delta I}$ du segment MN (*fig.* 5) décrit par le point de fonctionnement autour du point de repos. L'inductance dynamique varie ainsi en fonction du courant moyen I_0.

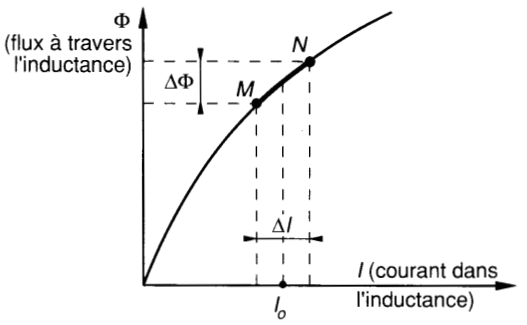


Fig. 5

En faisant varier l'inductance L ou la capacité C du circuit de la figure 4, au rythme du signal modulant, l'oscillateur fournit un signal modulé en fréquence.

5.2. PRODUCTION À PARTIR DE SIGNAUX NON SINUSOÏDAUX

Considérons le dispositif de la figure 6.

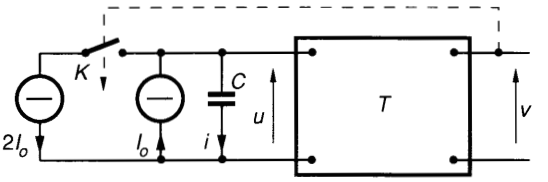


Fig. 6

• Lorsque l'interrupteur K est ouvert, le courant i dans le condensateur est égal à I_0. L'équation caractéristique du condensateur conduit à $\frac{du}{dt} = \frac{I_0}{C}$.

La tension u croît linéairement en fonction du temps.

Lorsque l'interrupteur K est fermé, $i = -I_0$, $\frac{du}{dt} = -\frac{I_0}{C}$ et la tension u décroît linéairement.

• La tension de sortie v du trigger T, varie en fonction de la tension d'entrée u suivant le graphe de la figure 7.

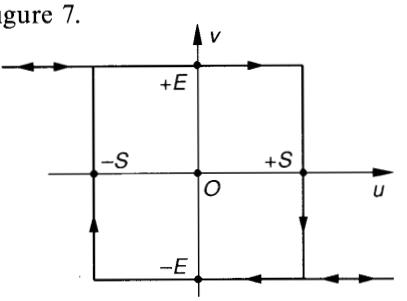


Fig. 7

- Lorsque la tension u atteint le seuil S par valeurs croissantes la tension de sortie v bascule de $+E$ à $-E$.
- Lorsque la tension u atteint le seuil $-S$ par valeurs décroissantes la tension de sortie v bascule de $-E$ à $+E$.

• L'interrupteur K est commandé par la tension de sortie v du trigger

- lorsque $v = E$ l'interrupteur K est ouvert;
- lorsque $v = -E$ l'interrupteur K est fermé.

• La tension d'entrée u évolue donc entre les seuils $-S$ et $+S$ comme l'indique le graphe de la figure 8. C'est une fonction triangulaire dont la fréquence dépend de la pente, $\frac{I_0}{C}$ ou $-\frac{I_0}{C}$, des segments de droite.

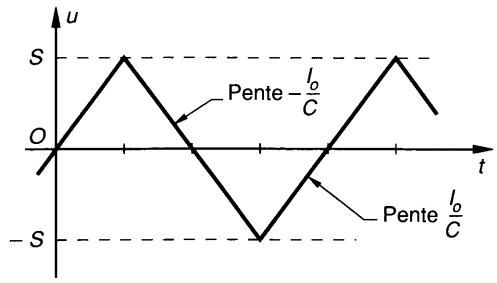


Fig. 8

En faisant varier le courant I_0 au rythme du signal modulant, la tension u est modulée en fréquence.

• Cette tension triangulaire est transformée en tension sinusoïdale après passage à travers un élément non linéaire (conformateur à diode, amplificateur de différence en régime non linéaire...).

5.3. MÉTHODE D'ARMSTRONG

Les méthodes précédentes qui consistent à faire varier la fréquence d'un oscillateur au rythme du signal modulant présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir fixer avec précision la fréquence de la porteuse, car on ne peut demander au système de posséder une fréquence variable tout en maintenant la fréquence de repos parfaitement stable.

Soit $s(t)$ le signal modulé en phase par le signal modulant $m(t)$

$$s(t) = A_C \cos [2\pi f_C t + km(t)]$$
$$= A_C[\cos 2\pi f_C t \cos km(t) - \sin 2\pi f_C t \sin km(t)].$$

Pour une faible profondeur de modulation ($km(t) \ll 1$), les approximations

$$\cos km(t) \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin km(t) \approx km(t)$$

permettent d'écrire le signal modulé sous la forme

$$s(t) = A_C \cos 2\pi f_C t - km(t) A_C \sin 2\pi f_C t.$$

Ce signal F.M. peut être élaboré à partir d'un dispositif conforme au schéma synoptique de la figure 9.

- L'oscillateur produisant la porteuse est complètement isolé du reste du système et peut être facilement stabilisé en fréquence à l'aide d'un quartz.
- Si on désire effectuer une modulation de fréquence plutôt qu'une modulation de phase, la condition

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = km(t),$$

c'est-à-dire $\varphi(t) = k \int m(t)\,dt$, impose une intégration du signal modulant avant de l'appliquer au multiplicateur.

• Sachant que ce système n'est valable que pour de faibles profondeurs de modulation, et pour mieux appréhender le degré d'approximation, effectuons le calcul exact, lorsque le dispositif est modulé en fréquence par un signal sinusoïdal $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ (*fig.* 10).

Les signaux $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $s(t)$ s'écrivent successivement :

$$e_1(t) = \frac{k_0 A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t;$$

(la constante k_0, qui a la dimension d'une pulsation est imposée par l'homogénéité)

$$e_2(t) = A_C \sin\left(2\pi f_C t - \frac{\pi}{2}\right) = -A_C \cos 2\pi f_C t;$$

$$e_3(t) = kk_0 \frac{A_m A_C}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_C t \sin 2\pi f_m t;$$

$$s(t) = A_C \cos 2\pi f_C t + kk_0 \frac{A_m A_C}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_C t \sin 2\pi f_m t.$$

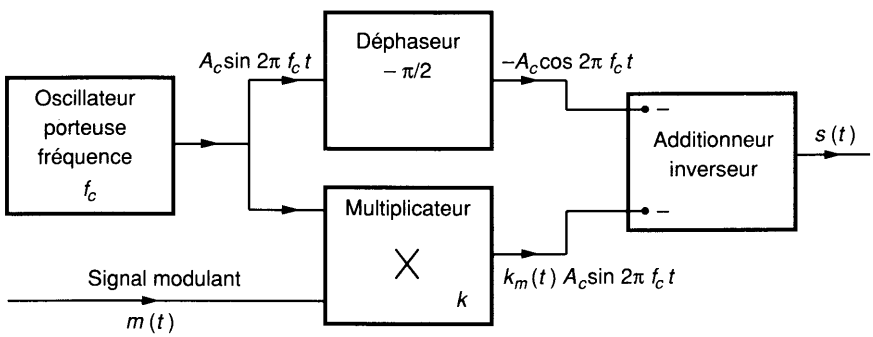


Fig. 9

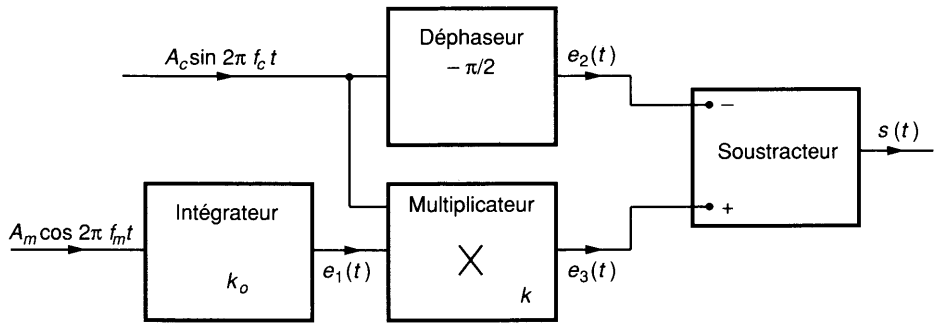


Fig. 10

Afin de déterminer les caractéristiques du signal $s(t)$, mettons-le sous la forme générale

$$s(t) = S(t) \cos [\theta(t)]$$

et pour cela, posons $\tan \varphi(t) = kk_0 \dfrac{A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t$, ce qui conduit à :

$$s(t) = A_C[\cos 2\pi f_C t + \frac{\sin \varphi(t)}{\cos \varphi(t)} \sin 2\pi f_C t]$$

$$= \frac{A_C}{\cos \varphi(t)}[\cos 2\pi f_C t \cos \varphi(t) + \sin 2\pi f_C t \sin \varphi(t)]$$

$$= \frac{A_C}{\cos \varphi(t)} \cos [2\pi f_C t - \varphi(t)].$$

Compte tenu de l'égalité :

$$\frac{1}{\cos \varphi(t)} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi(t)}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \sin^2 2\pi f_m t}$$

le signal $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = A_C \sqrt{1 + \left(\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \sin^2 2\pi f_m t} \cos [2\pi f_C t - \varphi(t)]$$

avec $\tan \varphi(t) = kk_0 \dfrac{A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t.$

Ce signal $s(t)$ est à la fois modulé en amplitude et en fréquence dans la mesure où son amplitude et sa phase, respectivement

$$\begin{cases} S(t) = A_C \sqrt{1 + \left(\dfrac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \sin^2 2\pi f_m t} \\ \varphi(t) = \arctan \left[kk_0 \dfrac{A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t \right] \end{cases}$$

varient au rythme du signal modulant

$$Sm(t) = A_m \cos 2\pi f_m t.$$

• Pour une faible profondeur de modulation, $\dfrac{kk_0 A_m}{2\pi f_m} \ll 1$, on peut effectuer les approximations suivantes :

$$\varphi(t) = \arctan \left[\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t \right]$$

$$\approx \frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t$$

$$S(t) = A_C \sqrt{1 + \left(\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \sin^2 2\pi f_m t}$$

$$\approx A_C \left[1 + \left(\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \frac{\sin^2 2\pi f_m t}{2} \right]$$

$$\approx A_C \left[1 + \left(\frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}\right)^2 \frac{1 - \cos 2\pi 2 f_m t}{4} \right]$$

$$\approx A_C \left[1 - \left(\frac{kk_0 A_m}{4\pi f_m}\right)^2 \cos 2\pi 2 f_m t \right].$$

Le signal $s(t)$ s'écrit ainsi

$$s(t) = A_C \left[1 - \left(\frac{kk_0 A_m}{4\pi f_m}\right)^2 \cos 2\pi 2 f_m t \right] \cos \left[2\pi f_C t - \frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t \right].$$

Il est à la fois modulé

— en amplitude avec l'indice de modulation

$$m = \left(\frac{kk_0 A_m}{4\pi f_m}\right)^2;$$

— en phase avec l'indice de modulation

$$\beta = \frac{kk_0 A_m}{2\pi f_m}.$$

En remarquant que $m = \dfrac{\beta^2}{4}$, nous pouvons conclure qu'en choisissant $\beta \ll 1$, la modulation

résiduelle d'amplitude peut être rendue négligeable par rapport à la modulation de phase.

Il est aussi à remarquer que

la *déviation maximale de fréquence* Δf, qui est liée à l'indice de modulation β par $\Delta f = \beta f_m$, s'écrit

$$\Delta f = \frac{k k_0 A_m}{2\pi}$$

et est ainsi *indépendante de la fréquence du signal modulant.*

Exemple de construction d'un émetteur par la synthèse d'Armstrong

On désire transmettre un signal modulant dont la fréquence f_m varie entre 50 Hz et 20 kHz, à l'aide d'un émetteur F.M. dont la porteuse a pour fréquence $f_C = 96$ MHz et qui encombre toute la plage de fréquence autorisée ce qui correspond à une déviation maximale de fréquence $\Delta f = 75$ kHz.

Sachant que l'indice de modulation β est lié à la déviation maximale de fréquence par $\Delta f = \beta f_m$, la condition requise pour réaliser la synthèse d'Armstrong ($\beta \ll 1$) n'est pas satisfaite et ce d'autant plus que la fréquence du signal modulant est plus faible

(pour $f = 50$ Hz :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75 \times 10^3}{50} = 1\,500$$

et pour $f = 20$ kHz :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75 \times 10^3}{20 \times 10^3} = 3{,}75\Big).$$

On réalise alors le dispositif conforme au schéma synoptique de la figure 11.

- Le synthétiseur d'Armstrong fournit un signal F.M. $s_1(t)$ dont la porteuse a pour fréquence $f_C = 200$ kHz et dont la déviation maximale de fréquence Δf, indépendante de la fréquence f_m, est égale à 25 Hz. L'indice de modulation β varie de

  $\beta = \dfrac{25}{50} = 0{,}5$, pour $f_m = 50$ Hz, à

  $\beta = \dfrac{25}{20.10^3} = 1{,}25 \times 10^{-3}$ pour $f_m = 20$ kHz.

  La condition $\beta \ll 1$ est ainsi quasiment vérifiée et la fréquence du signal $s_1(t)$ varie entre 199,975 kHz et 200,025 kHz.

- Après multiplication de la fréquence par 64, on obtient un signal $s_2(t)$ dont la fréquence varie entre 12,798 4 MHz et 12,801 6 MHz, ce qui correspond à une porteuse de fréquence $f_C = 12{,}8$ MHz et à une déviation maximale de fréquence $\Delta f = 1{,}6$ kHz.

- La multiplication du signal $s_2(t)$ par le signal de fréquence $f_C = 10{,}8$ MHz fourni par l'oscillateur à quartz conduit à deux bandes fréquentielles centrées respectivement sur $12{,}8 - 10{,}8 = 2$ MHz et $12{,}8 + 10{,}8 = 23{,}6$ MHz.

- Le filtre passe-bas isole la plage fréquentielle inférieure et la fréquence du signal $s_3(t)$ varie entre $12{,}798\,4 - 10{,}8 = 1{,}998\,4$ MHz et $12{,}801\,6 - 10{,}8 = 2{,}001\,6$ MHz, ce qui

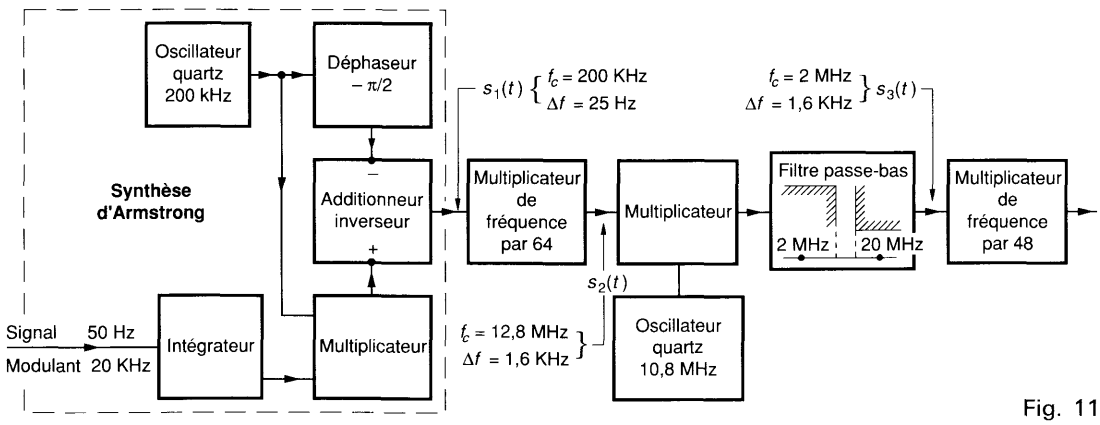


Fig. 11

correspond à une porteuse de fréquence $f_C = 2$ MHz et a une déviation maximale de fréquence $\Delta f = 1{,}6$ kHz.

– Après multiplication de la fréquence par 48, on obtient un signal dont la fréquence varie entre 95,923 2 MHz et 96,076 8 MHz ce qui correspond à une porteuse de fréquence $f_C = 96$ MHz et à une déviation maximale de fréquence $\Delta f = 76{,}8$ kHz légèrement supérieure à 75 kHz.

Construction du multiplicateur de fréquence

Le multiplicateur de fréquence peut être construit à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (*fig.* 12).

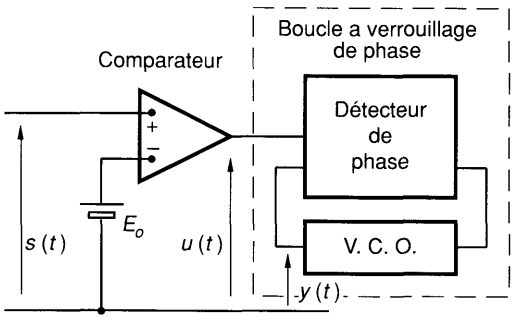


Fig. 12

Le signal $u(t)$, à la sortie du comparateur est constitué d'une suite d'impulsions dont la fréquence est égale à la fréquence f_C du signal incident $s(t)$. Sa décomposition en série de Fourier fait apparaître des composantes de fréquence f_C, $2f_C$, $3f_C$...

La boucle à verrouillage de phase étant accordée sur l'harmonique nf_C, le signal $y(t)$ à la sortie du V.C.O. est un signal d'amplitude constante et de fréquence nf_C qui suit l'évolution de la fréquence f_C du signal $s(t)$ tant que ses variations restent suffisamment faibles (en valeur relative) pour que la boucle reste accrochée.

6. DÉMODULATION DU SIGNAL F.M.

6.1. DÉMODULATION PAR DISCRIMINATEUR

Le but du discriminateur est de transformer la modulation de fréquence en modulation d'amplitude. Cette dernière est alors détectée par un démodulateur à diode afin de reconstituer le signal modulant.

La fonction de transfert $H = \dfrac{V_S}{V_E}$ du discriminateur idéal est donnée à la figure 13 et peut être décrite par l'équation $\dfrac{V_S}{V_E} = af$.

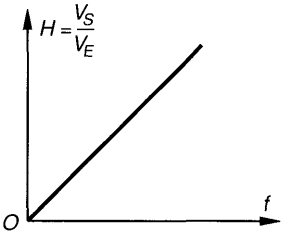


Fig. 13

Le discriminateur est précédé d'un amplificateur limiteur. Attaqué par une tension sinusoïdale d'amplitude quelconque, il délivre une tension sinusoïdale de même fréquence et d'amplitude constante V_E.

Le démodulateur complet peut être décrit par le schéma de la figure 14.

L'amplificateur limiteur imposant une valeur fixe de V_E, l'amplitude V_S du signal v_s à la sortie du discriminateur est proportionnelle à la fréquence f. Le signal v_s est à la fois modulé en amplitude et en fréquence. Le démodulateur à diode, détectant l'enveloppe de la tension v_s, reconstitue le signal modulant.

Fig. 14

• Le discriminateur idéal correspond à un circuit dérivateur. En effet l'équation $v_s = a' \frac{dv_e}{dt}$ conduit en régime harmonique à la relation $\underline{V_S} = j\omega a' \underline{V_E}$, qui s'écrit en module $\frac{V_S}{V_E} = 2\pi a' f$, et qui correspond bien à la courbe de la figure 13.

Discriminateur élémentaire

Le discriminateur le plus simple est un circuit R-C dérivateur (*fig.* 15).

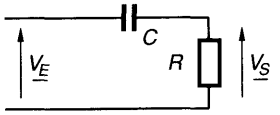


Fig. 15

La relation

$$\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

devient, pour les fréquences très inférieures à $\frac{1}{2\pi RC}$, $\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = jRC\omega$ et correspond ainsi à la fonction de transfert souhaitée.

6.2. BOUCLE À VERROUILLAGE DE PHASE

La boucle à verrouillage de phase, dont le principe est rappelé à la figure 16, permet de réaliser la démodulation de fréquence

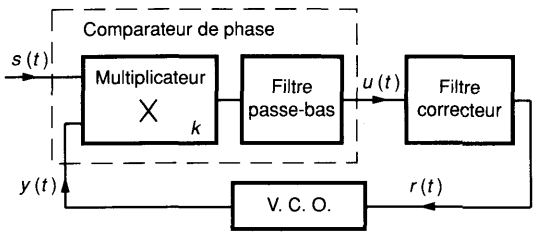


Fig. 16

• Le signal incident $s(t)$ est modulé en fréquence et s'écrit sous la forme

$$s(t) = A_C \sin [2\pi f_C t + \varphi_s(t)].$$

La phase $\varphi_s(t)$ varie, au rythme du signal modulant, sous la forme $\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = am(t)$ (ou a est une constante positive).

• L'oscillateur commandé par tension (V.C.O.) délivre une tension

$$y(t) = A'_C \cos [2\pi f_C t + \varphi_y(t)]$$

dont la fréquence instantanée $f_C + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_y(t)}{dt}$ dépend de la tension de commande $r(t)$ par $\frac{d\varphi_y(t)}{dt} = + br(t)$ (où b est une constante positive).

• Le comparateur de phase, constitué d'un multiplicateur et d'un filtre passe-bas délivre (voir chapitre 3, paragraphe de la première partie) une tension

$$u(t) = \frac{kA_C A'_C}{2} \sin [\varphi_s(t) - \varphi_y(t)]$$

que l'on peut assimiler à

$$u(t) = \frac{kA_C A'_C}{2} [\varphi_s(t) - \varphi_y(t)].$$

• Nous supposerons que le filtre correcteur, combiné au filtre passe-bas du comparateur de phase, introduisent une transmittance de la forme $\underline{H(P)} = \frac{1 + C_1 P}{1 + C_2 P}$ (où C_1 et C_2 sont des constantes positives).

• Sachant que toute dérivation correspond, sur les transformées de Laplace, à une multiplication par P, le système de démodulation peut être décrit par le schéma bloc de la figure 17.

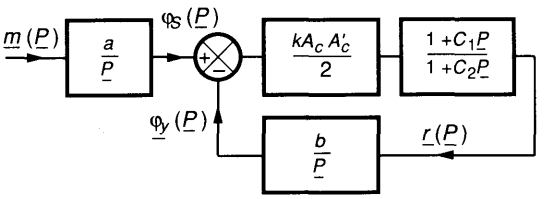


Fig. 17

La tension de commande $\underline{r(P)}$ du V.C.O. peut être exprimée en fonction du signal de commande $\underline{m(P)}$ par

$$\underline{r(P)} = \frac{kA_C A'_C}{2} \frac{1 + C_1 P}{1 + C_2 P} \left[\frac{a}{P} \underline{m(P)} - \frac{b}{P} \underline{r(P)} \right]$$

soit

$$\underline{r(P)} = \frac{k \frac{A_C A'_C}{2} a(1 + C_1 P)}{\frac{kA_C A'_C}{2} b(1 + C_1 P) + P(1 + C_2 P)} \underline{m(P)}.$$

En régime harmonique, la relation précédente peut être mise sous la forme

$$\underline{r}(j\omega) = \frac{A\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\,\underline{m}(j\omega)$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1}; \qquad A = \frac{a}{b}; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{kA_C A'_C}{2C_2}}\,b;$$

$$m = \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{2}{kA_C A'_C b}\right)\sqrt{\frac{kA_C A'_C}{2C_2}}\,b.$$

Si les composantes sinusoïdales du signal $m(t)$ présentent des pulsations faibles par rapport à ω_0 et ω_1, la relation précédente peut être assimilée à : $\underline{r}(j\omega) = \frac{a}{b}\,\underline{m}(j\omega)$.

La tension de commande du V.C.O., $r(t)$ qui varie proportionnellement au signal $m(t)$ est une image du signal modulant permettant ainsi d'effectuer la démodulation.

6.3. DÉMODULATEUR À DÉPHASAGE

Ce type de démodulateur dont le schéma de principe est donné à la figure 18 est utilisé dans certains circuits intégrés spécialisés.

- Le signal $s(t)$ est modulé en fréquence et s'écrit

$$s(t) = A_C \cos\,[2\pi f_C t + \varphi(t)].$$

Sa pulsation instantanée est $\Omega(t) = 2\pi f_C + \frac{d\varphi(t)}{dt}$.

Nous avons montré, au paragraphe 3.2 du chapitre 4 de la 2e partie que le circuit constitué par l'amplificateur opérationnel, les trois résistances R et le condensateur C, est un circuit déphaseur dont les tensions d'entrée et de sortie ont même amplitude et qui retarde la tension de sortie d'un angle $\theta(t)$ tel que

$$\tan\frac{\theta(t)}{2} = RC\Omega(t).$$

La tension $u(t)$ s'écrit donc

$$u(t) = A_C \cos\,[2\pi f_C t + \varphi(t) - \theta(t)].$$

- La multiplication de cette tension par le signal $s(t)$, conduit à la tension

$$v(t) = ku(t)s(t)$$
$$= kA_C^2 \cos\,[2\pi f_C t + \varphi(t)]\cos\,[2\pi f_C t + \varphi(t) - \theta(t)]$$
$$v(t) = \frac{kA_C^2}{2}\left[\cos\,[4\pi f_C t + 2\varphi(t) - \theta(t) + \cos\theta(t)\right].$$

- Le filtre passe-bas élimine la composante de fréquence voisine de $2f_C$ si bien que le signal de sortie $r(t)$ s'écrit :

$$r(t) = \frac{kA_C^2}{2}\cos\,[\theta(t)].$$

Compte tenu de la relation trigonométrique

$$\cos\,[\theta(t)] = \frac{1 - \tan^2\left[\frac{\theta(t)}{2}\right]}{1 + \tan^2\left[\frac{\theta(t)}{2}\right]}$$

il vient :

$$r(t) = \frac{kA_C^2}{2}\,\frac{1 - \tan^2\left[\frac{\theta(t)}{2}\right]}{1 + \tan^2\left[\frac{\theta(t)}{2}\right]}$$
$$= \frac{kA_C^2}{2} \times \frac{1 - [RC\Omega(t)]^2}{1 + [RC\Omega(t)]^2}.$$

Sachant que $\Omega(t)$ s'écrit $2\pi f_C + \frac{d\varphi(t)}{dt}$, et que pour une modulation de fréquence, la dérivée $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ est proportionnelle au signal modulant $m(t)$,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = am(t),$$

il vient :

$$r(t) = \frac{kA_C^2}{2}\,\frac{1 - [RC(2\pi f_C + am(t))]^2}{1 + [RC(2\pi f_C + am(t))]^2}.$$

- La constante de temps RC du déphaseur est telle que $2\pi RCf_C = 1$, ce qui conduit à

$$r(t) = \frac{kA_C^2}{2} \times \frac{-R^2C^2[4a\pi f_C m(t) + a^2m^2(t)]}{2 + R^2C^2[4\pi a f_C m(t) + a^2m^2(t)]}.$$

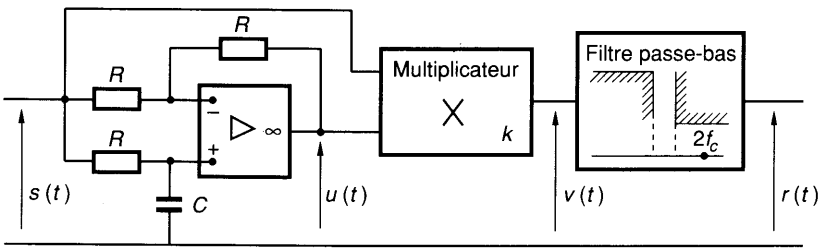


Fig. 18

De plus la déviation de pulsation $am(t)$ étant faible devant la pulsation $2\pi f_C$ de la porteuse, il vient :

$$r(t) \approx \frac{-kA_C^2}{2} \frac{R^2C^2 4\pi a f_C m(t)}{2 + R^2C^2 4\pi a f_C m(t)}$$

où, compte tenu de que $2\pi RCf_C = 1$,

$$r(t) = -\frac{kA_C^2}{2} \frac{2RCam(t)}{2 + \frac{2am(t)}{2\pi f_C}} \approx \frac{-kA_C^2}{2} RCam(t).$$

La tension de sortie $r(t)$ est bien une image du signal modulant $m(t)$.

7. RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Au cours de la transmission, un signal parasite de bruit vient se superposer au signal utile. La détermination exacte du rapport signal sur bruit est compliquée dans la mesure où, le théorème de superposition ne s'appliquant pas, la puissance du signal utile démodulé dépend du signal de bruit et vice versa.

Cependant, si le signal de bruit est faible par rapport au signal utile, cette interdépendance est négligeable et un calcul approché est possible.

Soit $A_C \cos 2\pi f_C t$ le signal porteur non modulé et soit $A_C \cos [2\pi f_C t + \varphi(t)]$ le signal correspondant à une modulation de fréquence. Quel que soit son principe, le système de démodulation peut être décrit par le schéma de la figure 19.

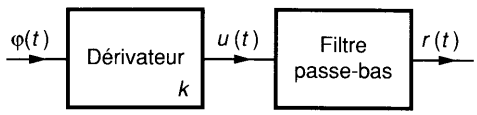


Fig. 19

Il détecte la phase $\varphi(t)$ puis la dérive pour obtenir la fréquence instantanée. Le signal obtenu est passé à travers un filtre passe-bas dont la transmittance idéalisée est décrite par la courbe de la figure 20.

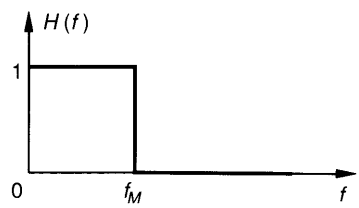


Fig. 20

7.1. PUISSANCE DU SIGNAL UTILE

Plaçons-nous dans le cas où le signal modulant est sinusoïdal. La phase $\varphi(t)$ s'écrit alors

$$\varphi(t) = \frac{\Delta f}{f_m} \sin 2\pi f_m t$$

où Δf est la déviation maximale de fréquence. Le dispositif de la figure 19 fournit le signal

$$u(t) = k \frac{d\varphi(t)}{dt} = 2\pi k \, \Delta f \cos 2\pi f_m t.$$

Si la fréquence f_m est inférieure à f_M le filtre passe-bas est transparent et le signal utile démodulé $s(t) = r(t)$ s'écrit :

$$s(t) = 2\pi k \, \Delta f \cos 2\pi f_m t.$$

Sa puissance normalisée est

$$S_0 = \overline{s^2(t)} = \frac{4\pi^2 k^2 (\Delta f)^2}{2} = 2\pi^2 k^2 (\Delta f)^2.$$

7.2. PUISSANCE DU SIGNAL DE BRUIT

Soit η la densité spectrale de bruit à la réception, le signal de bruit s'écrit alors

$$n_i(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta} \cos [\varphi_n(t)]$$

ou $\varphi_n(t)$ est un angle aléatoire (voir chapitre 3 paragraphe 5). Supposons que le signal porteur ne soit pas modulé et s'écrive $A_C \cos 2\pi f_C t$. La superposition du signal de bruit et du signal porteur peut être décrite par le graphe de la figure 21.

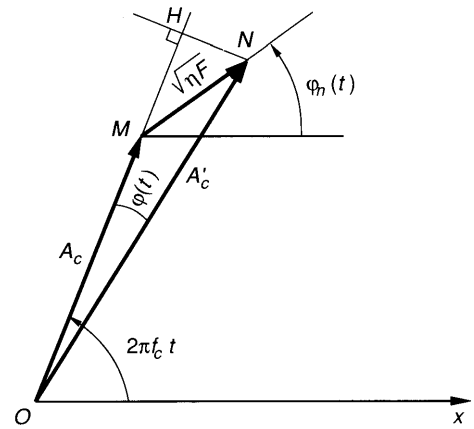


Fig. 21

• Le signal porteur est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de longueur A_C faisant l'angle $2\pi f_C t$ avec l'axe Ox.

• Le signal de bruit est représenté par le vecteur $\overrightarrow{MN}$ de longueur $\sqrt{\eta F}$ faisant l'angle $\varphi_n(t)$ avec l'axe Ox.

• L'addition du signal porteur et du signal de bruit est représentée par le vecteur $\overrightarrow{ON}$. Ce vecteur, de longueur A'_C est en retard de $\varphi(t)$ sur le signal porteur et s'écrit $A'_C \cos [2\pi f_C t - \varphi(t)]$. Le signal de bruit provoque donc, par l'intermédiaire de $\varphi(t)$, une modulation de la phase du signal reçu. Cette modulation est détectée par le démodulateur de la figure 19, et conduit à un signal de bruit $r(t) = n(t)$.

• Sur le graphe de la figure 21, la longueur HN s'écrit

$$HN = \sqrt{\eta F} \sin [2\pi f_C t - \varphi_n(t)] = OH \tan [\varphi(t)].$$

Si comme, nous l'avons déjà supposé, le signal de bruit est faible par rapport au signal porteur, la longueur OH peut être confondue avec A_C et $\tan [\varphi(t)]$ est peu différente de $\varphi(t)$, soit :

$$\varphi(t) \approx \frac{\sqrt{\eta F}}{A_C} \sin [2\pi f_C t - \varphi_n(t)].$$

Cette phase $\varphi(t)$ est détectée par le démodulateur de la figure 19 qui fournit la tension

$$u(t) = k \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= k \frac{\sqrt{\eta F}}{AC} 2\pi \left(f_C - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} \right) \cos [2\pi f_C t - \varphi_n(t)].$$

$u(t)$ résulte du signal aléatoire de bruit. Sa fréquence instantanée est $f(t) = \left| f_C - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} \right|$.

• Supposons que le filtre passe-bas, dont la fonction de transfert est représentée à la figure 20, résulte de la mise en parallèle d'une infinité de filtres passe-bande décalés de $\mathrm{d}f_x$, de bande passante $\mathrm{d}f_x$ et centrés sur des fréquences f_x comprises entre O et f_M (*fig.* 22).

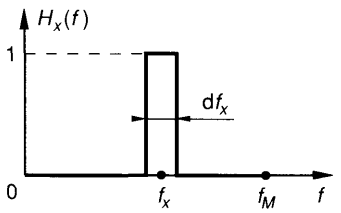


Fig. 22

Sachant qu'un filtre élémentaire limite la vitesse de variations de

$$\varphi_x(t) = 2\pi f_C t - \varphi_n(t)$$

par

$$f_x - \frac{\mathrm{d}f_x}{2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\mathrm{d}\varphi_x(t)}{\mathrm{d}t} \right| = \left| f_C - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} \right| \leqslant f_x + \frac{\mathrm{d}f_x}{2}$$

l'expression $f_C - \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t}$, en sortie du filtre élémentaire y est peu différente des valeurs f_x ou $-f_x$ et le signal de bruit résultant est composé des deux termes indépendants

$$\frac{k\sqrt{\eta F}}{A_C} 2\pi f_x \cos [\varphi_x(t)]$$

et

$$-\frac{k\sqrt{\eta F}}{A_C} 2\pi f_x \cos [\varphi_x(t)].$$

Ce signal de bruit développe la puissance normalisée

$$\mathrm{d}[\overline{n_x^2(t)}] = 2 \frac{k^2 \eta F}{A_C^2} 4\pi^2 f_x^2 \overline{\cos^2 [\varphi_x(t)]}.$$

Sachant (voir paragraphe 5 du chapitre 3 de la 2e partie) que la valeur moyenne de $\cos^2 [\varphi_x(t)]$ est liée à la bande passante de bruit ($\mathrm{d}f_x$ en sortie d'un filtre élémentaire) par $\overline{\cos^2 \varphi_x(t)} = \frac{\mathrm{d}f_x}{F}$, il vient :

$$\mathrm{d}[\overline{n_x^2(t)}] = \frac{2k^2 \eta F}{A_C^2} 4\pi^2 f_x^2 \frac{\mathrm{d}f_x}{F} = 8 \frac{k^2 \pi^2 \eta}{A_C^2} f_x^2 \, \mathrm{d}f_x.$$

En sortie du filtre passe-bas de la figure 19, le signal de bruit $n(t)$ résulte de la somme de tous les signaux de bruit transmis par chaque filtre élémentaire. Ces signaux étant indépendants le carré de la valeur quadratique moyenne $\overline{n^2(t)}$ de leur somme est égale à la somme des carrés de leurs valeurs quadratiques moyennes $\mathrm{d}[\overline{n_x^2(t)}]$

$$\overline{n^2(t)} = \int_0^{f_M} \mathrm{d}[\overline{n_x^2(t)}] = \int_0^{f_M} 8 \frac{k^2 \pi^2 \eta}{A_C^2} f_x^2 \, \mathrm{d}f_x = 8 \frac{k^2 \pi^2 \eta}{A_C^2} \left[\frac{f_x^3}{3} \right]_0^{f_M} = \frac{8}{3} \frac{k^2 \pi^2 \eta}{A_C^2} f_M^3.$$

La puissance normalisée du bruit à la sortie du démodulateur est donc

$$N_0 = \frac{8}{3}\frac{k^2\pi^2\eta}{A_C^2} f_M^3.$$

7.3. RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Il est donné par le rapport des puissances normalisées du signal utile S_0 et du signal de bruit N_0, soit :

$$\text{S.N.R.} = \frac{S_0}{N_0} = \frac{2\pi^2 k^2 (\Delta f)^2}{8\pi^2 \frac{k^2}{A_C^2}\eta\frac{f_M^3}{3}} = \frac{3}{4}\frac{(\Delta f)^2 A_C^2}{\eta f_M^3}.$$

Le signal utile, à la réception, s'écrit

$$A_C \cos [2\pi f_C t + \beta \sin 2\pi f_m t];$$

sa puissance normalisée S_i est égale à $\frac{A_C^2}{2}$ et le rapport signal sur bruit s'exprime par :

$$\boxed{\text{S.N.R.} = \frac{3}{2} S_i \frac{(\Delta f)^2}{\eta f_M^3}.}$$

Cette expression montre qu'il est possible d'augmenter le rapport signal sur bruit par un accroissement de la déviation maximale de fréquence Δf. Ainsi, un élargissement de la bande de fréquence occupée par le signal F.M. permet une amélioration du rapport signal sur bruit. C'est là un avantage de la modulation de fréquence sur la modulation d'amplitude.

8. TRANSMISSIONS STÉRÉOPHONIQUES

Dans les transmissions stéréophoniques, deux signaux provenant de deux micros indépendants sont transmis de l'émetteur vers le récepteur. A la réception, ces deux signaux sont aiguillés vers deux haut-parleurs différents. Le son reconstitué est ainsi plus proche du son naturel, dans la mesure où chaque oreille reçoit un son différent.

Soient $R(t)$ et $L(t)$ les deux signaux à transmettre. Ces deux signaux sont au préalable filtrés de façon à limiter leur encombrement spectral à 15 kHz, puis ils sont appliqués au système de la figure 23 pour produire le signal composite $m(t)$. Le signal $m(t)$ appliqué au modulateur F.M. résulte de l'addition des signaux suivants :

- un signal sinusoïdal de fréquence
$$f_{CP} = 19 \text{ kHz}$$
provenant d'un oscillateur pilote;
- le signal somme $L(t) + R(t)$;
- le signal différence $L(t) - R(t)$ multiplié par un signal sinusoïdal de fréquence
$$2f_{CP} = 38 \text{ kHz}.$$

Le signal $m(t)$ peut ainsi être mis sous la forme

$$m(t) = [L(t) + R(t)] + [L(t) - R(t)] \cos 2\pi 2 f_{CP} t + K \cos 2\pi f_{CP} t.$$

Sachant que les signaux $L(t)$ et $R(t)$ ont été au préalable limités à 15 kHz, l'encombrement spectral du signal $m(t)$ est conforme à la représentation de la figure 24.

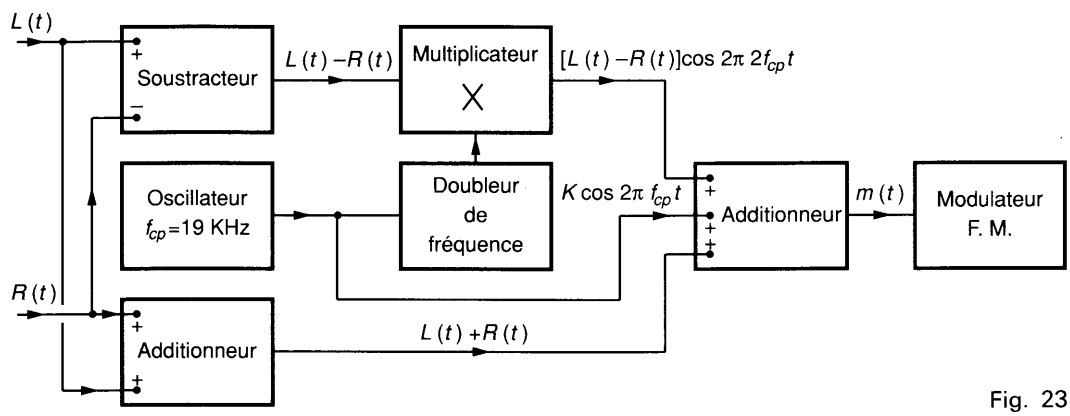


Fig. 23

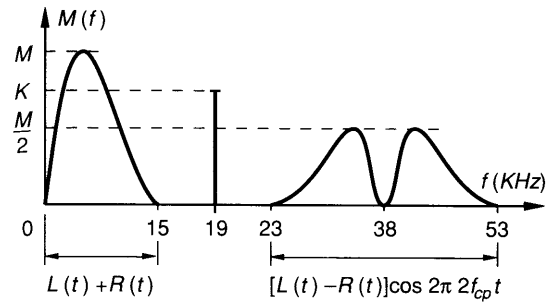


Fig. 24

A la réception, le signal $m(t)$ reconstitué par le démodulateur F.M. est appliqué au système décrit par la figure 25.

Les composantes du signal $m(t)$ sont séparées par filtrage.

- la sous porteuse de fréquence $f_{CP} = 19$ kHz est détectée par un filtre passe-bande puis appliquée à un multiplicateur de fréquence par 2 pour reconstituer le signal $\cos 2\pi 2 f_{CP} t$;
- le signal $L(t) + R(t)$ est isolé par un filtre passe-bas limité à 15 kHz;
- le signal $[L(t) - R(t)] \cos 2\pi 2 f_C t$ est isolé par un filtre passe-bande calé entre 23 et 53 kHz. Le signal $L(t) - R(t)$ est alors reconstitué par un démodulateur synchrone identique à celui du paragraphe 4, chapitre 3.

A partir des signaux $L(t) - R(t)$ et $L(t) + R(t)$, le dispositif isole les signaux $L(t)$ et $R(t)$ par addition et soustraction.

REMARQUE

Le signal $m(t)$ encombre une bande de fréquence s'étendant de 0 à 53 kHz. La bande de fréquence nécessaire à la transmission est donc

$$B = 2(\Delta f + 53\ kHz)$$

où Δf est la déviation maximale de fréquence. Cet encombrement fréquentiel est compatible avec l'écart minimum entre les fréquences porteuses des stations qui est de 200 kHz.

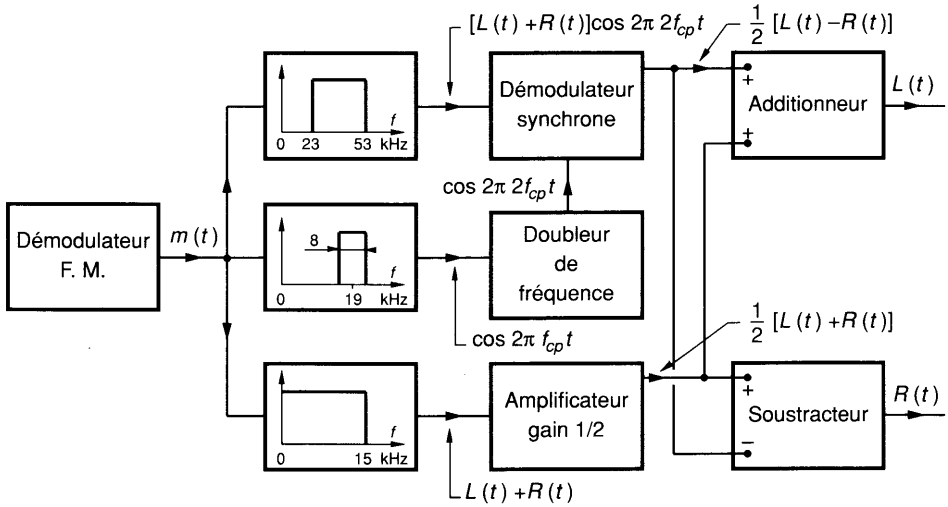


Fig. 25

EXERCICES

1. Préliminaires

On appelle impédance caractéristique d'une ligne de transmission, l'impédance de charge particulière Z_C telle que l'impédance à l'entrée de la ligne soit égale à Z_C (*fig.* 1).

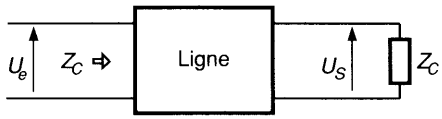


Fig. 1

Cette ligne de transmission, chargée par son impédance caractéristique Z_C, introduit un retard τ : la tension en sortie à l'instant t est égale à la tension qui était appliquée à l'entrée à l'instant $t - \tau$; cela se traduit par $u_s(t) = u_e(t - \tau)$. Cette ligne sera appelée ligne à retard.

On appelle pulsation instantanée $\Omega(t)$ de la fonction $y(t) = Y \sin \varphi(t)$ la dérivée par rapport au temps de la phase instantanée $\varphi(t)$:

$$\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

L'expression d'une onde modulée en fréquence par un signal sinusoïdal s'écrit :

$$y(t) = Y \sin\left[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \sin \omega t\right]$$
$$= Y \sin [\Omega_0 t + \beta \sin \omega t],$$

où Ω_0 est la pulsation de la porteuse,
ω est la pulsation du signal modulant,
$\Delta\Omega$ est la déviation de pulsation,
β est l'indice de modulation.

De cette expression on déduit que

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cos \omega t.$$

1° *Étude de la ligne à retard*

Une ligne de transmission, d'impédance caractéristique réelle $Z_C = r = 50\ \Omega$ introduit un retard τ.
Cette ligne, chargée par une résistance r, est attaquée par un signal sinusoïdal $u_e(t) = U \sin \omega t$.
La représentation complexe de $u_e(t)$ sera notée : $\underline{U}_e$.

a) Déterminer l'expression de la tension de sortie $u_s(t)$. La représentation complexe de $u_s(t)$ sera notée : $\underline{U}_s$.

b) On pose $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$.

Donner $|\underline{T}|$ et représenter $|\underline{T}| = f_1(\omega)$.
Donner $\varphi = \text{Arg } \underline{T}$ et représenter $\varphi = \text{Arg } \underline{T} = f_2(\omega)$.

c) Quelle est l'expression de $\underline{T}(j\omega)$?
Tracer le diagramme de Nyquist de cette fonction.
En déduire les pulsations pour lesquelles $u_s(t)$ et $u_e(t)$ sont en concordance de phase.

2° *Étude d'un oscillateur à ligne à retard*

La ligne d'impédance caractéristique $r = 50\ \Omega$ introduit un retard total τ. Elle est pourvue de deux prises intermédiaires telles que :

$$v_1(t) = u_e(t - \tau_1) \quad \text{et} \quad v_2(t) = u_e(t - \tau_2),$$

avec $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Les d.d.p. $v_1(t)$ et $v_2(t)$ commandent deux générateurs de courant débitant des courants d'intensité $s_1 v_1(t)$ et $s_2 v_2(t)$.
En régime variable, le modèle dynamique de l'oscillateur peut être représenté par le schéma de la figure 2.

On admet que le montage est en régime d'oscillations sinusoïdales telles que $u_e(t) = U \sin \Omega t$ avec $\Omega\tau \leqslant 2\pi$.

a) Rappeler quelle est la résistance à l'entrée de la ligne.
Écrire la loi des nœuds au point E en fonction de u_e, v_1, v_2, r, s_1 et s_2.
En remplaçant $v_1(t)$ et $v_2(t)$ par leur expression en fonction de U, Ω, t, τ_1 et τ_2, montrer que cette loi des nœuds en E se traduit par une équation de la forme :

$$A \sin \Omega t - B \cos \Omega t = 0, \qquad (1)$$

dans laquelle on explicitera les coefficients A et B en fonction de Ω, τ_1, τ_2, r, s_1 et s_2.

b) On se place dans le cas particulier où $s_1 = s_2 = s_0$.
Sachant que la relation (1) doit être vérifiée quel que soit t, déterminer les valeurs de A et B (on pourra voir ce que devient (1) pour des valeurs de Ωt judicieusement choisies).
En déduire le système des deux équations régissant le fonctionnement de l'oscillateur.
Montrer que, pour Ω, la seule solution permettant de satisfaire les deux équations est $\Omega = \Omega_0$ telle que

$$\Omega_0(\tau_1 + \tau_2) = \Omega_0 \cdot \tau = 2\pi.$$

On rappelle que $\tau_2 > \tau_1$.
S'il y a oscillation quelle est l'expression de la pente s_0?

c) *Application numérique :*

Calculer la fréquence d'oscillation F_0 et la pente s_0 si $\tau_1 = 3\ \mu s$ et $\tau_2 = 5\ \mu s$.

3° *Étude d'un modulateur à ligne de retard*

Les pentes s_1 et s_2 sont fonction d'un signal modulant $v(t)$. Elles vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} s_1 = s_0 + s, \\ s_2 = s_0 - s, \end{cases}$$

avec $s = kv(t)$ $(k = 7\ \text{mA} \cdot \text{V}^{-2})$.

a) Sachant que les pentes s_1 et s_2 restent positives, déterminer les valeurs limites F_{max} et F_{min} de la fréquence d'oscillation du montage pour $s = s_0$ et pour $s = -s_0$.
Que peut-on en conclure sur la déviation de fréquence de part et d'autre de F_0 et sur la linéarité du modulateur?

b) On admet que l'amplitude du signal de modulation est suffisamment faible pour que la modulation soit linéaire. Il en résulte que s est très faible devant s_0 et que la variation de pulsation $\Delta\Omega$ est très faible devant Ω_0.
Montrer que la condition d'oscillation :

$$(s_0 + s) \sin (\Omega_0 + \Delta\Omega)\tau_1 + (s_0 - s) \sin (\Omega_0 + \Delta\Omega)\tau_2 = 0,$$

permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \approx \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{2s}{s_0}$, en admettant que les quantités $\Delta\Omega\tau_1$ et $\Delta\Omega\tau_2$ sont des infiniment petits.
On rappelle que $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ et que $\cos \varepsilon \approx 1$, si ε est un infiniment petit. On se souviendra des valeurs particulières de $\sin \Omega_0\tau_1$, $\sin \Omega_0\tau_2$, $\cos \Omega_0\tau_1$ et $\cos \Omega_0\tau_2$ calculées précédemment.

c) En déduire l'amplitude V du signal modulant $v(t)$ pour avoir une déviation de fréquence de 1 000 Hz.

Si $v(t) = V \cos \omega t$ avec $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 100$ Hz, quelle est la valeur de l'indice de modulation?

4° *Étude d'un démodulateur de fréquence* (*fig.* 3)

Les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux et en fonctionnement linéaire.

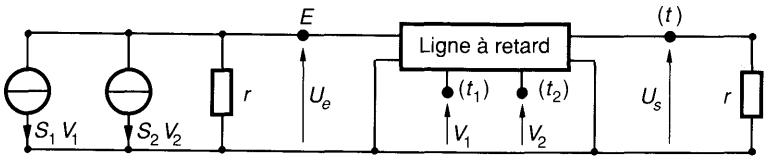
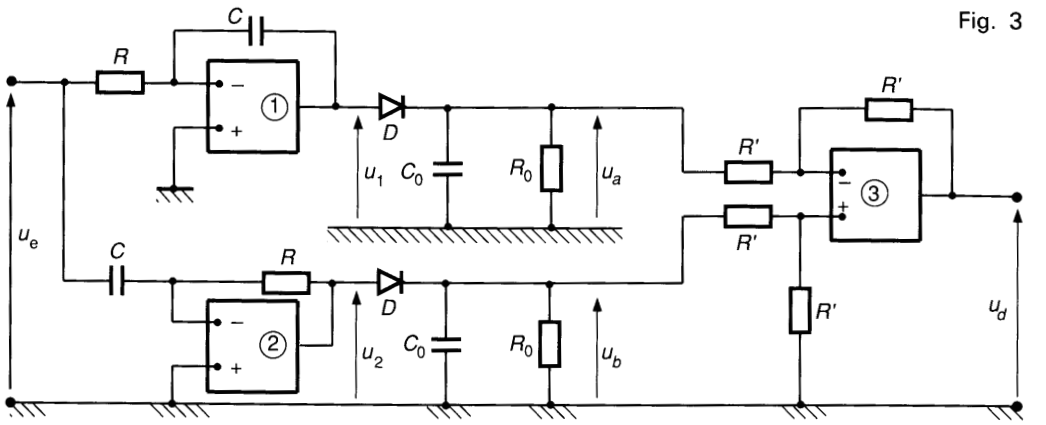


Fig. 2

Fig. 3



a) Étude des étages (1) et (2) :
La tension $u_e(t)$ est de la forme $U \sin \Omega t$ et la pulsation Ω est supposée constante (sauf pour la question 4°, *d*).
Déterminer les expressions des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à la sortie des amplificateurs (1) et (2) en fonction de U, R, C, Ω et cos Ωt.

b) Étude des détecteurs de crête :
La diode D est idéale. Les éléments R_0 et C_0 du détecteur sont tels que $R_0 C_0 \Omega \gg 1$. La résistance R' est très grande par rapport à R_0.
La tension $u_e(t)$ étant toujours de la forme $U \sin \Omega t$, montrer qu'on peut admettre que les tensions u_a et u_b sont des tensions continues respectivement égales aux amplitudes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

c) Étude de l'étage (3) :
Exprimer la tension de sortie u_d en fonction de u_a et u_b.
En déduire que, si $RC\Omega_0 = 1$, pour un signal $u_e(t) = U \sin \Omega t$ la tension $u_d(t)$ s'écrit :

$$u_d = U\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega}\right).$$

On pose $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$ avec $\Delta\Omega \ll \Omega_0$ et $\alpha = \dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \dfrac{\Delta F}{F_0}$.
En prenant un développement limité au second ordre (α est l'infiniment petit), montrer que : $u_d \approx U\left(2\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$.

d) On admet que les résultats précédents demeurent applicables lorsque la pulsation Ω est fonction du temps et varie légèrement autour de Ω_0.
Le montage de la figure 3 est un démodulateur. Il est dit linéaire si :

$$u_d \approx K \,.\, \Delta F.$$

Quelle condition α doit-il satisfaire pour que cette linéarité soit obtenue à 1 % près?
Dans ce cas, donner l'expression de K en fonction de U et F_0?
Quelle est alors la déviation de fréquence permise pour le signal modulé appliqué à l'entrée du démodulateur si $F_0 = 125$ kHz?

2.

Le schéma bloc d'une boucle à verrouillage de phase, utilisée en démodulation de fréquence, est donné sur la figure 1.

– La boucle est attaquée par une tension

$$u_E(t) = U_E \sin [2\pi f_C t + \varphi_E(t)],$$

de pulsation instantanée $2\pi f_C + \dfrac{d\varphi_E(t)}{dt}$.

Le terme $\Omega_E(t) = \dfrac{d\varphi_E(t)}{dt}$ traduit la modulation de fréquence.
La transformée de Laplace $\underline{\Omega_E}(\underline{P})$ constitue le signal d'entrée de la boucle à verrouillage de phase.

– Le *V.C.O* délivre la tension

$$u_R(t) = U_R \cos [2\pi f_C t + \varphi_R(t)],$$

dont la pulsation instantanée est $2\pi f_C + \dfrac{d\varphi_R(t)}{dt}$.

– Le comparateur de phase fournit la tension

$$u_D(t) = K_D \varphi_{ER}(t) = K_D[\varphi_E(t) - \varphi_R(t)].$$

– Le filtre correcteur (qui inclue le filtre passe-bas du comparateur de phase) possède une transmittance $\underline{F}(\underline{P})$.

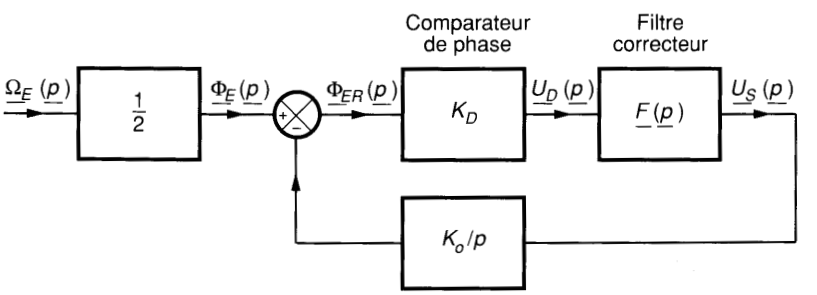


Fig. 1

1° Établir, en fonction de la transmittance $\underline{F}(\underline{P})$, les expressions des transmittances suivantes :

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Phi_R}(\underline{P})}{\underline{\Phi_{ER}}(\underline{P})}, \quad \underline{G}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Phi_{ER}}(\underline{P})}{\underline{\Omega_E}(\underline{P})},$$

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\underline{U_S}(\underline{P})}{\underline{\Omega_E}(\underline{P})}.$$

2° On suppose, dans cette question que le filtre correcteur est construit conformément au schéma de la figure 2.

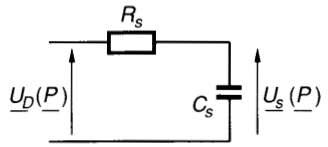


Fig. 2

a) Établir la transmittance $\underline{F}(\underline{P}) = \frac{\underline{U_S}(\underline{P})}{\underline{U_D}(\underline{P})}$.

b) Calculer la transmittance $\underline{T}(\underline{P})$ et la mettre sous la forme

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{T_0}{1 + \frac{2m\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}}.$$

Exprimer T_0, m et ω_0 en fonction de K_0, K_D et $\tau_S = R_S C_S$. Montrer que m et ω_0 ne peuvent pas être réglés indépendamment l'un de l'autre. Quelles en sont les conséquences pratiques lorsque $\Omega_e(t)$ varie sinusoïdalement.

3° On suppose, dans cette question, que le filtre correcteur est construit conformément au schéma de la figure 3.

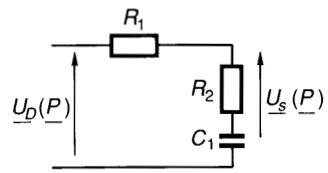


Fig. 3

a) Établir la transmittance $\underline{F}(\underline{P})$ de ce filtre en fonction de

$$\tau_1 = R_2 C_1 \quad \text{et} \quad \tau_2 = (R_1 + R_2) C_1.$$

b) Calculer les transmittances $\underline{H}(\underline{P})$, $\underline{G}(\underline{P})$ et $\underline{T}(\underline{P})$ et mettre $\underline{T}(\underline{P})$ sous la forme

$$\underline{T}(\underline{P}) = T_0 \frac{1 + \tau_1 \underline{P}}{1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}}.$$

Exprimer T_0, m et ω_0 en fonction de K_0, K_D, τ_1 et τ_2.

c) Les composants, R_1, R_2 et C_1 sont choisis de telle sorte que $\tau_2 \gg \tau_1 \gg \frac{1}{K_0 K_D}$. Montrer que l'on peut alors régler m et ω_0 indépendamment l'un de l'autre.

d) Le signal d'attaque de la boucle est tel que

$$\Omega_e(t) = \Delta\Omega \sin 2\pi f_m t$$

On donne :

$$f_C = 145 \text{ kHz}; \quad \Delta\Omega = 6{,}28 \cdot 10^4 \text{ rad/s}; \quad f_m = 2{,}2 \text{ kHz};$$
$$K_0 = 4{,}1 f_C \text{ rad/s/V}; \quad K_D = 0{,}68 \text{ V/rad}.$$

Les constantes de temps τ_1 et τ_2 sont choisies de telle sorte que $m = 0{,}707$ et $\omega_0 = \pi \cdot 10^4$.
Déterminer la valeur des constantes de temps τ_1 et τ_2 et vérifier que la condition $\tau_2 \gg \tau_1 \gg \frac{1}{K_0 K_D}$ est bien satisfaite.

e) Mettre la transmittance $\underline{G}(\underline{P}) = \frac{\underline{\Phi_{ER}}(\underline{P})}{\underline{\Omega_E}(\underline{P})}$ sous la forme

$$\underline{G}(\underline{P}) = G_0 \frac{1 + \underline{P}\tau_2}{1 + 2m\frac{\underline{P}}{\omega_0} + \frac{\underline{P}^2}{\omega_0^2}}.$$

Exprimer G_0 en fonction de K_0 et K_D.

f) Avec les valeurs numériques de la question, tracer le diagramme asymptotique de 20 log $|\underline{G}(j\omega)|$ et esquisser la courbe exacte. Montrer que pour une valeur donnée de $\Delta\Omega$, l'amplitude $\Delta\Phi_{ER}$ de l'erreur de phase φ_{ER}, passe par un maximum pour une valeur, que l'on déterminera, de la fréquence f_m.
Montrer qu'au voisinage du maximum, la transmittance complexe $\underline{G}(j\omega)$ est peu différente de

$$G'_0 \frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Exprimer G'_0 en fonction de m et ω_0.
Pour que la boucle reste accrochée, il est nécessaire que φ_{ER} reste inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Montrer que cette condition est bien vérifiée.

g) Représenter les diagrammes asymptotiques du module et de l'argument de $\underline{H} = \frac{\underline{\Phi_R}}{\underline{\Phi_{ER}}}$.
En déduire une valeur approchée de la marge de phase.

h) On suppose dans cette question que le signal d'entrée est un signal F.S.K., dont la fréquence passe, à l'instant $t = 0$, de 145 kHz à 155 kHz.
Calculer $\underline{\Delta\Omega}(\underline{P})$.
Montrer que la tension $u_s(t)$ varie sous la forme

$$u_s(t) = \frac{\Delta\Omega}{K_0} - \frac{\Delta\Omega}{K_0\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cos[\omega t + \varphi],$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $\tan\varphi = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$.

6 transmissions numériques

1. PRINCIPE

Dans ce type de liaison, l'information est transmise à l'aide d'une suite d'éléments binaires, susceptibles de présenter deux états notés respectivement « 0 » et « 1 ». L'idée n'est pas nouvelle si l'on considère que les premières transmissions électriques ont été faites en Morse, en codant le signal par un élément binaire pouvant prendre deux états : le point et le trait. La quantité d'information transmise par une liaison Morse est limitée car elle nécessite l'intervention humaine, d'une part à l'émission pour transformer le signal en éléments binaires (codage), d'autre part à la réception pour reconstituer le signal à partir des éléments binaires (décodage). Dans les transmissions numériques, ces opérations sont réalisées automatiquement permettant ainsi une importante capacité de transmission.

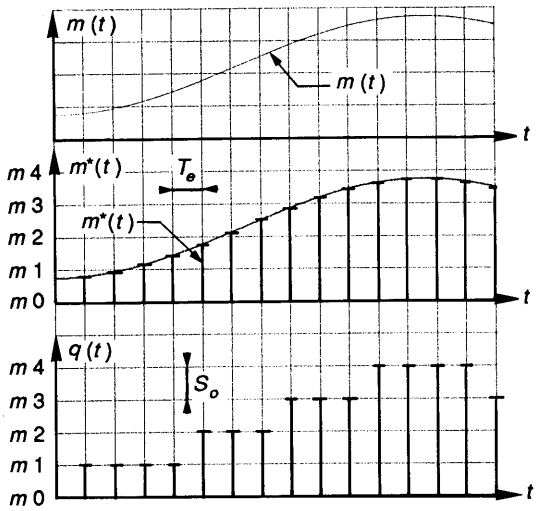


Fig. 1

2. PRODUCTION DU SIGNAL NUMÉRIQUE

La construction du signal numérique se décompose en deux opérations fondamentales :

- le codage du signal par un élément binaire;
- la représentation de chaque état de l'élément binaire par un signal électrique.

On conçoit que chaque étape laisse le champ libre à l'imagination. Nous n'envisagerons que les méthodes les plus immédiates.

2.1. CODAGE DU SIGNAL PAR UN ÉLÉMENT BINAIRE

L'opération correspondante est décrite à la figure 1. Le signal $m(t)$ est échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, puis quantifié suivant une suite discrète de niveaux m_0, m_1, m_2, ...

2.1.1. Échantillonnage du signal

Le signal échantillonné $m^*(t)$ est obtenu en prélevant sur le signal $m(t)$ une suite d'échantillons : ... $m(0)$, $m(T_e)$, $m(2T_e)$, ... Nous avons montré dans le tome I que cette opération pouvait être représentée par la multiplication du signal $m(t)$ par un peigne de Dirac

soit

$$m^*(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta u(t - nT_e).$$

De plus, nous avons montré (théorème de Shannon), qu'un filtrage passe-bas permet de reconstituer le signal $m(t)$, à partir du signal échantillonné $m^*(t)$, à condition que la fréquence d'échantillonnage F_e soit au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale (F_M) qui apparaît dans la décomposition spectrale de $m(t)$: $F_e > 2F_M$.

2.1.2. Quantification du signal

La plage de variations du signal $m(t)$ est découpée en M niveaux $(m_0, m_1, ..., m_{M-1})$. Le nombre M est une puissance de 2 et peut être écrit sous la forme $M = 2^N$, où N est un nombre entier. Chaque valeur d'échantillon de $m(t)$ est alors approximée par le niveau dont elle est le plus proche. Sur la figure 1, l'opération de quantification revient à approximer le signal $m^*(t)$ par le signal $q(t)$. Chacun des $M = 2^N$ niveaux de quantification peut être écrit sous la forme

$$m_n = S_0[\varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + ... + \varepsilon_{N-1} 2^{N-1}]$$

où $\varepsilon_0 ... \varepsilon_{N-1}$ peuvent prendre uniquement les valeurs 0 et 1. Par exemple le nombre 93 peut être écrit

$$93 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0.$$

Chaque niveau de quantification peut ainsi être représenté par une séquence de N éléments binaires (ou *bits*). Par exemple le nombre 93 correspond à la séquence 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1.

La plage de variation du signal $m(t)$ étant fixée, le pas de quantification S_0 est d'autant plus faible que le nombre de bits, utilisés pour coder la valeur d'un échantillon, est plus élevé.

Le passage du signal échantillonné $m^*(t)$ au signal quantifié $q(t)$ constitue une dégradation du signal, analogue à celle que produirait un bruit superposé au signal $m^*(t)$. On l'appelle **bruit de quantification,** $n(t)$. Nous pouvons déterminer le carré de sa valeur quadratique moyenne, $\overline{n^2}$. Le passage de $m^*(t)$ à $q(t)$ se fait en attribuant à un échantillon la valeur quantifiée m_n si sa valeur exacte m est comprise entre $m_n - \frac{S_0}{2}$ et $m_n + \frac{S_0}{2}$ (S_0 est le pas de quantification). Ce faisant, on commet une erreur $m - m_n$, dont la valeur quadratique est $(m - m_n)^2$. Soit $p(m)\,dm$ la probabilité pour que le signal $m(t)$ soit compris entre $m - \frac{dm}{2}$ et $m + \frac{dm}{2}$. La valeur quadratique moyenne de l'erreur est telle que :

$$\overline{n^2} = \int_{m_1 - \frac{S_0}{2}}^{m_1 + \frac{S_0}{2}} p(m)[m - m_1]^2\,dm + ... + \int_{m_n - \frac{S_0}{2}}^{m_n + \frac{S_0}{2}} p(m)[m - m_n]^2\,dm + ...$$

Nous supposerons que le pas de quantification S_0 est suffisamment faible pour que $p(m)$ reste constant et égal à $p(m_n)$ dans l'intervalle $m_n - \frac{S_0}{2}$, $m_n + \frac{S_0}{2}$. La probabilité pour que m soit compris entre $m_n - \frac{S_0}{2}$ et $m_n + \frac{S_0}{2}$ s'écrit alors :

$$\int_{m_n - \frac{S_0}{2}}^{m_n + \frac{S_0}{2}} p(m_n)\,dm = S_0 p(m_n).$$

Le carré de la valeur quadratique moyenne du bruit de quantification s'écrit :

$$\overline{n^2} = p(m_1) \int_{m_1 - \frac{S_0}{2}}^{m_1 + \frac{S_0}{2}} [m - m_1]^2\,dm + ... + p(m_n) \int_{m_n - \frac{S_0}{2}}^{m_n + \frac{S_0}{2}} [m - m_n]^2\,dm + ...$$

Effectuons, dans chaque intégrale, le changement de variables : $x = m - m_n$

$$\overline{n^2} = p(m_1) \int_{-\frac{S_0}{2}}^{\frac{S_0}{2}} x^2\,dx + ... + p(m_n) \int_{-\frac{S_0}{2}}^{\frac{S_0}{2}} x^2\,dx + ...$$

$$= [p(m_1) + ... + p(m_n) + ...] \int_{-\frac{S_0}{2}}^{\frac{S_0}{2}} x^2\,dx.$$

Sachant que $\int_{-\frac{S_0}{2}}^{\frac{S_0}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{S_0}{2}}^{\frac{S_0}{2}} = \frac{S_0^3}{12}$, il vient :

$$\overline{n^2} = [p(m_1)S_0 + ... + p(m_n)S_0 + ...] \frac{S_0^2}{12}.$$

Le crochet $[p(m_1)S_0 + ... + p(m_n)S_0 + ...]$, apparaît comme la probabilité pour que le signal $m(t)$ soit compris dans l'ensemble des niveaux de quantification, il est donc égal à 1, et le carré de la valeur quadratique moyenne du bruit de quantification s'écrit $\overline{n^2} = \frac{S_0^2}{12}$.

En augmentant le nombre de bits utilisés pour coder la valeur d'un échantillon, on diminue le pas de quantification S_0 ainsi que la valeur quadratique moyenne du bruit de quantification. Pour les transmissions téléphoniques, on utilise un codage sur 7 bits (128 niveaux de quantification) et un codage sur 9 bits (512 niveaux de quantification) permet d'obtenir une qualité commerciale pour la télévision couleur.

Le **rapport signal sur bruit** est défini par le rapport entre les carrés de la valeur quadratique moyenne

du signal $\overline{m(t)}^2$ et de la valeur quadratique moyenne du bruit $\overline{n^2} = \frac{S_0^2}{12}$.

REMARQUE

La valeur quadratique moyenne du bruit de quantification ne dépend que du pas de quantification S_0. Ainsi les faibles signaux ont un rapport signal sur bruit plus faible que les forts signaux. Pour corriger cette situation on réalise une ***compression.*** *Avant de quantifier le signal, on lui fait traverser un élément non linéaire dont l'amplification diminue lorsque l'amplitude du signal d'entrée augmente. L'opération est décrite par la figure 2.*

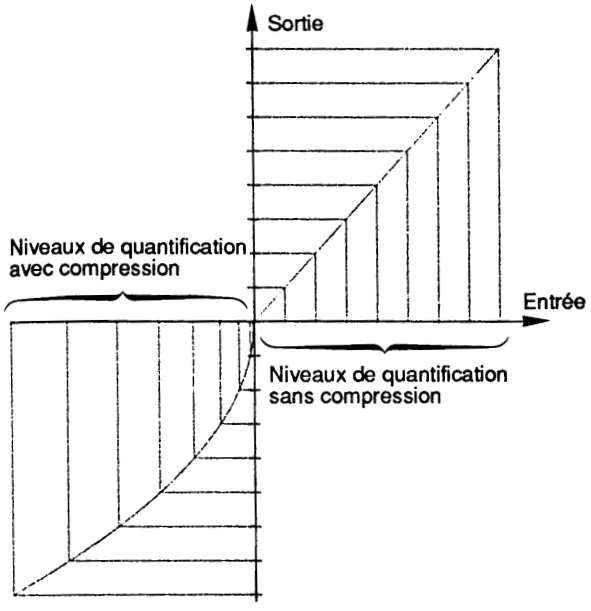


Fig. 2

Tout se passe comme si le signal d'entrée était quantifié suivant une grille dont le pas est plus faible au voisinage de l'origine.

*A la réception l'opération inverse (**expansion**) doit être effectuée.*

2.1.3. Comparaison entre une transmission analogique et une transmission numérique

D'une manière générale, un canal de transmission fait apparaître essentiellement deux sortes de perturbations :

- la bande passante du canal est limitée, provoquant ainsi une déformation du signal;
- un signal de bruit est superposé au signal utile.

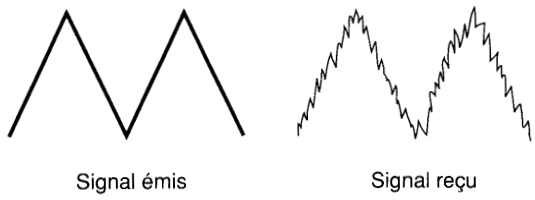


Fig. 3

- Pour une transmission analogique ces deux perturbations se traduisent par une dégradation du signal, décrite par la figure 3.
- Pour une transmission numérique, la même dégradation affecte les motifs attribués aux deux états « 0 » et « 1 » de l'élément binaire (*fig.* 4).

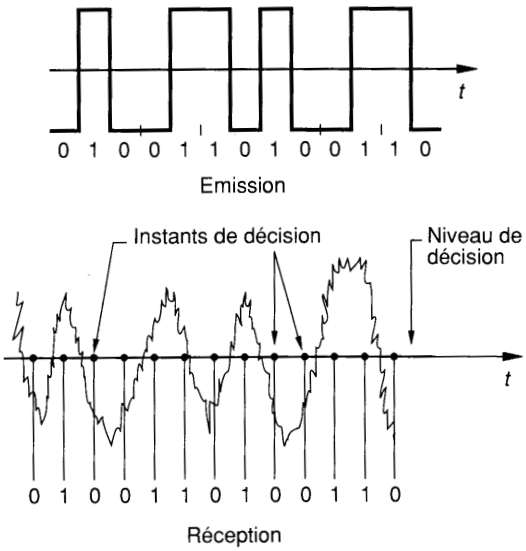


Fig. 4

Cependant si la perturbation n'est pas trop importante, le récepteur est en mesure de reconstituer la séquence de « 0 » et de « 1 » du signal émis. Dans ce cas, la totalité de l'information émise est présente à la réception. Les imperfections du canal n'ont alors aucun effet sur la qualité de la transmission.

Cela ne signifie nullement qu'une transmission numérique ne dégrade pas le signal. En effet :

- l'échantillonnage du signal à la fréquence F_e limite à $F_M = \frac{F_e}{2}$ la bande de fréquence transmise;
- la quantification du signal fait apparaître un bruit de quantification dont le carré de la valeur quadratique moyenne est $\overline{n^2} = \frac{S_0}{12}$.

Ainsi les deux perturbations (limitation de la bande passante-addition de bruit) apparaissent également dans une transmission numérique. Cependant nous pouvons distinguer une différence fondamentale :

- dans une transmission analogique, la dégradation est le fait du canal de transmission et présente ainsi un caractère aléatoire (pour les transmissions hertziennes, par exemple, le relief, les conditions météorologiques, l'environnement industriel... perturbent la transmission de manière aléatoire);
- dans une transmission numérique, la dégradation est définie une fois pour toutes à la conception, et ce, indépendamment du canal de transmission :
  - la fréquence d'échantillonnage F_e fixe la bande de fréquence transmise;
  - le pas de quantification S_0 fixe le bruit de quantification.

REMARQUE

La comparaison précédente ne reste valable que dans la limite où la perturbation due au canal reste suffisamment faible pour ne pas provoquer d'erreur de décision à la réception, auquel cas, l'erreur résultante se traduit par un bruit supplémentaire.

2.2. REPRÉSENTATION D'UN ÉLÉMENT BINAIRE PAR UN SIGNAL ÉLECTRIQUE

Dans une transmission numérique, le signal émis est constitué d'une suite de « 0 » et de « 1 ». Chaque état « 0 » et « 1 » de l'élément binaire est représenté dans le temps par un motif : $s_0(t)$ pour un « 0 » et $s_1(t)$ pour un « 1 ». Le signal numérique est ainsi constitué d'une succession aléatoire de motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$. Proposons-nous de déterminer les caractéristiques de ce signal pour des motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ particuliers.

2.2.1. Rappels et compléments

Ce paragraphe reprend et complémente les notions exposées dans le tome I au chapitre « Signaux périodiques ».

Densité spectrale d'amplitude

Une fonction $f(t)$ périodique, de période T, peut s'écrire sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_n \, e^{2\pi j n \frac{t}{T}}$$

avec $\underline{S}_n = \underline{S}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\, dt.$

- La représentation de $|\underline{S}_n| = \left|\underline{S}\left(\frac{n}{T}\right)\right|$ en fonction de la fréquence donne le spectre bilatéral de la fonction $f(t)$ (*fig.* 5).

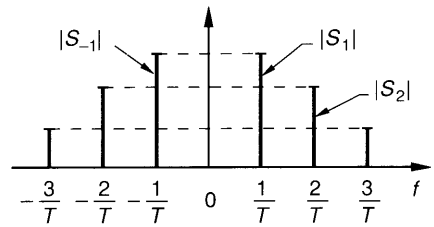


Fig. 5

- Considérons le signal $s(t)$ de la figure 6. Ce signal, dit **d'énergie finie,** est nul en dehors de l'intervalle $[t_1, t_2]$.

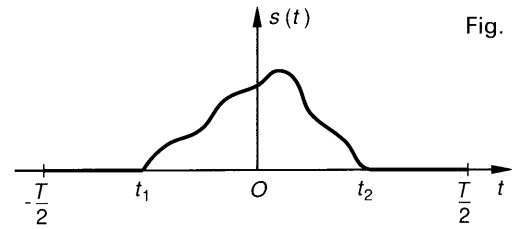


Fig. 6

Il peut être considéré comme un signal périodique dont la période T est infinie, ce qui conduit à l'écrire sous la forme

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_n \, e^{2\pi j \frac{n}{T} t}$$

avec

$$\underline{S}\left(\frac{n}{T}\right) = \underline{S}_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} s(t)\, e^{-2\pi j \frac{n}{T} t}\, dt.$$

- Sur la figure 5, lorsque T tend vers l'infini, l'intervalle séparant deux raies du spectre tend vers zéro en même temps que leur amplitude $|\underline{S}_n|$ devient infiniment petite. Ainsi, l'intervalle $\Delta f = \frac{1}{T}$, séparant deux raies peut être assimilé à une différentielle df et la fonction $\underline{S}\left(\frac{n}{T}\right) = \underline{S}(n\,\Delta f)$ devient une fonction continue de la fréquence $f = n\,\Delta f = \frac{n}{T}$, soit :

$$\underline{S}_n \to \underline{S}(f)\, df \quad \text{avec} \quad \underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt.$$

$\underline{S}(f)$ est la **transformée de Fourier** de la fonction $s(t)$.

$|\underline{S}(f)|\,\mathrm{d}f$ résultant de la limite de l'amplitude spectrale $\left|\underline{S}\left(\frac{n}{T}\right)\right|$ lorsque T tend vers l'infini, $\underline{S}(f)$ est aussi appelée **densité spectrale d'amplitude.**

EXEMPLE

Considérons la fonction périodique $f(t)$ de la figure 7.

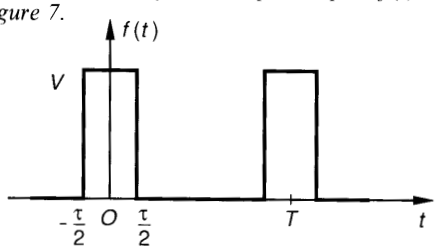


Fig. 7

Elle peut être écrite sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_n \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} n \frac{t}{T}}$$

avec

$$\underline{S}_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \frac{t}{T}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{V\tau}{T}\,\frac{\sin \pi n \frac{\tau}{T}}{\pi n \frac{\tau}{T}}$$

Le spectre bilatéral correspondant est tracé à la figure 8.

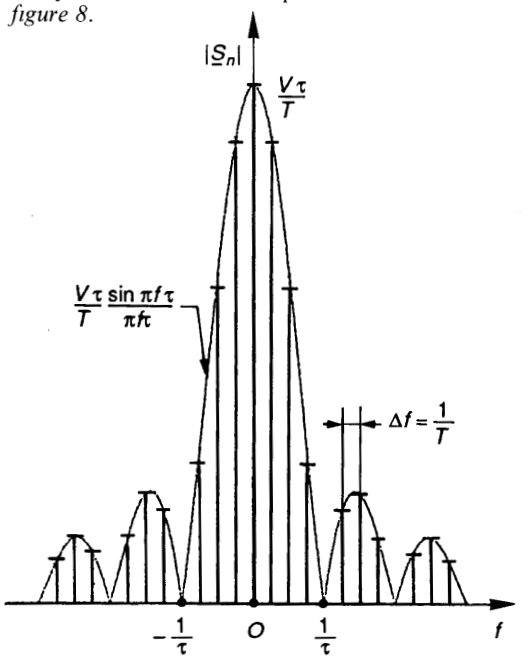


Fig. 8

A partir de la fonction périodique $f(t)$, faisons tendre la période $T = \frac{1}{\Delta f}$ vers l'infini, tout en maintenant τ et V constants. Nous obtenons ainsi le motif $s(t)$ de la figure 9, qui est nul en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$.

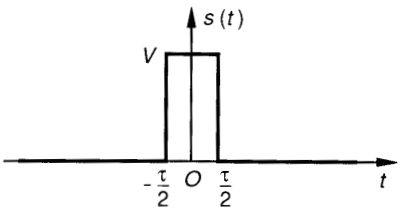


Fig. 9

Étudions l'évolution de la fonction

$$\underline{S}_n T = \frac{\underline{S}_n}{\Delta f} = V\tau\,\frac{\sin \pi\tau n\,\Delta f}{\pi\tau n\,\Delta f}$$

lorsque la période T tend vers l'infini.

- *$\Delta f = \frac{1}{T}$ tendant vers zéro, la variable discontinue $n\,\Delta f = \frac{n}{T}$ tend vers la variable continue f.*
- *Les raies spectrales se resserrent infiniment tout en restant dans l'enveloppe $V\tau\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}$.*
- *La fonction $\frac{\underline{S}_n}{\Delta f}$ tend vers la fonction $\underline{S}(f) = V\tau\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}$ de la variable continue f.*

Soit $\underline{S}_n \to \underline{S}(f)\,\mathrm{d}f$ avec $\underline{S}(f) = V\tau\,\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}$.

• Pour l'expression du signal $s(t)$, le passage à la limite se traduit par

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_n \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{n}{T} t} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f) \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f t}\,\mathrm{d}f$$

ce qui se résume de la façon suivante :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f t}\,\mathrm{d}f$$

avec $\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}\,\mathrm{d}t.$

Densité spectrale de puissance

• Du point de vue énergétique, si le signal $s(t)$ est une tension, il fournit à la résistance R la puissance instantanée $\frac{s^2(t)}{R}$; s'il s'agit d'un courant, il fournit la puissance $Rs^2(t)$. D'une manière générale on appelle **puissance normalisée** la valeur moyenne de $s^2(t)$ et nous la noterons $\overline{s^2(t)}$. Il s'agit de la puissance fournie par le signal à la résistance

unité. C'est aussi le carré de la *valeur quadratique moyenne* du signal. Pour un signal périodique cette valeur quadratique moyenne correspond à **la valeur efficace.**

• Soit un signal $s(t)$, périodique, dont la décomposition en série de Fourier s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T} + \varphi_n\right).$$

Nous avons montré (tome 1, chapitre 6) que le carré de sa valeur efficace S s'écrit

$$S^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2}.$$

De plus, l'amplitude C_n de l'harmonique n est liée à

$$\underline{S}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} s(t)\, e^{-2\pi j \frac{n}{T}t}\, dt \quad \text{par} \quad |\underline{S}_n| = \frac{C_n}{2}.$$

Le carré de la valeur efficace (ou puissance normalisée) du signal périodique s'écrit

$$S^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\underline{S}_n|^2$$

Sachant que $\begin{cases} |S_n| = |S_{-n}| \\ S_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} s(t)\, dt \end{cases}$

il vient : $S^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\underline{S}_n|^2$

L'énergie normalisée du signal sur une période s'écrit :

$$E = S^2 T = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{S}_n|^2$$

• Soit le signal d'énergie finie de la figure 6. En le considérant comme la limite d'un signal périodique dont la période T tendrait vers l'infini, nous avons établi que la fonction $\underline{S}_n = \underline{S}(n\,\Delta f)$ tend vers $\underline{S}(f)\,df$ avec $\underline{S}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$.

Lorsque T tend vers l'infini, son énergie normalisée devient

$$E = \lim_{T\to\infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{S}_n|^2 = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\,|\underline{S}_n|^2.$$

Compte tenu de $\begin{cases} \dfrac{1}{T} \to df \\ \underline{S}_n \to \underline{S}(f)\, df \end{cases}$

il vient $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(f)|^2\, df.$

$|S(f)|^2$ apparaît ainsi comme la **densité spectrale de l'énergie** normalisée du signal $s(t)$. $|S(f)|^2\, df$ est l'énergie transportée par le signal dans la bande de fréquence $[f, f + df]$.

REMARQUE

$|\underline{S}(f)|^2$ *peut s'écrire*

$$|\underline{S}(f)|^2 = \underline{S}(f)\underline{S}^*(f) = \underline{S}(f)\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{2\pi j f t}\, dt$$

soit :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{2\pi j f t}\, dt\, df$$

où en permuttant l'ordre des intégrations,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, e^{2\pi j f t}\, df\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt,$$

$s^2(t)$ étant la puissance instantanée normalisée de $s(t)$, son énergie normalisée correspond bien à $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt.$

Pour résumer

Un signal $s(t)$ d'énergie finie fait apparaître dans la bande de fréquence $[f, f + df]$, l'énergie $dE = |\underline{S}(f)|^2\, df$ avec

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt.$$

• Supposons que les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ correspondant respectivement à un « 0 » et à un « 1 » soient tels que $s_0(t) = -s_1(t)$ (*fig.* 10).

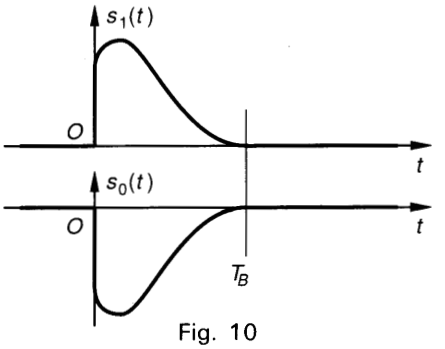


Fig. 10

Soit T_B la durée de chaque motif et soient respectivement $S_0(f)$ et $S_1(f)$ les densités spectrales d'amplitude de $s_0(t)$ et $s_1(t)$.

A partir de

$$\underline{S}_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -s_1(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

Il vient

$$\underline{S}_0(f) = -\underline{S}_1(f)$$

Les densités spectrales d'énergie $|S_0(f)|^2$ et $|S_1(f)|^2$ des deux motifs sont donc égales : nous poserons $|\underline{S}_0(f)|^2 = |\underline{S}_1(f)|^2 = |\underline{S}(f)|^2$.

Le signal numérique est formé d'une succession aléatoire de motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$. Sachant que chaque motif alloue à l'intervalle de fréquence $[f, f + \mathrm{d}f]$ la même énergie $\mathrm{d}E = |\underline{S}(f)|^2\,\mathrm{d}f$, nous pouvons conclure qu'une tranche de signal numérique prise entre les instants $-kT_B$ et $+kT_B$, contient $2k$ motifs, et attribue à la bande de fréquence $[f, f + \mathrm{d}f]$ l'énergie $2k|\underline{S}(f)|^2\,\mathrm{d}f$. Sachant que cette énergie apparaît pendant le temps $2kT_B$, il lui correspond dans la même bande de fréquence la puissance normalisée.

$$\frac{2k|\underline{S}(f)|^2\,\mathrm{d}f}{2kT_B} = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B}\,\mathrm{d}f.$$

$G(f) = \dfrac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B}$ est la densité spectrale de puissance du signal constitué par la succession aléatoire de motifs tels que $s_0(t) = -s_1(t)$.

En conclusion

Le signal numérique constitué d'une suite de motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$, de durée T_B et tels que $s_0(t) = -s_1(t)$, fait apparaître dans la bande de fréquence $[f, f + \mathrm{d}f]$ la puissance normalisée

$$G(f)\,\mathrm{d}f = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B}\,\mathrm{d}f$$

avec $\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}t.$

Dans la bande de fréquence $[0, f_1]$, il transporte la puissance

$$P = \int_{-f_1}^{f_1} G(f)\,\mathrm{d}f = \int_{-f_1}^{f_1} \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B}\,\mathrm{d}f.$$

2.2.2. Signal N-R-Z (non retour à zéro)

Pour un signal N-R-Z, les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ sont tels que $s_0(t) = -s_1(t)$ et sont décrits à la figure 11.

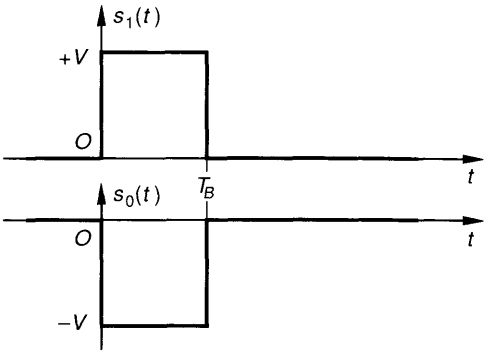


Fig. 11

$$s_1(t) = \begin{cases} +V & \text{pour } t \in [0, T_B[\\ 0 & \text{pour } t \notin [0, T_B[\end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} -V & \text{pour } t \in [0, T_B[\\ 0 & \text{pour } t \notin [0, T_B[. \end{cases}$$

Par application des résultats précédents

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}t = \int_0^{T_B} V\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}t$$

$$= V\left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}ft}}{-2\pi\mathrm{j}f}\right]_0^{T_B} = \frac{V}{2\pi\mathrm{j}f}[1 - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}fT_B}]$$

$$= \frac{V\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}fT_B}}{\pi f}\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{j}fT_B} - \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}fT_B}}{2\mathrm{j}}$$

$$\underline{S}(f) = VT_B\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}fT_B}\,\frac{\sin \pi fT_B}{\pi fT_B}.$$

La densité spectrale de puissance s'écrit :

$$G(f) = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} = V^2T_B\left(\frac{\sin \pi fT_B}{\pi fT_B}\right)^2.$$

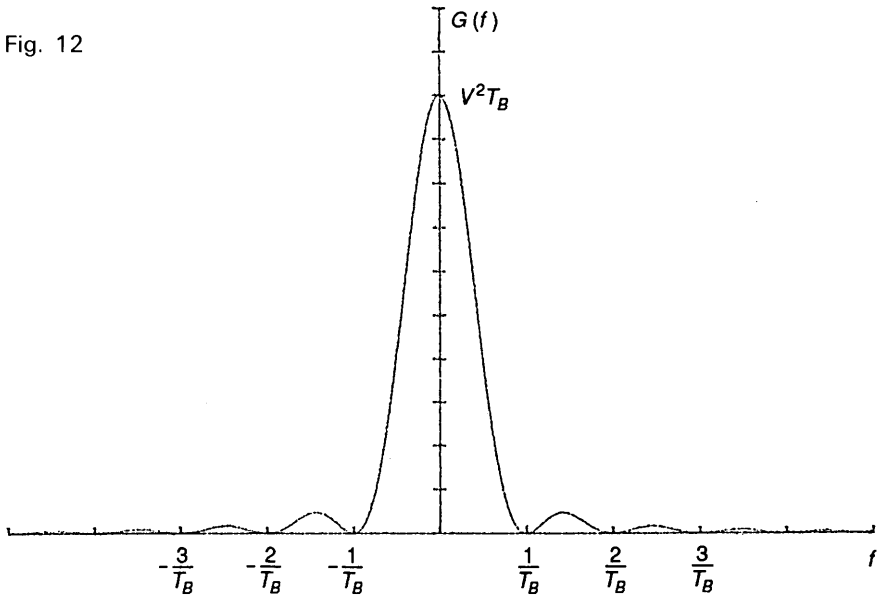
La représentation de $G(f)$ en fonction de la fréquence est donnée à la figure 12.

Le signal N-R-Z étant égal soit à $+V$ soit à $-V$, le carré de sa valeur quadratique moyenne est égal à V^2. C'est aussi la puissance normalisée G_T transportée par le signal.

Sur la courbe représentative de $G(f)$, (*fig.* 12) le lobe central compris entre les fréquences $-\dfrac{1}{T_B}$ et $\dfrac{1}{T_B}$ est beaucoup plus important que les lobes latéraux. La puissance correspondante est donnée par

$$G_l = \int_{-\frac{1}{T_B}}^{\frac{1}{T_B}} G(f)\,\mathrm{d}f = V^2T_B\int_{-\frac{1}{T_B}}^{\frac{1}{T_B}} \left(\frac{\sin \pi fT_B}{\pi fT_B}\right)^2 \mathrm{d}f$$

Fig. 12



En posant $x = \pi f T_B$, la puissance transportée dans le lobe central s'écrit :

$$G_l = V^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Sachant que $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = 0{,}91\pi$, il vient : $G_l = 0{,}91V^2$. Ainsi 91 % de la puissance du signal *N-R-Z* apparaît dans la bande de fréquence $-\frac{1}{T_B}, \frac{1}{T_B}$.

Nous pouvons en conclure :

La bande de fréquence nécessaire pour transmettre le message N-R-Z est de l'ordre du rythme digital $\frac{1}{T_B}$.

2.2.3. Signal R-Z 50 % (retour à zéro à 50 %)

Les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ d'un signal R-Z-50 % sont décrits à la figure 13

$$s_1(t) = \begin{cases} V & \text{pour } t \in [0,\ T_B/2] \\ 0 & \text{pour } t \notin [0,\ T_B/2] \end{cases}$$

$$s_0(t) = 0 \quad \text{quel que soit } t.$$

Dans le cas du signal R-Z-50 %, la condition $s_0(t) = -s_1(t)$ n'est pas vérifiée; cependant, en posant

$$c(t) = \frac{s_1(t) + s_0(t)}{2}, \qquad \mathrm{d}(t) = s_1(t) - s_0(t),$$

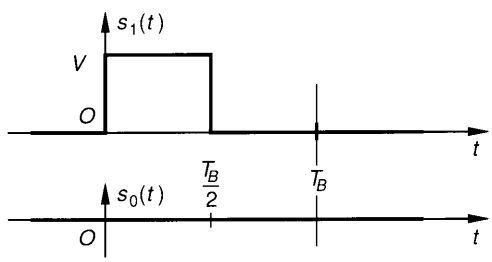


Fig. 13

il vient $s_1(t) = c(t) + \frac{\mathrm{d}(t)}{2}$, $\quad s_0(t) = c(t) - \frac{\mathrm{d}(t)}{2}$

Ainsi les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ peuvent être décomposés en une partie commune $c(t)$ et une partie différentielle $\frac{\mathrm{d}(t)}{2}$.

Les représentations de $c(t)$ et $\frac{\mathrm{d}(t)}{2}$ sont données à la figure 14.

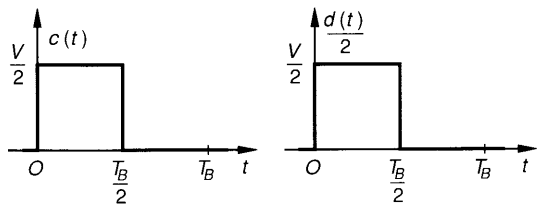


Fig. 14

Le signal R-Z 50 % est constitué par la superposition de deux séquences :

– une séquence périodique $a(t)$ (*fig.* 15) résultant de la succession des motifs $c(t)$;

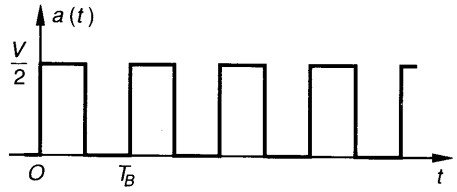


Fig. 15

– une séquence aléatoire $b(t)$ (*fig.* 16) formée par la suite aléatoire des motifs $\frac{d(t)}{2}$ pour un « 1 » et $\frac{-d(t)}{2}$ pour un « 0 ».

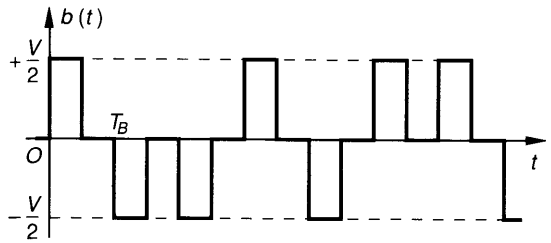


Fig. 16

Le signal $a(t)$ périodique, décomposable en série de Fourier s'écrit :

$$a(t) = \frac{V}{4} + \frac{V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[(2n+1)\frac{2\pi t}{T_B}\right]$$

Le spectre correspondant est donné à la figure 17. Le signal aléatoire $b(t)$ étant constitué d'une succession de motifs $\frac{d(t)}{2}$ et $\frac{-d(t)}{2}$, sa densité spectrale de puissance peut être calculée à partir des résultats du paragraphe 2.2.1.

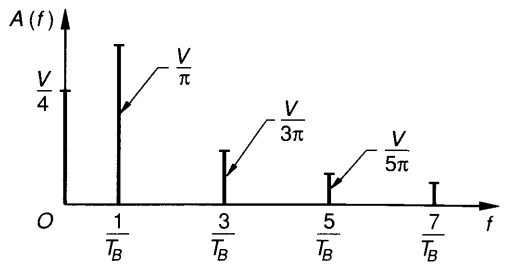


Fig. 17

La transformée de Fourier d'un motif $\frac{d(t)}{2}$ est :

$$\underline{D}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(t)}{2} e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{T_B}{2}} \frac{V}{2} e^{-2\pi j f t}\, dt = \frac{V}{2}\left[\frac{-e^{-2\pi j f t}}{2\pi j f}\right]_0^{\frac{T_B}{2}}$$

$$\underline{D}(f) = \frac{V}{2\pi f}\left[\frac{1 - e^{-\pi j f T_B}}{2j}\right]$$

$$= \frac{V T_B}{4} e^{-\pi j f \frac{T_B}{2}} \frac{\sin \pi f \frac{T_B}{2}}{\pi f \frac{T_B}{2}}.$$

En conséquence, la densité spectrale de puissance du signal $b(t)$ s'écrit :

$$G(f) = \frac{|\underline{D}(f)|^2}{T_B} = \frac{V^2}{16} T_B \left(\frac{\sin \pi f \frac{T_B}{2}}{\pi f \frac{T_B}{2}}\right)^2$$

La représentation de $G(f)$ en fonction de la fréquence est donnée à la figure 18.

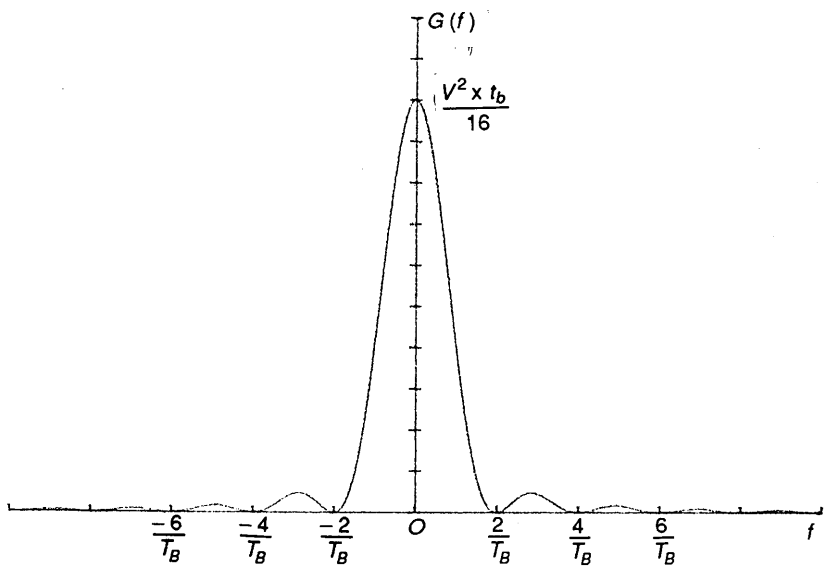


Fig. 18

Conséquences

a) Le signal R-Z 50 % comprend une séquence périodique $a(t)$ dont la décomposition en série de Fourier fait apparaître une composante d'amplitude $\frac{V}{\pi}$ et de fréquence $\frac{1}{T_B}$. À la réception, il est ainsi possible de reconstituer le rythme digital en isolant cette composante.

b) Les « 0 » et les « 1 » apparaissant de manière aléatoire avec la même probabilité, la puissance normalisée du signal R-Z 50 % est égale à $\frac{V^2}{4}$.

• Le signal périodique $a(t)$ transporte la puissance normalisée $\frac{V^2}{8}$, c'est-à-dire la moitié de la puissance du signal R-Z 50 %.

• Le signal aléatoire transporte dans le lobe central de sa densité spectrale de puissance (*fig.* 18), la puissance normalisée

$$G_l(f) = \int_{-\frac{2}{T_B}}^{\frac{2}{T_B}} \frac{V^2}{16} T_B \left(\frac{\sin \pi f \frac{T_B}{2}}{\pi f \frac{T_B}{2}} \right)^2 \mathrm{d}f,$$

où en effectuant le changement de variable $x = \pi f \frac{T_B}{2}$

$$G_l(f) = \frac{V^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{d}x = 0{,}91 \frac{V^2}{8}$$

c'est-à-dire 91 % de la puissance normalisée du signal aléatoire.

En conséquence le signal R-Z 50 % nécessite une bande de fréquence de l'ordre de $\frac{2}{T_B}$. Il contient une composante de fréquence $\frac{1}{T_B}$ qui permet, à la réception, de reconstituer le rythme digital. Cependant la puissance du signal aléatoire $b(t)$ qui transporte l'information ne correspond qu'à la moitié de la puissance du signal R-Z 50 %.

2.2.4. Signal biphase

Les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ du signal biphase sont décrits à la figure 19.

$$s_1(t) = \begin{cases} +V & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T_B}{2} \\ -V & \text{pour} \quad \frac{T_B}{2} < t < T_B \end{cases};$$

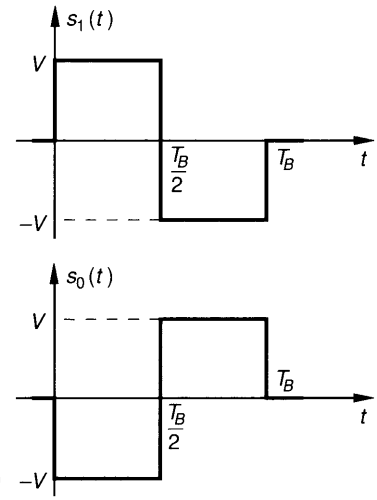


Fig. 19

$$s_0(t) = \begin{cases} -V & \text{pour} \quad 0 < t < \frac{T_B}{2} \\ +V & \text{pour} \quad \frac{T_B}{2} < t < T_B \end{cases}.$$

À l'instant $t = \frac{T_B}{2}$, un « 1 » correspond à une transition négative et un « 0 » à une transition positive.

L'observation de la figure 19 montre que la condition $s_0(t) = -s_1(t)$ est satisfaite. La densité spectrale de puissance du signal biphase peut donc être calculée en appliquant les résultats du paragraphe 2.2.1.

La transformée de Fourier du motif $s_1(t)$ est :

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{T_B}{2}} V \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}\, \mathrm{d}t + \int_{\frac{T_B}{2}}^{T_B} -V \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}\, \mathrm{d}t$$

$$= V \left[\left[\frac{-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}}{2\pi \mathrm{j} f} \right]_0^{\frac{T_B}{2}} - \left[\frac{-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}}{2\pi \mathrm{j} f} \right]_{\frac{T_B}{2}}^{T_B} \right]$$

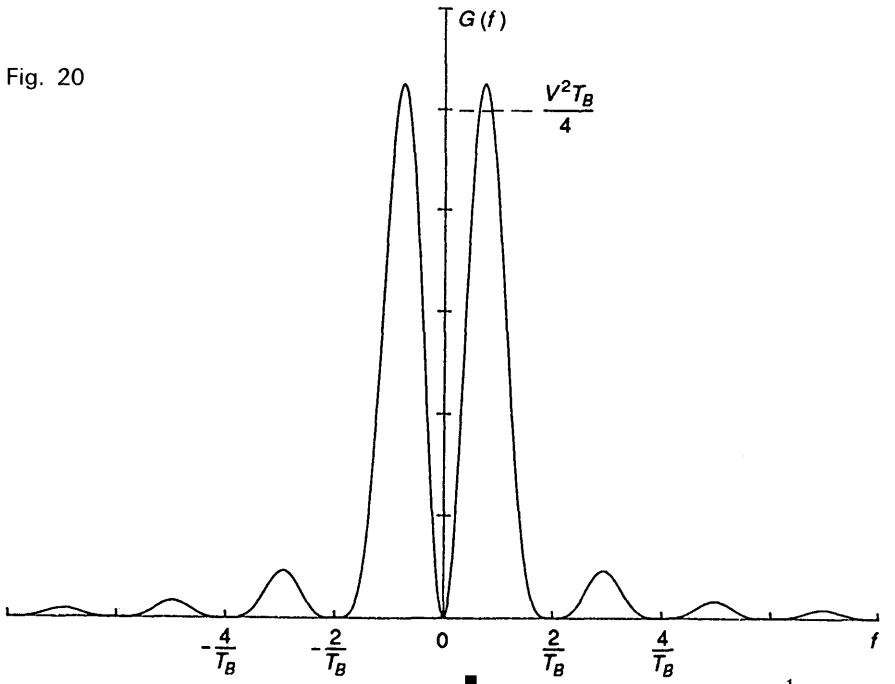
$$= \frac{V}{2\pi \mathrm{j} f} [1 - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f T_B} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f T_B} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f T_B}]$$

$$= \frac{V}{2\pi \mathrm{j} f} (1 - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f T_B})^2$$

$$= \frac{V}{2\pi \mathrm{j} f} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f T_B} (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} f \frac{T_B}{2}} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f \frac{T_B}{2}})^2$$

$$= V \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f T_B} T_B \mathrm{j} \frac{\sin^2 \pi f \frac{T_B}{2}}{\pi f \frac{T_B}{2}}.$$

Fig. 20



En conséquence, la densité spectrale de puissance du signal biphase s'écrit :

$$G(f) = \frac{|S(f)|^2}{T_B} = V^2 T_B \frac{\sin^4 \pi f \frac{T_B}{2}}{\left(\pi f \frac{T_B}{2}\right)^2}.$$

La représentation de $G(f)$ en fonction de la fréquence est donnée à la figure 20.

La puissance contenue dans le lobe central, entre les fréquences $-\frac{2}{T_B}$ et $\frac{2}{T_B}$ représente 87 % de la puissance normalisée V^2 du signal biphase. La largeur de la bande fréquentielle nécessaire à sa transmission est donc de l'ordre de $\frac{2}{T_B}$. Le signal biphase présente par rapport aux signaux N-R-Z et R-Z 50 %, l'avantage de ne pas nécessiter la transmission du continu.

REMARQUE

Bien que le signal biphase présente une transition par motif, à la fréquence $\frac{1}{T_B}$, il ne possède aucune composante de fréquence $\frac{1}{T_B}$ qui permettrait au récepteur de reconstituer le rythme digital.

Les codes N-R-Z, RZ 50 % biphase ne sont pas les seuls utilisés pour représenter un message binaire. Les PTT utilisent le code HDB3 qui correspond au code RZ 50 % dans lequel les 1 sont alternativement représentés par les niveaux $+V$ et $-V$. De plus, afin de faciliter l'accrochage d'une boucle à verrouillage de phase sur le rythme digital, le nombre de « 0 » successifs est limité à 3. Pour ce faire, on remplace le quatrième « 0 » par un « 1 » de même sens que le dernier « 1 » rencontré (viol de parité).

Il se peut que deux viols successifs aient la même parité (s'il y a une séquence d'un nombre pair de « 1 » entre les deux viols) ce qui provoque l'apparition d'une composante continue qu'il faut éviter. Pour supprimer ce phénomène on remplace le premier « 0 » de la suite de plus de trois « 0 » par un « 1 » (bourrage) si le nombre de « 1 » entre deux viols est pair.

La figure 21 donne un exemple de séquence codée HDB3.

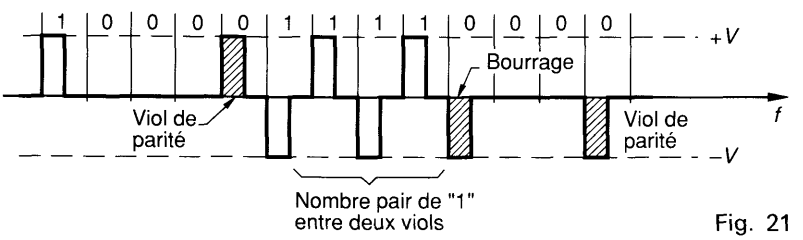


Fig. 21

2.3. RÉCAPITULATION

Nous pouvons, dès à présent, isoler les résultats suivants.

La représentation d'un signal analogique par une séquence binaire est d'autant meilleure que la fréquence d'échantillonnage F_e est plus élevée et que le nombre N de bits utilisés pour représenter un niveau de quantification est plus grand.

La bande de fréquence nécessaire à la transmission du message binaire est un multiple de $\frac{1}{T_B}$, où T_B est la durée d'un motif. Elle augmente donc si la durée du motif décroît.

Sachant que, dans l'intervalle de temps T_e, séparant deux instants d'échantillonnage, N bits, correspondant chacun à un motif de durée T_B doivent être transmis, il vient

$$T_e > NT_B \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{T_B} > \frac{N}{T_e} = NF_e.$$

Nous pouvons en conclure que la qualité de la transmission, qui est d'autant meilleure que N (bruit de quantification) et F_e (limitation en fréquence du signal à transmettre) sont plus grands, impose une valeur minimale à $\frac{1}{T_B}$. Cette condition fixe pour le canal de transmission une bande de fréquence suffisamment élevée et nous aboutissons ainsi à la même conclusion que pour les transmissions analogiques.

3. TRANSMISSION DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Le signal numérique peut être transmis directement : on parle alors de **transmission en bande de base.**

Il peut aussi être utilisé pour moduler un signal porteur.

- Une modulation de fréquence est désignée par le sigle F-S-K (*frequency Shift Keying*).
- Une modulation de phase est repérée par le sigle P-S-K (*Phase Shift Keying*).

3.1. MODULATION F-S-K

Nous n'étudierons que le signal N-R-Z F-S-K pour lequel un « 1 » est codé par un signal sinusoïdal de fréquence F_1 et un « 0 » par un signal de même amplitude et de fréquence F_0 (*fig.* 22).

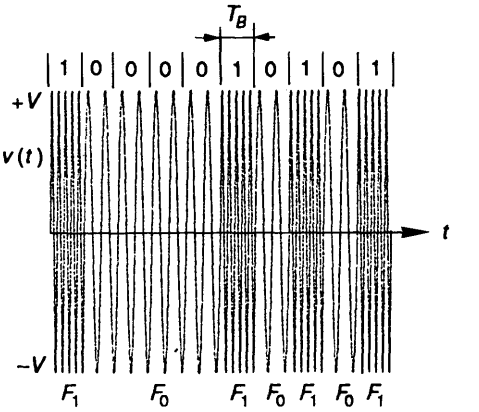


Fig. 22

Le signal N-R-Z F-S-K peut être obtenu en modulant, par le message N-R-Z, un oscillateur commandé par tension (V.C.O.).

En posant

$$F_C = \frac{F_1 + F_0}{2} \qquad \Delta F = \frac{F_1 - F_0}{2}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} F_1 = F_C + \Delta F \\ F_0 = F_C - \Delta F \end{cases}$

le signal N-R-Z F-S-K s'écrit :

$$v(t) = V \sin [2\pi(F_C + m(t)\ \Delta F)t]$$

avec $m(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour un « 1 »} \\ -1 & \text{pour un « 0 ».} \end{cases}$

Ce qui conduit à :

$$v(t) = V \sin (2\pi F_C t) \cos (2\pi m(t)\ \Delta F t) + V \cos (2\pi F_C t) \sin (2\pi m(t)\ \Delta F t)$$

Le signal N-R-Z F-S-K apparaît ainsi composé de deux termes :

- le terme $v_1(t) = V \sin (2\pi F_C t) \cos (2\pi m(t)\ \Delta F t)$.

Sachant que $m(t)$ ne peut prendre que les valeurs + 1 et − 1 et le cosinus étant une fonction paire, il vient :

$$v_1(t) = V \sin (2\pi F_C t) \cos (2\pi\ \Delta F t)$$
$$= \frac{V}{2} [\sin 2\pi(F_C + \Delta F)t + \sin 2\pi(F_C - \Delta F)t]$$
$$= \frac{V}{2} [\sin 2\pi F_1 t + \sin 2\pi F_0 t]$$

Le signal $v_1(t)$ résulte donc de la superposition de deux composantes sinusoïdales de même amplitude $\frac{V}{2}$ et de fréquences F_1 et F_0, ce qui correspond au spectre de la figure 23;

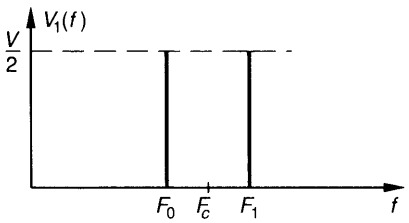


Fig. 23

• le terme $v_2(t) = +V\cos(2\pi F_C t)\sin(2\pi m(t)\Delta F t)$. Sachant que $m(t)$ ne peut prendre que les valeurs $+1$ et -1 et le sinus étant une fonction impaire il vient :

$$v_2(t) = \begin{cases} s_1(t) = +V\cos(2\pi F_C t)\sin(2\pi\Delta F t) \\ \qquad\qquad \text{pour un «1»} \\ s_0(t) = -V\cos(2\pi F_C t)\sin(2\pi\Delta F t) \\ \qquad\qquad \text{pour un «0»} \end{cases}$$

Ainsi le terme $v_2(t)$ est une séquence aléatoire de motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ tels que $s_0(t) = -s_1(t)$. Nous pouvons donc lui appliquer les résultats du paragraphe 2.2.1.

La transformée de Fourier de $s_1(t)$ s'écrit :

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$
$$= \int_0^{T_B} V\cos 2\pi F_C t \,.\, \sin 2\pi\Delta F t \,.\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$
$$= \frac{V}{2}\int_0^{T_B} (\sin 2\pi F_1 t - \sin 2\pi F_0 t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt.$$

Sachant que :

$$\int_0^{T_B} \sin 2\pi F t \,.\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$
$$= \int_0^{T_B} \frac{e^{-2\pi j(f-F)t} - e^{-2\pi j(f+F)t}\, dt}{2j}$$
$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1 - e^{-2\pi j(f-F)T_B}}{2\pi j(f-F)} - \frac{1 - e^{-2\pi j(f+F)T_B}}{2\pi j(f+F)}\right]$$
$$= \frac{T_B}{2j}\left[e^{-\pi j(f-F)T_B}\frac{\sin\pi(f-F)T_B}{\pi(f-F)T_B} - e^{-\pi j(f+F)T_B}\frac{\sin\pi(f+F)T_B}{\pi(f+F)T_B}\right]$$

il vient :

$$\underline{S}(f) = \frac{VT_B}{4j}\left[e^{-\pi j(f-F_1)T_B}\frac{\sin\pi(f-F_1)T_B}{\pi(f-F_1)T_B} - e^{-\pi j(f+F_1)T_B}\frac{\sin\pi(f+F_1)T_B}{\pi(f+F_1)T_B} - e^{-\pi j(f-F_0)T_B}\frac{\sin\pi(f-F_0)T_B}{\pi(f-F_0)T_B} + e^{-\pi j(f+F_0)T_B}\frac{\sin\pi(f+F_0)T_B}{\pi(f+F_0)T_B}\right]$$

La densité spectrale $G(f)$ du signal N-R-Z F-S-K est donnée par $G(f) = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B}$. Le carré du module d'une somme n'est bien sûr pas égal à la somme des carrés des modules, cependant, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ décroissant rapidement de part et d'autre de $x = 0$, nous pouvons admettre que les quatre termes composant $\underline{S}(f)$ et centrés respectivement sur les fréquences F_1, $-F_1$, F_0, $-F_0$, n'empiètent pas l'un sur l'autre, ce qui conduit à :

$$|\underline{S}(f)|^2 = \frac{V^2T_B^2}{16}$$
$$\left[\left(\frac{\sin\pi(f-F_1)T_B}{\pi(f-F_1)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f+F_1)T_B}{\pi(f+F_1)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f-F_0)T_B}{\pi(f-F_0)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f+F_0)T_B}{\pi(f+F_0)T_B}\right)^2\right]$$

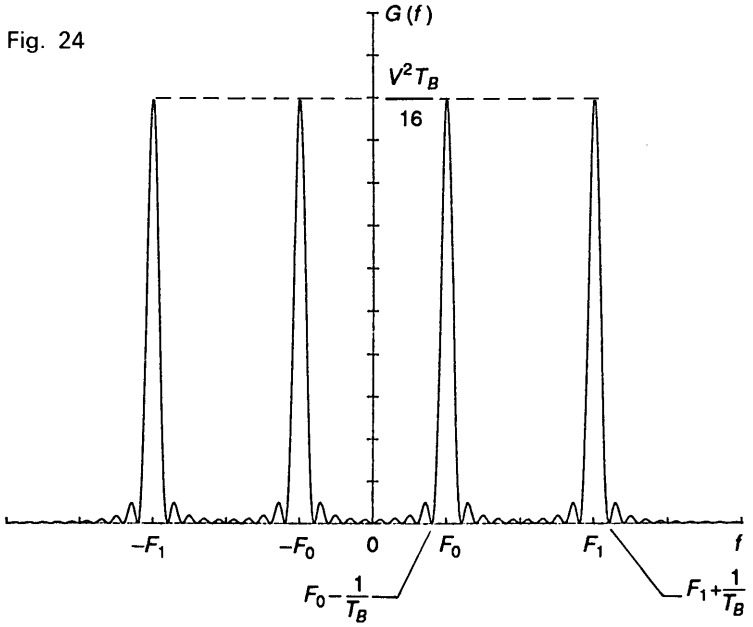
La densité spectrale de puissance $G(f)$ s'écrit alors :

$$G(f) = \frac{V^2}{16}\,T_B$$
$$\left[\left(\frac{\sin\pi(f-F_1)T_B}{\pi(f-F_1)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f+F_1)T_B}{\pi(f+F_1)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f-F_0)T_B}{\pi(f-F_0)T_B}\right)^2 + \left(\frac{\sin\pi(f+F_0)T_B}{\pi(f+F_0)T_B}\right)^2\right]$$

Les variations de $G(f)$ en fonction de la fréquence f sont données à la figure 24.

La conjonction des spectres des figures 23 et 24 montre que la bande de fréquence allouée à un canal N-R-Z F-S-K doit être de l'ordre de $F_1 - F_0 + \frac{2}{T_B}$.

Fig. 24



3.2. MODULATION P-S-K

Nous n'envisagerons que le signal N-R-Z P-S-K dont l'allure est donnée à la figure 25.

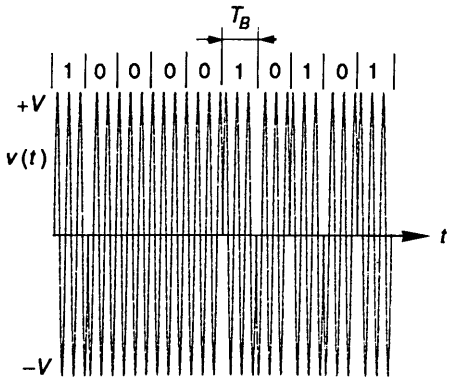


Fig. 25

Nous supposerons, de plus, que la **modulation est cohérente,** c'est-à-dire que la fréquence F_C de la porteuse est un multiple entier du rythme digital $\frac{1}{T_B}$, $\left(F_C = \frac{k}{T_B}\right)$. La phase des tronçons de sinusoïde est égale à 0 pour un « 1 » et à π pour un « 0 ».

A un « 1 » correspond ainsi le motif

$$s_1(t) = V \sin 2\pi F_C t$$

et un « 0 » est décrit par le motif

$$s_0(t) = V \sin (2\pi F_C t + \pi) = -V \sin 2\pi F_C t$$

Le signal N-R-Z P-S-K peut alors être écrit :

$$v(t) = Vm(t) \sin 2\pi F_C t$$

avec $m(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour un « 1 »} \\ -1 & \text{pour un « 0 »} \end{cases}$

Le signal N-R-Z P-S-K peut ainsi être élaboré par le dispositif de la figure 26.

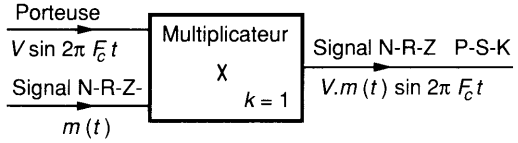


Fig. 26

Les motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ apparaissent de manière aléatoire et sont tels que $s_0(t) = -s_1(t)$. La densité spectrale de puissance du signal N-R-Z P-S-K peut ainsi être déterminée à l'aide des résultats du paragraphe 2.2.1. La transformée de Fourier du signal $s_1(t)$ s'écrit :

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_0^{T_B} V \sin 2\pi F_C t\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \frac{V}{2j} \int_0^{T_B} [e^{-2\pi j(f-F_C)t} - e^{-2\pi j(f+F_C)t}]\, dt$$

$$= \frac{V}{2j} \left[\frac{1 - e^{-2\pi j f T_B}\, e^{2\pi j F_C T_B}}{2\pi j(f - F_C)} - \frac{1 - e^{-2\pi j f T_B}\, e^{-2\pi j F_C T_B}}{2\pi j(f + F_C)} \right]$$

La modulation étant cohérente, F_C et T_B sont liés par $F_C T_B = k$, ce qui conduit à

$$e^{2\pi j F_C T_B} = e^{-2\pi j F_C T_B} = 1.$$

La transformée de Fourier $\underline{S}(f)$ s'écrit ainsi :

$$\underline{S}(f) = \frac{V}{2j}(1 - e^{-2\pi j f T_B})\frac{1}{2\pi j}\left[\frac{1}{f - F_C} - \frac{1}{f + F_C}\right]$$

$$= \frac{V}{2j} e^{-\pi j f T_B}(e^{\pi j f T_B} - e^{-\pi j f T_B}) \frac{2F_C}{2\pi j(f^2 - F_C^2)}$$

$$= \frac{V}{\pi j} \frac{e^{-\pi j f T_B}}{(f^2 - F_C^2)} F_C \sin \pi f T_B.$$

La densité spectrale de puissance du signal N-R-Z P-S-K s'écrit :

$$G(f) = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} = \frac{V^2}{\pi^2 T_B} F_C^2 \frac{\sin^2 \pi f T_B}{(f^2 - F_C^2)^2}$$

ou compte tenu de $F_C = \dfrac{k}{T_B}$

$$\boxed{G(f) = \frac{V^2}{\pi^2 k^2} T_B \frac{\sin^2 \pi f T_B}{\left(1 - \dfrac{f^2 T_B^2}{k^2}\right)^2}.}$$

La représentation de la densité spectrale de puissance pour $k = 4$ est donnée à la figure 27. La bande de fréquence nécessaire à la transmission est centrée sur F_C et sa largeur est égale à $\dfrac{2}{T_B}$.

REMARQUE

Pour la modulation N-R-Z P-S-K nous avons supposé que la fréquence de la porteuse est un multiple entier du rythme digital $\dfrac{1}{T_B}$ *(*modulation cohérente*), alors que pour la modulation N-R-Z F-S-K, les fréquences* F_1 *et* F_0 *ne sont pas corrélées avec le rythme digital* $\dfrac{1}{T_B}$ *(*modulation incohérente*).*

Pour la modulation N-R-Z P-S-K, la cohérence autorise ainsi un calcul particulier conduisant à une densité spectrale de puissance qui décroît en $\dfrac{1}{f^4}$ *alors que, pour la modulation N-R-Z F-S-K incohérente, elle décroît en* $\dfrac{1}{f^2}$.

4. RÉCEPTION DU SIGNAL NUMÉRIQUE

4.1. PROBLÈME

Au cours de la transmission, le signal utile est atténué, en même temps qu'un signal parasite de bruit lui est superposé. A partir du signal bruité, le récepteur doit reconnaître chaque état de l'élément binaire, avec une probabilité d'erreur suffisamment faible.

Nous supposerons pour cette étude que le bruit $n(t)$ est une fonction aléatoire qui possède les propriétés suivantes :

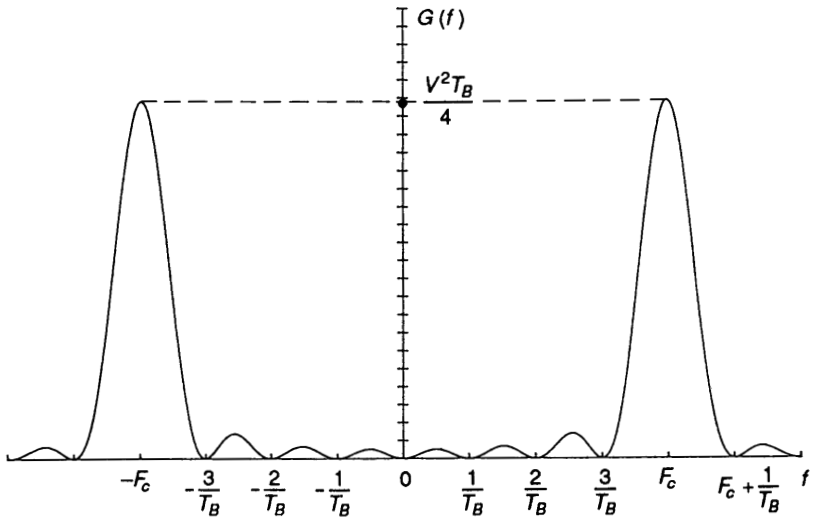


Fig. 27

- sa valeur moyenne $\overline{n(t)}$ est nulle;
- sa valeur quadratique moyenne est σ telle que

$$\sigma^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n^2(t)\, dt$$

σ^2 est **la variance,** c'est aussi la puissance normalisée de bruit;

- le bruit est un processus Gaussien : à l'instant t, la probabilité pour que $n(t)$ soit compris entre s et $s + ds$ est $p(s) \cdot ds$ avec

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}};$$

- le bruit est un processus **stationnaire** (la probabilité $p(s)$ est indépendante du temps) et **ergodique** (les moyennes prises sur un grand nombre d'événements sont égales aux moyennes temporelles d'un événement);
- le bruit est blanc : sa densité spectrale unilatérale de puissance est constante et égale à η. En d'autres termes, il développe dans la bande de fréquence $[f_1, f_2]$ la puissance normalisée

$$P = \int_{f_1}^{f_2} \eta\, df = \eta[f_2 - f_1].$$

REMARQUE

Si la densité spectrale de puissance est constante, la puissance totale de bruit (dans la bande de fréquence $[0, \infty]$*), qui s'écrit* $P = \int_0^\infty \eta\, df$*, est infinie. Ce résultat est incompatible avec la variance* σ^2 *(puissance normalisée de bruit) qui, elle, est finie. Nous sommes ainsi amenés à définir une bande passante équivalente de bruit* F_B *telle que*

$$\int_0^{F_B} \eta\, df = \eta F_B = \sigma^2$$

soit

$$F_B = \frac{\sigma^2}{\eta}.$$

- Soit un signal aléatoire gaussien stationnaire et ergodique dont la densité spectrale de puissance est $G(f)$. Si ce signal est passé à travers un filtre linéaire dont la fonction de transfert est $\underline{H}(f)$, nous admettrons que le signal de sortie du filtre est aussi une variable gaussienne stationnaire et ergodique.
- Le signal reçu est constitué d'une succession de motifs « 0 » et « 1 ».

Afin de reconstituer le signal émis, il faut échantillonner le signal reçu avec une fréquence égale au rythme digital $\frac{1}{T_B}$ (*fig.* 28). Il est donc

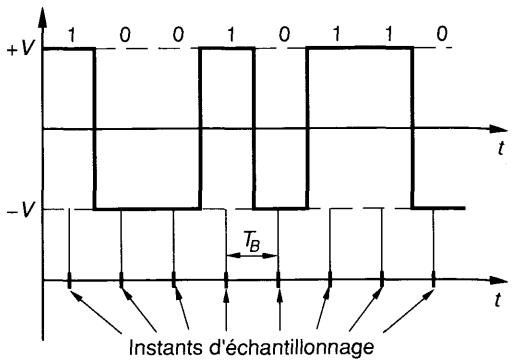


Fig. 28

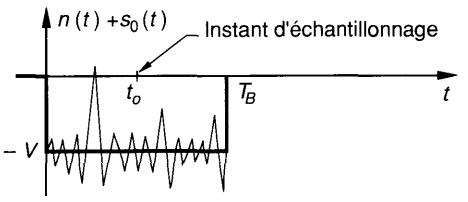
nécessaire de reconstituer une horloge de fréquence $\frac{1}{T_B}$, à partir du signal reçu.

4.2. RÉCEPTION DU SIGNAL N-R-Z EN BANDE DE BASE

4.2.1. Probabilité d'erreur

Les motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ correspondant au « 0 » et au « 1 » du signal N-R-Z sont donnés à la figure 11. À la réception, ces motifs sont dégradés par le bruit $n(t)$ et le motif $s_0(t) + n(t)$ correspondant à un « 0 » a l'allure décrite à la figure 29. Les motifs ayant respectivement l'amplitude $+ V$ pour un « 1 » et $- V$ pour un « 0 », il est naturel de choisir 0 comme niveau de décision. Ainsi à l'instant d'échantillonnage t_0, nous dirons que nous avons détecté un « 1 » si $s_0(t_0) + n(t_0) > 0$ et un zéro, si $s_0(t_0) + n(t_0) < 0$. Il est ainsi possible de commettre une erreur si $n(t_0)$ est supérieur à V.

Fig. 29



$p(s)\, ds$ étant la probabilité pour que $n(t)$ soit compris dans l'intervalle $[s, s + ds]$, la probabilité pour que $n(t_0)$ soit supérieur à V s'écrit :

$$P_e = \int_V^\infty p(s)\, ds = \int_V^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\, ds;$$

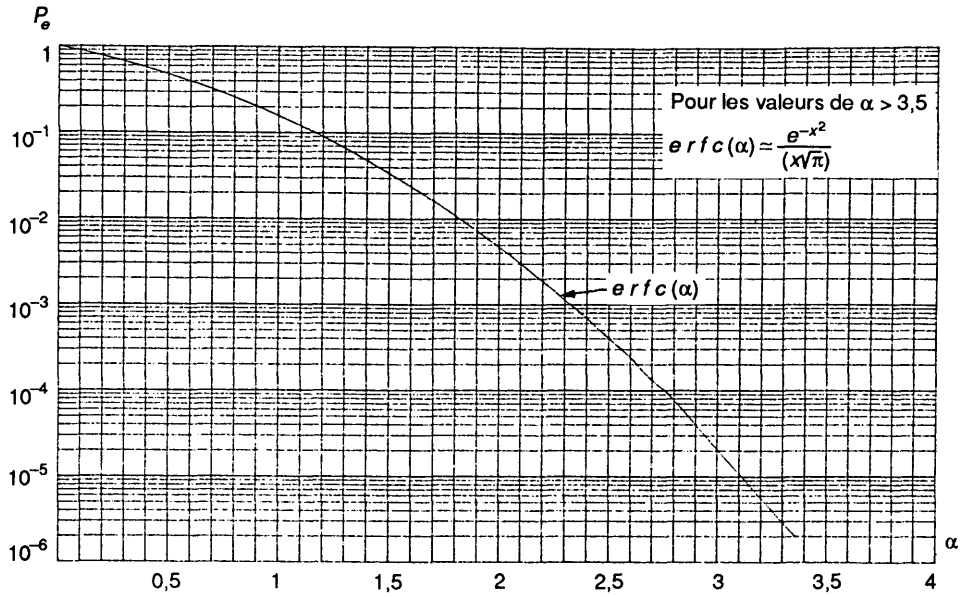


Fig. 30

ou en posant $\frac{s}{\sqrt{2}\sigma} = x$,

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Les variations de la fonction $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$, notée $erf_C(\alpha)$, sont données à la figure 30. La probabilité d'erreur P_e, s'exprime, par l'intermédiaire de la fonction erf_C sous la forme :

$$P_e = \frac{1}{2} erf_C\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La fonction $erf_C(\alpha)$ décroissant rapidement avec α, nous vérifions que la probabilité d'erreur diminue lorsque l'amplitude V des motifs augmente et lorsque la valeur quadratique moyenne σ du bruit diminue.

Lorsque le signal utile est complètement noyé dans le bruit, $\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}$ devient infiniment petit et $erf_C\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ tend vers 1. La probabilité d'erreur tend alors vers 0,5. Ce résultat était prévisible dans la mesure où le récepteur, devant décider entre deux états, à partir d'un signal quasiment aléatoire, a une chance sur deux de se tromper.

4.2.2. Filtrage du signal N-R-Z

La densité spectrale de puissance du bruit étant constante, le signal de bruit encombre uniformément toute la plage de fréquence. Par contre, nous avons montré que 91 % de la puissance du signal N-R-Z apparaît dans la bande de fréquence $\left[0, \frac{1}{T_B}\right]$. Nous pouvons en conclure qu'il est possible de construire un filtre qui, tout en étant perméable au signal utile, réduise la valeur quadratique moyenne du bruit, et diminue ainsi la probabilité d'erreur.

Observons (*fig.* 31) les variations temporelles du signal utile $s(t)$ et du bruit $n(t)$.

On conçoit qu'en ne considérant que la valeur du signal utile à l'instant t_0, on ne met pas à profit toute l'énergie du motif N-R-Z qui reste égal à V pendant la durée T_B d'un bit. On laisse ainsi au bruit, toutes les chances de perturber la décision.

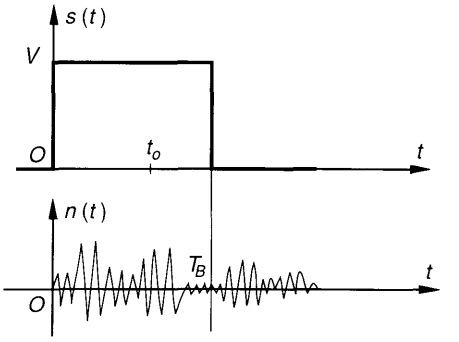


Fig. 31

Sachant que la valeur moyenne du bruit est nulle, la surface algébrique comprise entre la courbe $n(t)$ et l'axe des temps, dans l'intervalle de temps $[0, T_B]$, est quasiment nulle. Par contre la surface comprise entre le signal utile et l'axe des temps est égale à VT_B pour $s_1(t)$ et à $-VT_B$ pour $s_0(t)$.

Ces surfaces peuvent être déterminées en intégrant le signal bruité entre les instants 0 et T_B. Nous pouvons ainsi espérer une diminution de la probabilité d'erreur due au bruit à l'aide du filtre de la figure 32.

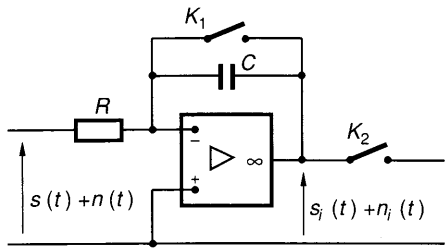


Fig. 32

Au début de chaque motif (à l'instant $t = 0$) l'interrupteur K_1 est fermé, pendant un temps très court, permettant ainsi la décharge de la capacité C et la remise à 0 de la tension de sortie $[s_i(0) + n_i(0) = 0]$. Le signal d'entrée est ensuite intégré par le dispositif et, à l'instant $t = T_B$, la tension de sortie s'établit à

$$s_i(T_B) + n_i(T_B) = -\frac{1}{RC}\left[\int_0^{T_B} s(t)\,dt + \int_0^{T_B} n(t)\,dt\right]$$

À l'instant $t = T_B$ l'interrupteur K_2 est fermé, pendant un temps très bref, pour prélever l'échantillon $s_i(T_B) + n_i(T_B)$, puis l'interrupteur K_1 est fermé afin de remettre à zéro la tension de sortie pour l'analyse du motif suivant.

REMARQUE

On peut montrer mathématiquement que le dispositif précédent correspond à un ***filtre optimum****, conduisant à une probabilité d'erreur minimale.*

Calculons la probabilité d'erreur, en présence du filtre de la figure 32. Le système établit sa décision à partir de l'échantillon $s_i(T_B) + n_i(T_B)$.

- $si(T_B) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_0^{T_B} s(t)\,dt$ est égal à $-\dfrac{VT_B}{RC}$ pour un « 1 » et à $\dfrac{VT_B}{RC}$ pour un « 0 ».

- Le bruit $n(t)$ étant un processus gaussien, le signal $n_i(t)$ obtenu en filtrant $n(t)$ est aussi un processus gaussien. $n_i(T_B)$ est donc une variable gaussienne dont nous allons déterminer la valeur quadratique moyenne σ_0. Soit η la densité spectrale unilatérale de puissance du bruit incident $n(t)$, et soit $\underline{H}(f)$ la fonction de transfert du filtre de la figure 32. Afin de déterminer $H(f)$, supposons que l'on applique à ce filtre une impulsion de Dirac $\delta((t)$ d'intensité I.
Sa transformée de Laplace est I. Le signal de sortie correspondant est un créneau d'amplitude $\dfrac{-I}{RC}$ et de durée T_B (*fig.* 33).

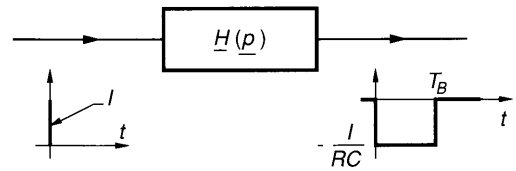


Fig. 33

dont la transformée de Laplace est

$$\int_{0^-}^{T_B} \frac{-I}{RC} e^{-\underline{P}t}\,dt = \frac{-I}{RC}\frac{1 - e^{-\underline{P}T_B}}{\underline{P}}.$$

La fonction de transfert s'écrit donc

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{-I}{RC\underline{P}}\frac{1 - e^{-\underline{P}T_B}}{I} = -\frac{1 - e^{-\underline{P}T_B}}{RC\underline{P}}$$

Sachant que la transmittance complexe $\underline{H}(f)$ est obtenue à partir de la transmittance de Laplace par la transformation $\underline{P} \to 2\pi jf$, il vient :

$$\underline{H}(f) = \frac{-1}{RC}\frac{1 - e^{-2\pi jfT_B}}{2\pi jf} = -\frac{T_B}{RC} e^{-\pi jfT_B}\frac{\sin \pi fT_B}{\pi fT_B}.$$

Nous avons vu au paragraphe 5 du chapitre 3 que le bruit à l'entrée du filtre peut être écrit sous la forme $n(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta}\cos[\varphi_n(t)]$. Le filtre de transmittance $\underline{H}(f)$ peut être considéré comme résultant de la mise en parallèle d'une infinité de filtres passe bande décalés de df_x, de bande passante df_x, de valeur maximale $|\underline{H}(f_x)|$ et centrés sur f_x (*fig.* 34).

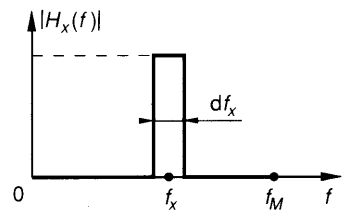


Fig. 34

Le signal de bruit à la sortie d'un filtre élémentaire s'écrit $n_x(t) = \sqrt{F}\sqrt{\eta}\,|\underline{H}(f_x)|\cos[\varphi_{nx}(t)]$ avec $\overline{\cos^2[\varphi_{nx}(t)]} = \dfrac{df_x}{F}$.

Il développe la puissance normalisée

$$\overline{n_x^2(t)} = F\eta\,|\underline{H}^2(f_x)|\,\overline{\cos^2\,[\varphi_{nx}(t)]}$$

$$= F\eta\,|\underline{H}(f_x)|^2\,\frac{\mathrm{d}f_x}{F} = \eta\,|\underline{H}(f_x)|^2\,\mathrm{d}f_x$$

Les signaux de bruit à la sortie des filtres élémentaires étant indépendants, la puissance normalisée de bruit à la sortie du filtre de transmittance $\underline{H}(f)$ s'écrit :

$$N_0 = \int_0^\infty \eta\,|\underline{H}(f_x)|^2\,\mathrm{d}f_x$$

$$= \int_0^\infty \eta\,\frac{T_B^2}{R^2C^2}\left(\frac{\sin\,\pi f_x T_B}{\pi f_x T_B}\right)^2\,\mathrm{d}f_x$$

En posant $\pi f_x T_B = x$, il vient :

$$N_0 = \frac{\eta T_B}{\pi R^2C^2}\int_0^\infty \frac{\sin^2\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sachant que $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin\,x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons $N_0 = \dfrac{\eta T_B}{2R^2C^2}$.

$n_i(t)$ étant un processus ergodique, la variance σ_0^2 de l'événement $n_i(T_B)$, est égale à la puissance normalisée N_0 du processus $n_i(t)$ soit

$$\sigma_0^2 = N_0 = \frac{\eta T_B}{2R^2C^2}.$$

Sachant que $n_i(T_B)$ est une variable aléatoire gaussienne, la probabilité pour que $n_i(T_B)$ soit compris entre s et $s + \mathrm{d}s$ est $p_i(s)\,\mathrm{d}s$ avec $p_i(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2\sigma_0^2}}\,\mathrm{d}s$.

De plus, à l'instant $t = T_B$, le signal utile $s_i(T_B)$ est égal à $-\dfrac{VT_B}{RC}$ pour un « 1 » et à $\dfrac{VT_B}{RC}$ pour un « 0 ». Il est ainsi naturel de décider que l'on détecte un « 1 » si $s_i(T_B) + n_i(T_B) < 0$ et un « 0 » si $s_i(T_B) + n_i(T_B) > 0$.

Il est donc possible de commettre une erreur si $n_i(T_B)$ est supérieur à $\dfrac{VT_B}{RC}$. La probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$P_e = \int_{\frac{VT_B}{RC}}^\infty p_i(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\frac{VT_B}{RC}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2\sigma_0^2}}\,\mathrm{d}s$$

où en posant $\dfrac{s}{\sqrt{2}\sigma_0} = x$,

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{VT_B}{RC\sqrt{2}\sigma_0}}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

A l'aide de la fonction $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_\alpha^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = erf_C(\alpha)$, la probabilité d'erreur s'écrit

$$P_e = \frac{1}{2}\,erf_C\left(\frac{VT_B}{RC\sqrt{2}\sigma_0}\right).$$

Sachant que la valeur quadratique moyenne σ_0, s'exprime, en fonction de la densité spectrale de puissance η par : $\sigma_0^2 = \dfrac{\eta T_B}{2(RC)^2}$, il vient :

$$\boldsymbol{P_e = \frac{1}{2}\,erf_C\left(V\sqrt{\frac{T_B}{\eta}}\right).}$$

REMARQUES

a) La fonction $erf_C(\alpha)$ décroissant rapidement avec α, nous vérifions que la probabilité d'erreur diminue lorsque la densité spectrale de puissance du bruit diminue.

b) Sans filtrage la probabilité d'erreur s'établit à $\dfrac{1}{2}\,erf_C\left(\dfrac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ et dépend de l'amplitude V des motifs alors qu'avec le filtre de la figure 32, la probabilité d'erreur $\dfrac{1}{2}\,erf_C\left(V\sqrt{\dfrac{T_B}{\eta}}\right)$ dépend de l'énergie normalisée V^2T_B d'un motif.

c) Par comparaison des probabilités d'erreur sans filtrage $\left[\dfrac{1}{2}\,erf_C\left(\dfrac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$ et avec filtrage $\left[\dfrac{1}{2}\,erf_C\left(V\sqrt{\dfrac{T_B}{\eta}}\right)\right]$, nous pouvons conclure que tout se passe comme si la relation entre la valeur quadratique moyenne σ du bruit, et la valeur η de sa densité spectrale de puissance, était donnée par la formule $V\sqrt{\dfrac{T_B}{\eta}} = \dfrac{V}{\sqrt{2}\sigma}$ soit $\dfrac{\sigma^2}{\eta} = \dfrac{1}{2T_B}$.

Sachant (voir la remarque du paragraphe 4.1), que l'on définit une bande passante B de bruit par $B = \dfrac{\sigma^2}{\eta}$, l'effet du filtrage de la figure 32, est identique à celui que l'on obtiendrait en faisant passer le bruit, et uniquement le bruit à travers un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est $f_C = \dfrac{1}{2T_B}$ (fig. 35).

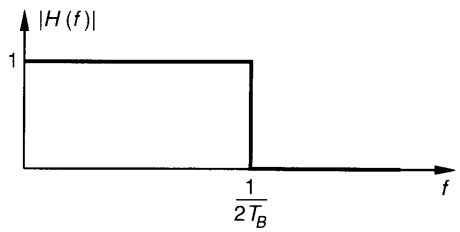


Fig. 35

4.3. RÉCEPTION DU SIGNAL N-R-Z P-S-K COHÉRENT

4.3.1. Principe du démodulateur

Le signal N-R-Z P-S-K s'écrit :

$$v(t) = Vm(t) \sin 2\pi F_C t$$

avec $m(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour un « 1 »} \\ -1 & \text{pour un « 0 »} \end{cases}$.

Le schéma de principe du démodulateur est donné à la figure 36.

Le signal reçu $Vm(t) \sin 2\pi F_C t$ est multiplié par le signal $V \sin 2\pi F_C t$ fourni par un oscillateur local.

L'intégrateur, dont la sortie est remise à zéro au début de chaque motif, fonctionne sur le même principe que celui de la figure 32.

Le signal $s(t)$ à la sortie du multiplicateur s'écrit (k étant la constante du multiplicateur)

$$s(t) = kV^2 m(t) \sin^2 2\pi F_C t$$
$$= \frac{kV^2}{2} m(t)[1 - \cos 4\pi F_C t]$$

En prenant comme origine des temps le début d'un motif et sachant que la tension de sortie de l'intégrateur $s_i(t)$ est remise à zéro au début de chaque motif, l'échantillon $s_i(T_B)$ s'écrit :

$$s_i(T_B) = -\frac{1}{RC} \int_0^{T_B} s(t)\, dt$$
$$= -\frac{1}{RC} \int_0^{T_B} k \frac{V^2}{2} m(t)[1 - \cos 4\pi F_C t]\, dt.$$

$m(t)$ restant constant (et égal à ± 1) pendant toute la durée T_B d'un motif, il vient

$$s_i(T_B) = -\frac{kV^2}{2RC} m(t) \left[T_B - \frac{\sin 2 (2\pi F_C T_B)}{2 \,.\, 2\pi F_C} \right]$$

De plus, nous avons supposé (*paragraphe* 3.2) que la modulation N-R-Z P-S-K est une modulation cohérente ce qui signifie que la fréquence F_C de la porteuse est un multiple entier du rythme digital $\frac{1}{T_B}$, c'est-à-dire $F_C = \frac{k}{T_B}$, ce qui conduit à :

$$\sin (2 \times 2\pi F_C T_B) = \sin 2 \times 2k\pi = 0,$$

et $$s_i(T_B) = -\frac{kV^2}{2RC} m(t) T_B.$$

Ainsi pour la transmission d'un « 1 », $m(t) = +1$ et $s_i(T_B) = -\frac{kV^2}{2RC} T_B$ et pour un « 0 », $m(t) = -1$ et $s_i(T_B) = \frac{kV^2}{2RC} T_B$. Il est alors naturel de choisir 0 comme niveau de décision et de dire que l'on a détecté un « 1 » si $s_i(T_B)$ est négatif et un « 0 » si $s_i(T_B)$ est positif.

4.3.2. Probabilité d'erreur

Si le signal reçu est dégradé par le bruit $n(t)$, le signal N-R-Z P-S-K bruité s'écrit

$$v(t) + n(t) = Vm(t) \sin 2\pi F_C t + n(t).$$

Le signal à la sortie du multiplicateur comprend :

- le signal utile $kV^2 m(t) \sin^2 2\pi F_C t$;
- le signal de bruit $kVn(t) \sin 2\pi F_C t$. Nous admettrons que c'est un processus gaussien.

— Sa valeur moyenne est nulle car $n(t)$ est une variable aléatoire et la valeur moyenne de $\sin 2\pi F_C t$ est nulle.

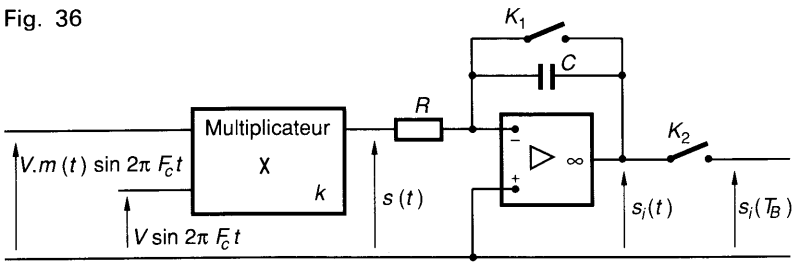
— Si η est la densité spectrale de puissance de $n(t)$, la densité spectrale de puissance de $n(t) \,.\, \sin 2\pi F_C t$ est $\frac{\eta}{2}$. En effet nous avons montré (paragraphe 5 du chapitre 3) que le bruit pouvait être écrit sous la forme

$$n(t) = \sqrt{F} \sqrt{\eta} \cos [\varphi_n(t)]$$

ce qui conduit à écrire :

$$n(t) \sin 2\pi F_C t = \sqrt{F} \sqrt{\eta} \sin 2\pi F_C t \cos [\varphi_n(t)]$$
$$= \sqrt{F} \sqrt{\frac{\eta}{4}} [\sin [2\pi F_C t + \varphi_n(t)]$$
$$+ \sin [2\pi F_C t - \varphi_n(t)]].$$

Fig. 36



Le bruit résultant apparaît ainsi comme la superposition de deux processus aléatoires indépendants de densité spectrale de puissance égale à $\frac{\eta}{4}$ et décalés en fréquence respectivement de $+ F_C$ et $- F_C$. Le bruit résultant de la somme de ces deux processus indépendants possède une densité spectrale de puissance égale à $2\frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}$.

Le bruit à l'entrée de l'intégrateur possède donc une densité spectrale de puissance $\eta_s = k^2V^2\frac{\eta}{2}$.

L'étude de l'intégrateur (4.2.2 de ce chapitre) a montré que la variance σ_0^2 du signal de bruit en sortie de l'intégrateur s'exprime en fonction de la densité spectrale de puissance η_s du signal de bruit à l'entrée de l'intégrateur par : $\sigma_0^2 = \frac{\eta_s T_B}{2(RC)^2}$, puis, compte tenu de $\eta_s = \frac{k^2V^2}{2}\eta$, $\sigma_0^2 = \frac{k^2V^2\eta T_B}{4(RC)^2}$.

σ_0^2 est la variance de la variable gaussienne $n_i(T_B)$ à la sortie de l'intégrateur.

Sachant que l'on commet une erreur si l'échantillon de bruit $n_i(T_B)$ est supérieur à la valeur du signal utile $s_i(T_B) = \frac{kV^2}{2RC}T_B$, la probabilité d'erreur s'écrit

$$P_e = \int_{\frac{kV^2}{2RC}T_B}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{s^2}{2\sigma_0^2}} ds$$

En effectuant le changement de variables $x = \frac{s}{\sqrt{2}\,\sigma_0}$, il vient :

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{kV^2T_B}{2RC\sqrt{2}\sigma_0}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2} erf_C\left[\frac{kV^2T_B}{2RC\sqrt{2}\sigma_0}\right].$$

Compte tenu de $\sigma_0^2 = \frac{k^2V^2T_B}{4(RC)^2}\eta$, la probabilité d'erreur s'écrit :

$$P_e = \frac{1}{2} erf_C\left[V\sqrt{\frac{T_B}{2\eta}}\right]$$

REMARQUE

La modulation N-R-Z P-S-K que nous avons envisagée est cohérente et un motif comprend un nombre entier de périodes d'une sinusoïde d'amplitude V et de fréquence F_C, c'est-à-dire $F_C = \frac{k}{T_B}$.

L'énergie normalisée E_B d'un motif s'écrit :

$$E_B = \int_0^{T_B} V^2 \sin^2 2\pi F_C t\, dt$$
$$= \frac{V^2}{2}\int_0^{T_B}(1 - \cos 4\pi F_C t)\, dt$$
$$= \frac{V^2}{2}\left(T_B - \frac{\sin 4\pi F_C T_B}{4\pi F_C}\right)$$

L'égalité $F_C = \frac{k}{T_B}$ conduit à $\sin(4\pi F_C T_B) = 0$, soit :

$E_B = \frac{V^2T_B}{2}$.

Comme pour la transmission en bande de base, la probabilité d'erreur du signal N-R-Z P-S-K cohérent s'exprime en fonction de l'énergie E_B d'un motif, par

$$P_e = \frac{1}{2} erf_C\left[\sqrt{\frac{E_B}{\eta}}\right]$$

4.3.3. Reconstitution de la porteuse

Le modulateur de la figure 36 suppose que l'on dispose, à la réception, de la porteuse $V \sin 2\pi F_C t$. Elle peut être reconstituée, à partir du signal N-R-Z P-S-K, $v(t) = Vm(t) \sin 2\pi F_C t$, par le dispositif de la figure 37. En sortie du multiplicateur le signal $u(t)$ s'écrit

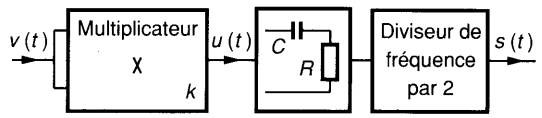


Fig. 37

$$u(t) = kV^2m^2(t) \sin^2 2\pi F_C t.$$

Sachant que $m(t) = \pm 1$, il vient

$$u(t) = \frac{kV^2}{2}(1 - \cos 4\pi F_C t).$$

Après élimination de la composante continue et par division de fréquence par 2, le signal de sortie s'écrit $V_S \cos 2\pi F_C t$. On reconstitue ainsi un signal sinusoïdal de même fréquence que la porteuse.

4.3.4. Influence d'une synchronisation imparfaite

Revenons sur le démodulateur de la figure 36 et supposons que la porteuse reconstituée par le récepteur s'écrive $V \sin(2\pi F_C t + \varphi)$ au lieu de $V \sin 2\pi F_C t$.

A la sortie du multiplicateur, le signal $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = kV^2 m(t) \sin 2\pi F_C t \sin (2\pi F_C t + \varphi)$$
$$= \frac{kV^2}{2} m(t) [\cos \varphi - \cos (4\pi F_C t + \varphi)].$$

Après intégration de 0 à T_B et compte tenu de $\sin (4\pi F_C T_B + \varphi) = \sin \varphi$, il vient :

$$s_i(T_B) = \frac{-kV^2}{2RC} m(t) T_B \cos \varphi$$

au lieu de $-\frac{kV^2}{2RC} m(t) T_B$.

Tout se passe comme si V était remplacé par

$$V\sqrt{\cos \varphi}$$

et la probabilité d'erreur s'écrit

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left[V\sqrt{\frac{T_B \cos \varphi}{2\eta}}\right].$$

P_e augmente avec φ pour atteindre 50 % pour $\varphi = 90°$.

La valeur typique de la probabilité d'erreur varie de 10^{-4} à 10^{-7}. Pour ces valeurs un déphasage de $\varphi = 25°$ provoque une multiplication de la probabilité d'erreur par un facteur 10.

4.4. RÉCEPTION DU SIGNAL N-R-Z F-S-K INCOHÉRENT

4.4.1. Principe du démodulateur

Le signal N-R-Z F-S-K s'écrit

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) = V \sin 2\pi(F_C + \Delta F)t \\ \qquad\qquad \text{pour un « 1 »} \\ v_2(t) = V \sin 2\pi(F_C - \Delta F)t \\ \qquad\qquad \text{pour un « 0 »} \end{cases}$$

Le schéma de principe du démodulateur est donné à la figure 38.

L'intégrateur, dont la sortie est remise à zéro au début de chaque motif, fonctionne sur le même principe que celui de la figure 32.

Le signal N-R-Z F-S-K, qui est égal à $v_1(t)$ pour un « 1 » et a $v_2(t)$ pour un « 0 » est multiplié par $v_1(t) - v_2(t)$. Le signal $s(t)$ s'établit à

$$s(t) = \begin{cases} k[v_1(t) - v_2(t)]v_1(t) \\ = k[v_1^2(t) - v_1(t)v_2(t)] \quad \text{pour un « 1 »} \\ k[v_1(t) - v_2(t)]v_2(t) \\ = k[-v_2^2(t) + v_1(t)v_2(t)] \quad \text{pour un « 0 »,} \end{cases}$$

soit :

$$s(t) = \frac{kV^2}{2} [1 - \cos 4\pi(F_C + \Delta F)t$$
$$- \cos 4\pi \Delta F t + \cos 4\pi F_C t] \quad \text{pour un « 1 »}$$

et

$$s(t) = \frac{kV^2}{2} [-1 + \cos 4\pi(F_C - \Delta F)t$$
$$+ \cos 4\pi \Delta F t - \cos 4\pi F_C t] \quad \text{pour un « 0 ».}$$

Après intégration entre les instants 0 (début d'un motif) et T_B (durée d'un motif)

$$s_i(T_B) = \frac{-kV^2 T_B}{2RC}\left[1 - \frac{\sin 4\pi(F_C + \Delta F)T_B}{4\pi(F_C + \Delta F)T_B}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin 4\pi \Delta F T_B}{4\pi \Delta F T_B} + \frac{\sin 4\pi F_C T_B}{4\pi F_C T_B}\right] \quad \text{pour un « 1 »}$$

et

$$s_i(T_B) = \frac{-kV^2 T_B}{2RC}\left[-1 + \frac{\sin 4\pi(F_C - \Delta F)T_B}{4\pi(F_C - \Delta F)T_B}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin 4\pi \Delta F T_B}{4\pi \Delta F T_B} - \frac{\sin 4\pi F_C T_B}{4\pi F_C T_B}\right] \quad \text{pour un « 0 ».}$$

L'offset de fréquence ΔF est en général très faible par rapport à la fréquence centrale F_C; de plus, la durée T_B d'un motif est telle $F_C T_B \gg 1$, ce qui signifie qu'un motif comprend un grand nombre de périodes de la sinusoïde porteuse. Sachant que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ décroît rapidement avec x, nous pouvons négliger, dans l'expression de $s_i(T_B)$, les

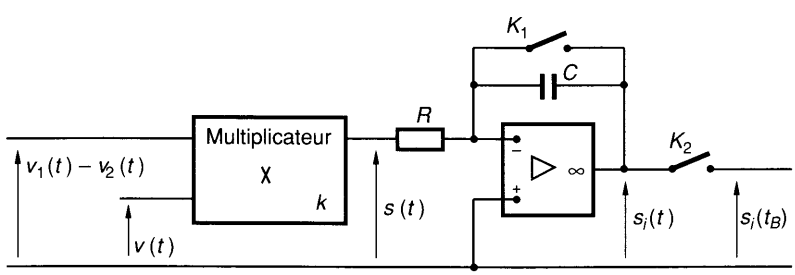


Fig. 38

termes $\frac{\sin 4\pi(F_C + \Delta F)T_B}{4\pi(F_C + \Delta F)T_B}$, $\frac{\sin 4\pi(F_C - \Delta F)T_B}{4\pi(F_C - \Delta F)T_B}$ et $\frac{\sin 4\pi F_C T_B}{4\pi F_C T_B}$, soit :

$$s_i(T_B) \approx \frac{-kV^2T_B}{2RC}\left[1 - \frac{\sin 4\pi\,\Delta F T_B}{4\pi\,\Delta F T_B}\right]$$

pour un « 1 »

et

$$s_i(T_B) \approx \frac{kV^2T_B}{2RC}\left[1 - \frac{\sin 4\pi\,\Delta F T_B}{4\pi\,\Delta F T_B}\right]$$

pour un « 0 ».

Afin de différencier les valeurs de $s_i(T_B)$ correspondant aux motifs « 0 » et « 1 », il faut rendre maximum le crochet $\left[1 - \frac{\sin 4\pi\,\Delta F T_B}{4\pi\,\Delta F T_B}\right]$, en choisissant la durée T_B d'un motif telle que $4\pi\,\Delta F T_B = \frac{3\pi}{2}$, soit $\Delta F = \frac{3}{8T_B}$.

Il vient alors :

$$s_i(T_B) \approx \frac{-kV^2T_B}{2RC}\left[1 + \frac{1}{4\pi\,\Delta F T_B}\right]$$
$$= \frac{-kV^2T_B}{2RC}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\right] \approx -0{,}6\,\frac{kV^2T_B}{RC}$$

pour un « 1 »

et

$$s_i(T_B) \approx \frac{kV^2T_B}{2RC}\left[1 + \frac{1}{4\pi\,\Delta F T_B}\right]$$
$$= \frac{+kV^2T_B}{2RC}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\right] \approx +0{,}6\,\frac{kV^2T_B}{RC}$$

pour un « 0 ».

Il est ainsi naturel de choisir 0 comme niveau de décision.

REMARQUE

Il est possible de choisir, F_C, ΔF et T_B de telle sorte que tous les termes en $\frac{\sin x}{x}$ de $s_i(T_B)$ soient nuls. Par exemple, pour $F_C = 1\,800$ Hz, $\Delta F = 600$ Hz, et $\frac{1}{T_B} = 2\,400$ Hz, il vient

$$4(F_C + \Delta F)T_B = 4,\quad 4(F_C - \Delta F)T_B = 2,$$
$$4F_CT_B = 3 \quad et \quad 4\,\Delta F T_B = 1,$$

ce qui conduit à $v_0(T_B) = \frac{kV^2T_B}{2RC}$ pour un « 0 » et $-\frac{kV^2T_B}{2RC}$ pour un « 1 ».

4.4.2. Probabilité d'erreur

Si le signal reçu est dégradé par le bruit $n(t)$, il apparaît en sortie du multiplicateur de la figure 38, le signal de bruit.

$$kn(t)[v_1(t) - v_2(t)] = kn(t)V[\sin 2\pi(F_C + \Delta F)t - \sin 2\pi(F_C - \Delta F)t].$$

Soit η la densité spectrale de puissance du signal $n(t)$. Chacun des processus aléatoires

$$n(t)\sin 2\pi(F_C + \Delta F)t$$

et $n(t)\sin 2\pi(F_C - \Delta F)t$ possède une densité spectrale de puissance égale à $\frac{\eta}{2}$ (voir paragraphe 4.3.2). Le signal de bruit $n(t)[v_1(t) - v_2(t)]$ développe ainsi une densité spectrale de puissance égale à η.

La variance σ_0^2 du signal de bruit $n_0(t)$ en sortie de l'intégrateur s'établit donc à

$$\sigma_0^2 = k^2V^2\eta\,\frac{T_B}{2(RC)^2} \quad \text{(voir paragraphe 4.2.2).}$$

Sachant que l'on commet une erreur si l'échantillon de bruit $n_i(T_B)$ est supérieur à l'amplitude du signal utile $s_i(T_B) = 0{,}6\,\frac{kV^2T_B}{RC}$, la probabilité d'erreur s'établit à

$$P_e = \int_{0{,}6\frac{kV^2T_B}{RC}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-\frac{s^2}{2\sigma_0^2}}\,ds.$$

Après le changement de variable $x = \frac{s}{\sqrt{2}\sigma_0}$, il vient :

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{0{,}6kV^2T_B}{\sqrt{2}\sigma_0 RC}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,erfc\left[\frac{0{,}6kV^2T_B}{\sqrt{2}\sigma_0 RC}\right].$$

Compte tenu de la relation $\sigma_0^2 = \frac{k^2V^2\eta T_B}{2(RC)^2}$, la probabilité d'erreur s'écrit

$$\boldsymbol{P_e = \frac{1}{2}\,erfc\left[0{,}6V\sqrt{\frac{T_B}{\eta}}\right].}$$

Par comparaison des probabilités d'erreur des signaux N-R-Z P-S-K cohérent et N-R-Z F-S-K incohérent, il apparaît que la transmission N-R-Z P-S-K cohérente est plus fiable que la transmission N-R-Z F-S-K incohérente.

4.4.3. Reconstitution des porteuses

Nous avons vu (paragraphe 3.1) que le signal N-R-Z F-S-K contient deux raies aux fréquences $F_1 = F_C + \Delta F$ et $F_0 = F_C - \Delta F$, il est donc possible à l'aide de deux boucles à verrouillage de phase respectivement calées sur les fréquences F_1 et F_0, de reconstituer les sinusoïdes

$$v_1(t) = V \sin 2\pi(F_C + \Delta F)t$$

et $v_2(t) = V \sin 2\pi(F_C - \Delta F)t$ puis le signal $v_1(t) - v_2(t)$ de la figure 38.

4.5. RÉCUPÉRATION DU RYTHME DIGITAL

Le filtre intégrateur de la figure 32 qui apparaît dans les systèmes de réception que nous avons envisagés impose que les interrupteurs K_1 et K_2 soient fermés respectivement au début et à la fin de chaque motif, ce qui suppose une reconstitution exacte du rythme digital.

Dans le cas du signal **R-Z 50 %,** la décomposition spectrale présente une composante discrète à la fréquence $\frac{1}{T_B}$. Il est ainsi possible d'accrocher sur cette composante une boucle de verrouillage de phase qui restitue le rythme digital, à condition que le nombre de zéros successifs ne soit pas trop élevé.

Dans le cas des signaux **biphase** et **N-R-Z,** il n'y a pas de composante discrète à la fréquence $\frac{1}{T_B}$. On peut alors procéder par dérivation et redressement comme l'indique la figure 39.

Une boucle à verrouillage de phase est ensuite accrochée sur le signal dérivé et redressé. La récupération du rythme digital est plus facile avec le code biphase qu'avec le code N-R-Z. En effet, après redressement, il y a au moins une impulsion par période dans le signal biphase ce qui n'est pas le cas pour le signal N-R-Z lorsque plusieurs motifs identiques se succèdent. La composante spectrale discrète disparaît momentanément ce qui risque de provoquer un déverrouillage de la boucle.

Pour le signal N-R-Z P-S-K **cohérent,** le rythme digital est un sous-multiple de la fréquence F_C de la porteuse $\left(F_C = \frac{k}{T_B}\right)$. Il est donc possible de le récupérer par division de fréquence à partir de la porteuse.

Pour le signal N-R-Z F-S-K **incohérent,** on peut imaginer une semi cohérence dans laquelle le rythme digital serait un sous-multiple d'une des fréquences $F_C - \Delta F$ où $F_C + \Delta F$.

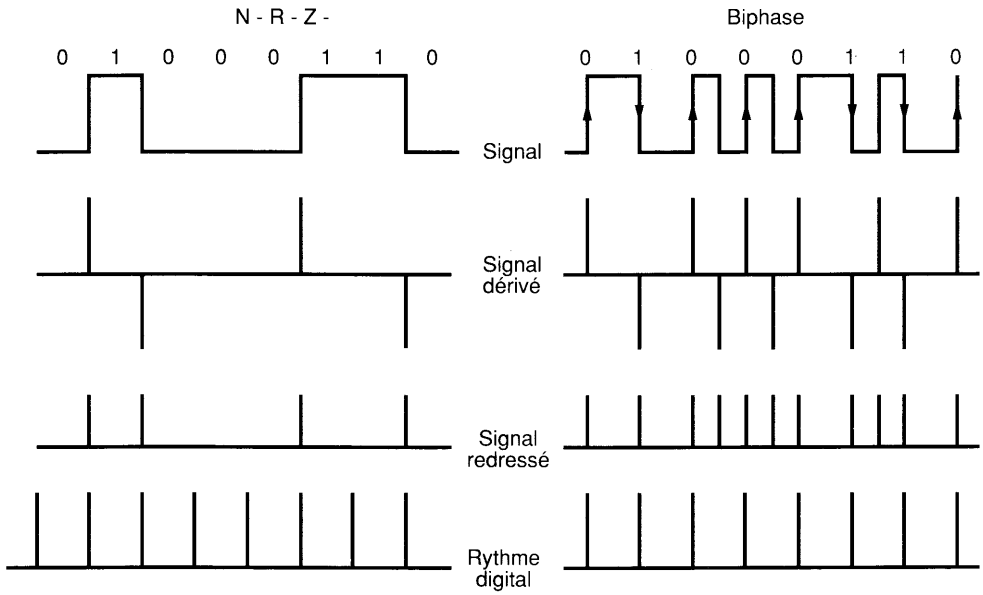


Fig. 39

5. RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Nous avons vu (paragraphe 2.1) que le signal $m(t)$ est codé en partageant la plage de variations en $M = 2^N$ niveaux de quantification (*fig.* 40). Si S_0 est le pas de quantification, la plage de variations s'étend de 0 à $(M-1)S_0$.

Chaque échantillon est codé sur N bits.

Nous avons montré que la quantification introduit une erreur dont la valeur quadratique moyenne est $\frac{S_0^2}{12}$.

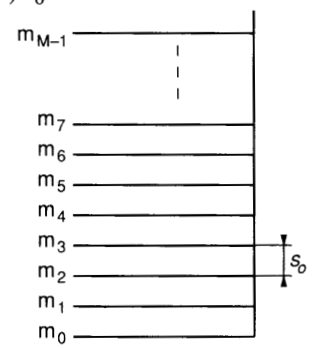


Fig. 40

Supposons que le signal $m(t)$ encombre de manière identique tous les niveaux de la plage de variations entre 0 et $(M-1)S_0$. La possibilité pour que $m(t)$ soit compris entre m et $m + \mathrm{d}m$ s'écrit alors $P\ \mathrm{d}m$ où P est une constante telle que

$$\int_0^{(M-1)S_0} P\ \mathrm{d}m = 1, \quad \text{soit} \quad P = \frac{1}{(M-1)S_0}.$$

Le carré de la valeur quadratique moyenne du signal $m(t)$ s'écrit

$$\overline{m^2(t)} = \int_0^{(M-1)S_0} m^2 P\ \mathrm{d}m = \frac{1}{(M-1)S_0}\left[\frac{m^3}{3}\right]_0^{(M-1)S_0} = \frac{(M-1)^2 S_0^2}{3}.$$

Si le bruit de quantification est la seule dégradation apportée au signal dans la transmission, le rapport signal sur bruit s'écrit :

$$\text{S-N-R} = \frac{\text{Puissance normalisée du signal}}{\text{Puissance normalisée du bruit}} = \frac{(M-1)^2 S_0^2/3}{S_0^2/12} = 4(2^N - 1)^2.$$

Il ne dépend que du nombre de bits utilisés pour la quantification du signal et peut ainsi être défini une fois pour toutes à la conception.

Cependant nous avons vu que, si le signal numérique est entaché de bruit à la réception, il est possible de commettre des erreurs, dont la probabilité P_e a été calculée dans chaque cas. Ces erreurs constituent une source de bruit supplémentaire.

Chaque échantillon est codé sur N bits et peut être écrit sous la forme :

$$m(kT_e) = S_0[\varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + \ldots + \varepsilon_{N-1} 2^{N-1}]$$

où les éléments binaires $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{N-1}$ prennent les valeurs 0 où 1.

A la réception, l'erreur de décision peut apparaître avec la même probabilité sur chacun des éléments binaires $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{N-1}$. Si elle se produit sur ε_0, elle entraîne une erreur S_0 sur la valeur de l'échantillon. Si elle se produit sur ε_{N-1}, elle entraîne une erreur $2^{N-1}S_0$.

Pour le signal $m(t)$, ces erreurs se traduisent par un bruit supplémentaire dont le carré de la valeur quadratique moyenne s'écrit :

$$S_0^2 P_e[(2^0)^2 + (2^1)^2 + \ldots + (2^{N-1})^2].$$

Sachant que la somme des termes de la progression géométrique

$$[(2^0)^2 + (2^1)^2 + \ldots + (2^{N-1})^2] \quad \text{s'écrit} \quad \frac{2^{2N}-1}{3},$$

le carré de la valeur quadratique moyenne du bruit d'erreur devient :

$$S_0^2 P_e \frac{2^{2N}-1}{3}.$$

En tenant compte du bruit de quantification et du bruit d'erreur, le rapport signal sur bruit s'écrit

$$\text{S-N-R} = \frac{(2^N-1)^2 S_0^2/3}{S_0^2/12 + S_0^2 P_e(2^{2N}-1)/3} \quad \text{soit}$$

$$\textbf{S-N-R} = \frac{\mathbf{4(2^N-1)^2}}{\mathbf{1 + 4P_e(2^{2N}-1)}}.$$

REMARQUE

On peut définir un seuil de bon fonctionnement du système, pour lequel le bruit d'erreur est juste égal au bruit de quantification, ce qui permet de définir une probabilité d'erreur maximum :

$$4P_e(2^{2N}-1) < 1 \quad \textit{soit} \quad P_e < \frac{1}{4(2^{2N}-1)}.$$

Pour $N = 8$, on obtient $P_e < 3{,}8 \times 10^{-6}$, ce qui correspond aux valeurs adoptées en pratique.

EXERCICES

1. Un système de transmission numérique utilise pour coder les **0** et les **1** des motifs de durée T_B conformément à la figure 1.

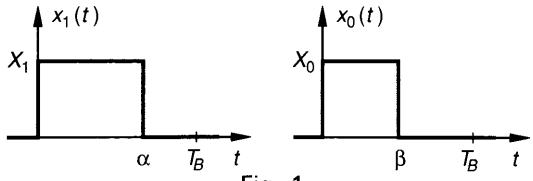


Fig. 1

A un **1** correspond le motif $x_1(t)$ et à un **0** le motif $x_0(t)$.

On pose $c(t) = \dfrac{x_1(t) + x_0(t)}{2}$ et $d(t) = \dfrac{x_1(t) - x_0(t)}{2}$, c'est-à-dire, $x_1(t) = c(t) + d(t)$ et $x_0(t) = c(t) - d(t)$.

Le signal numérique $s(t)$ peut ainsi être décomposé en une partie **commune** $u(t)$ périodique et une partie purement aléatoire $v(t)$.

1° On considère le signal numérique représentatif de la suite 1; 0; 0; 1; 0; 1; 1; ... dessiner les forme des signaux $s(t)$, $u(t)$, $v(t)$ dans le cas où

$$X_1 = X_0 = X, \quad \alpha = \frac{2}{3} T_B, \quad \beta = \frac{1}{3} T_B.$$

Montrer que le signal aléatoire $v(t)$ est constitué de créneaux de durée $\alpha - \beta$ et d'amplitude $\dfrac{X}{2}$ pour un **1** et $-\dfrac{X}{2}$ pour un **0**. Montrer que les motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ correspondant, sur $v(t)$, respectivement à un **1** et à **0** sont tels que $s_0(t) = -s_1(t)$. Conclure.

2° Un signal N-R-Z polaire est défini par les motifs $x_1(t)$ et $x_0(t)$ de la figure 2.

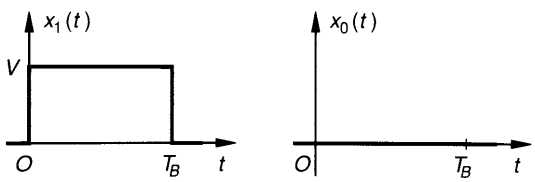


Fig. 2

a) Quelles sont les valeurs correspondantes de α et β.

b) Sachant que les **0** et les **1** sont équiprobables, calculer la puissance normalisée du signal numérique $s(t)$.

c) Dessiner la forme de la séquence périodique $u(t)$. Montrer qu'elle se résume à un signal constant.
Quelle est son amplitude?
Quelle puissance normalisée transporte-t-elle?
Quelle fraction de la puissance normalisée du signal $s(t)$ représente-t-elle?

d) Dessiner les motifs $s_0(t) = -s_1(t)$ correspondant au codage des **0** et des **1** de la partie aléatoire $v(t)$.
Calculer la transformée de Fourier du motif $s_1(t)$. En déduire la densité spectrale de puissance $Gv(f)$ du signal aléatoire $v(t)$. Donner la bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal.

3° Un signal code RZ 50 % est défini par les motifs $x_1(t)$ et $x_0(t)$ de la figure 3.

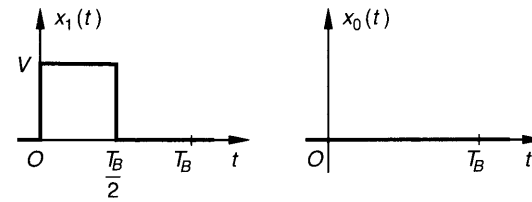


Fig. 3

a) Quelles sont les valeurs correspondantes de α et β.

b) Calculer la puissance normalisée du signal numérique $s(t)$.

c) Dessiner la forme de la séquence périodique $u(t)$ et déterminer ses composantes spectrales.
Quelle est la puissance normalisée transportée par la composante de fréquence $\dfrac{1}{T_B}$? Quelle fraction de la puissance totale du signal $s(t)$ représente-t-elle?

d) Tracer les motifs $s_0(t) = -s_1(t)$ correspondant au codage des **0** et des **1** de la partie aléatoire $v(t)$.
Calculer la densité spectrale de puissance $Gv(f)$ de signal aléatoire $v(t)$. En déduire la bande fréquentielle nécessaire à la transmission du signal.

4° Un câble coaxial permet de transmettre, par multiplexage, 36 communications téléphoniques. Chaque voie est échantillonnée à la fréquence $F_e = 8$ kHz. Chaque échantillon est quantifié sur 128 niveaux de quantification. Chaque bit est transmis par le code binaire RZ 50 %.
Un bit de contrôle est généré après le transfert de chaque niveau de quantification.

a) Quel est le nombre de bits (y compris le bit de contrôle) correspondant à la transmission d'un niveau de quantification?

b) Quel est la fréquence maximale que l'échantillonnage permet de restituer?

c) Quelle est la durée T_B d'un motif.

d) Calculer la bande de fréquence encombrée par le signal numérique $s(t)$.

5° On suppose dans cette question que le signal numérique est transmis à l'aide du code N-R-Z polaire. Au cours de la transmission, le signal utile est affaibli en même temps qu'un signal de bruit $n(t)$ lui est superposé. Ce bruit est supposé blanc et gaussien. A la réception, la puissance normalisée de bruit est σ^2, sa densité de probabilité (probabilité pour que $n(t)$ soit compris entre s et $s + \mathrm{d}s$) est :

$$g_b(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}.$$

A la réception, l'amplitude d'un motif utile est A.

a) On prend un échantillon par bit et on compare sa valeur au seuil $\dfrac{A}{2}$. Déterminer, en fonction du rapport $\dfrac{A}{\sigma}$ et de la fonction d'erreur complémentaire :

$$erf_C(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x,$$

la probabilité d'erreur P_e.

La longueur de la ligne coaxiale est de 5,5 km. Elle introduit un affaiblissement de 20 db/km. L'amplitude des signaux émis a l'origine de la ligne vaut 5 volts.
Le bruit a une densité spectrale de puissance

$$\eta = 10^{-12}\ \mathrm{V^2/MHz}.$$

La bande passante équivalente de bruit est 100 MHz.
Calculer la puissance normalisée de bruit σ^2 à la réception. Évaluer la probabilité d'erreur P_e à l'aide du graphe de la figure 30.

b) On suppose maintenant que, pendant la durée T_B d'un motif, on prélève n échantillons régulièrement répartis. On additionne tous les échantillons, et on établit la décision en comparant la somme à $n\dfrac{A}{2}$.

α) Montrer, par un raisonnement physique, que, compte tenu de la bande passante de bruit fixée à 100 MHz et de la durée d'un motif fixée à 0,47 μs, on ne peut augmenter indéfiniment le nombre d'échantillons tout en les supposant indépendants. Donner un ordre de grandeur du nombre maximum d'échantillons.

β) Montrer que, si les n échantillons sont indépendants, la puissance normalisée du bruit contenu dans la somme des échantillons est $\sqrt{n}\sigma$. En déduire la probabilité d'erreur en fonction de A, n et σ et de la fonction en f_C.

γ) On donne $n = 20$. Calculer la probabilité d'erreur et la comparer à celle qu'on aurait obtenu en filtrant le signal bruité à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de bande passante minimale compatible avec une transmission N-R-Z. Conclure en admettant que la transmission est acceptable si la probabilité d'erreur P_e est inférieure à 10^{-6}.

2. On désire transmettre deux signaux numériques $a(t)$ et $b(t)$ dont les états **0** ert **1** sont codés par les motifs de la figure 1.

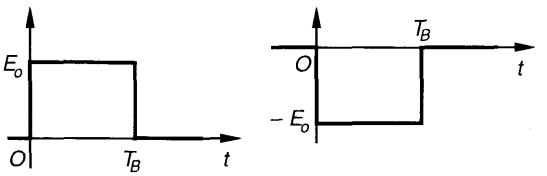


Fig. 1

1° Émission
Le schéma synoptique du modulateur est donné à la figure 2. Il reçoit :

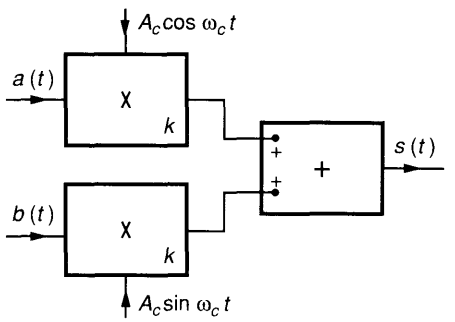


Fig. 2

– la sinusoïde porteuse sous la forme de deux tensions déphasées de $\dfrac{\pi}{2}$

$$A_C \cos \omega_C t \quad \text{et} \quad A_C \sin \omega_C t;$$

– les deux signaux numériques $a(t)$ et $b(t)$ constitués d'une suite aléatoire de **0** et de **1**.

Le modulateur comprend deux multiplicateurs de constante k et un additionneur. De plus la modulation est cohérente $\left(\omega_C = \dfrac{10\pi}{T_B}\right)$.

a) Montrer que le signal de sortie du modulateur, $s(t)$, se met sous la forme

$$s(t) = S \cos [\omega_C t + \varphi].$$

Exprimer S en fonction de k, A_C et E_0 et montrer que la phase φ peut prendre quatre états, que l'on précisera, suivant la valeur des signaux $a(t)$ et $b(t)$.

b) Montrer que le signal $s(t)$ résulte de la superposition de deux signaux N-R-Z P-S-K indépendants.
Calculer sa puissance normalisée.
Calculer sa densité spectrale de puissance. En déduire la bande de fréquence nécessaire à sa transmission.

2° Réception
Le schéma synoptique du démodulateur est donné à la figure 3. Il permet de reconstituer les signaux $a(t)$ et $b(t)$ à partir du signal reçu

$$s(t) = kA_C[a(t) \cos \omega_C t + b(t) \sin \omega_C t].$$

Il est constitué de deux multiplicateurs de constante k et de deux filtres passe-bas.

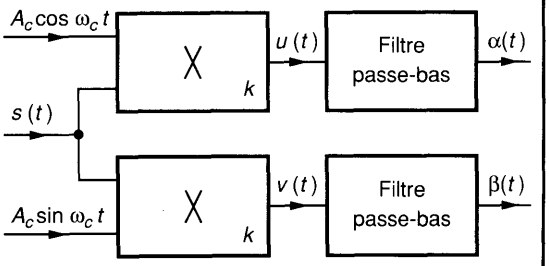


Fig. 3

a) Montrer que les signaux $u(t)$ et $v(t)$ à la sortie des multiplicateurs peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{k^2 A_C^2 E_0}{2}[r(t) + f_1(t) + f_2(t)],$$

où $r(t)$ est un signal N-R-Z, $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont des signaux N-R-Z P-S-K.

b) Déterminer la densité spectrale de puissance des signaux $r(t)$, $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

c) Montrer, compte tenu de la condition $\omega_C = \dfrac{10\pi}{T_B}$, qu'il est possible de caler les filtres passe-bas de façon à restituer par $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les signaux $a(t)$ et $b(t)$.

3° Reconstitution de la porteuse
Le démodulateur de la figure 3 suppose que l'on dispose, à la réception, de la porteuse $A_C \cos \omega_C t$. Elle peut être reconstituée par le dispositif de la figure 4.

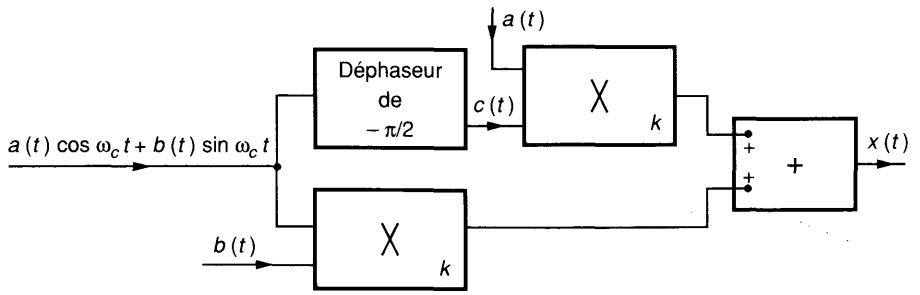


Fig. 4

On néglige le temps de réponse des filtres, et on suppose, qu'après mise en forme, les signaux $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de la figure 3 sont identiques aux signaux $a(t)$ et $b(t)$. Ils sont alors appliqués au dispositif de la figure 4.

a) Montrer que le signal $c(t)$ se met sous la forme

$$c(t) = a(t) \sin \omega_C t - b(t) \cos \omega_C t.$$

En déduire que, théoriquement, le signal $x(t)$ se met sous la forme $x(t) = X \sin \omega_C t$, où X est une constante, que l'on exprimera.

b) En pratique les transitions des signaux $a(t)$ et $b(t)$ ne sont pas instantanées et la tension $x(t)$ issue du dispositif de la figure 4 ne peut pas être utilisée comme porteuse locale. Elle peut cependant être écrite sous la forme $x(t) = v(t) \sin \omega_C t$, où $v(t)$ est une fonction qui reste positive quel que soit t.

Le signal $x(t)$ est alors appliqué à la boucle à verrouillage de phase de la figure 5.

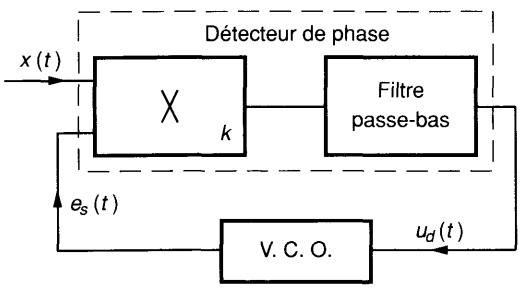


Fig. 5

Elle est constituée par :

- un détecteur de phase comprenant :
  - un multiplieur, de constante k;
  - un filtre passe-bas qui ne laisse passer que les signaux de pulsation très inférieure à $2\omega_C$;
- un V.C.O. qui délivre le signal sinusoïdal :

$$e_s(t) = E_s \cos [\omega_C t + \varphi_s(t)],$$

avec $\dfrac{d\varphi_s}{dt} = K_0 u_d(t)$.

On suppose dans un premier temps que la boucle est attaquée par le signal sinusoïdal

$$x(t) = X \sin [\omega_C t + \varphi_e(t)].$$

La différence $\varphi_e(t) - \varphi_s(t)$ est suffisamment faible pour qu'on puisse admettre :

$$\sin [\varphi_e(t) - \varphi_s(t)] \approx \varphi_e(t) - \varphi_s(t).$$

Montrer que $\varphi_s(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = M[\varphi_e(t) - \varphi_s(t)].$$

Calculer la constante M en fonction de k, K_0, X et E_s.

c) Le signal $x(t)$ est maintenant le signal issus de la figure 4.

α) Établir l'équation différentielle de $\varphi_s(t)$ et montrer que $\varphi_s(t)$ se met sous la forme :

$$\varphi_s = C\, e^{-\frac{kK_0}{2} E_s y(t)},$$

où $y(t) = \int v(t)\, dt$.

β) Montrer, en inversant l'équation $y(t) = \int v(t)\, dt$ que la fonction $y(t)$ est croissante quel que soit t.

En déduire que φ_s tend vers zéro et que l'on peut ainsi reconstituer la porteuse.

4° Le dispositif étudié peut être utilisé pour transmettre un seul signal numérique, $a(t)$ est alors constitué par les échantillons d'ordre pair et $b(t)$ par les échantillons d'ordre impair. Quel est l'intérêt du dispositif?

3e partie

SYSTÈMES DE FILTRAGE

I □ problème général du filtrage

Soit un signal $f(t)$ comprenant plusieurs composantes sinusoïdales. Un filtre (*fig.* 1) est un dispositif dont la fonction de transfert complexe $\underline{T} = \underline{V_2}/\underline{V_1}$ permet d'isoler certaines composantes en éliminant les composantes de fréquence indésirable.

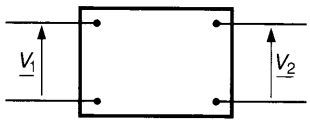


Fig. 1

Suivant la valeur des fréquences transmises nous distinguerons essentiellement :

– les **filtres passe-bas** qui isolent les signaux de fréquence basse;
– les **filtres passe-haut**;
– les **filtres passe-bande** qui favorisent les signaux situés dans une bande de fréquence.

L'étude initiale du filtrage est supportée par un **filtre passe-bas.** Le cas du filtre passe-haut ainsi que celui du filtre passe-bande seront ramenés, par un changement de variables, à l'étude d'un filtre passe-bas.

1. GABARIT

Soit à construire un filtre passe-bas qui ne transmet que les signaux de fréquence inférieure à f_0. La transmittance mesurée en décibels, 20 lg $|\underline{T}|$, doit posséder une valeur minimale a dans la bande de fréquences à transmettre, et une valeur maximale b dans la bande de fréquences à éliminer.

Le problème pratique est traduit, dans le **diagramme de Bode,** par **un gabarit** (*fig.* 2).

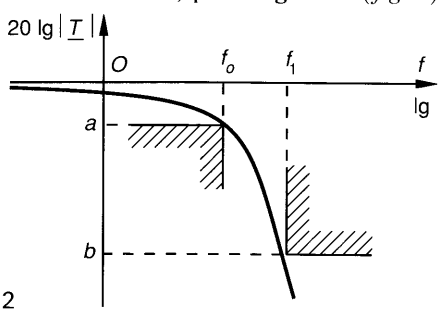


Fig. 2

L'observation du gabarit montre que la courbe 20 lg $|\underline{T}|$, tracée en fonction de la fréquence, doit emprunter un «canal» limité par les valeurs suivantes :

- f_0 *qui est la fréquence de coupure à a décibels;*
- b *qui traduit l'atténuation minimale dans la bande de fréquences à rejeter.*

Globalement le gabarit est caractérisé par deux points dont les coordonnées sont respectivement (f_0, a) et (f_1, b).

2. NORMALISATION

Afin d'établir des résultats valables pour tous les filtres passe-bas, on effectue les changements de variables suivants :

Normalisation des fréquences

On pose

$$\underline{s} = \mathrm{j}\,\frac{f}{f_0} = \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

et on définit la pulsation normalisée x par le module de $\underline{s}$:

$$x = |\underline{s}| = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Ce changement de variables revient à prendre ω_0 comme unité de pulsation. La pulsation normalisée x est alors un nombre sans dimension.

Normalisation des composants

Soit R_C la résistance de charge de filtre (*fig.* 3).

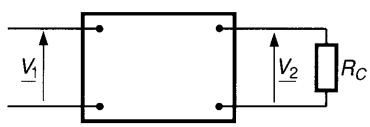


Fig. 3

On définit la résistance normalisée par

$$R_n = \frac{R}{R_C}$$

Ce changement de variable consiste à prendre la résistance R_C comme unité de résistance. La résistance R_n est alors un nombre sans dimension.

REMARQUE

Ce changement de variable, indispensable pour les filtres passifs, est inutile pour l'étude des filtres actifs. En effet la fonction de transfert des filtres passifs dépend de leur résistance de charge, alors que les filtres actifs, réalisés à l'aide d'amplificateurs opérationnels, ont une transmittance indépendante de la résistance de charge R_C.

Les deux normalisations précédentes permettent de définir les unités d'inductance et de capacité.

Pour une inductance, l'impédance $Z = L\omega$ conduit à l'impédance normalisée

$$Z_n = \frac{L\omega}{R_C} = \frac{L\omega_0}{R_C}\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{\frac{R_C}{\omega_0}}\,x.$$

Ce qui amène à définir l'unité d'inductance par :

$$\boxed{L_u = \frac{R_C}{\omega_0}}$$

La valeur normalisée de l'inductance s'écrit ainsi $\boxed{\lambda_n = \frac{L}{L_u}}$.

Pour une capacité, l'impédance $Z = \frac{1}{C\omega}$ conduit à l'impédance normalisée

$$Z_n = \frac{1}{R_C C\omega} = \frac{1}{R_C C\omega_0} \times \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{R_C C\omega_0 \times x}$$

ce qui amène à définir l'unité de capacité par :

$$\boxed{C_u = \frac{1}{R_C \omega_0}}.$$

La valeur normalisée de la capacité s'écrit ainsi

$$\boxed{\gamma_n = \frac{C}{C_u}}$$

3. DIFFÉRENTES FORMES DE RÉPONSE

Après normalisation, le problème du filtrage passe-bas se ramène à la détermination de la transmittance $\underline{T}(\underline{s}) = \underline{T}(\mathrm{j}x)$ telle que 20 lg $|T(x)|$ s'inscrive dans le gabarit normalisé de la figure 4.

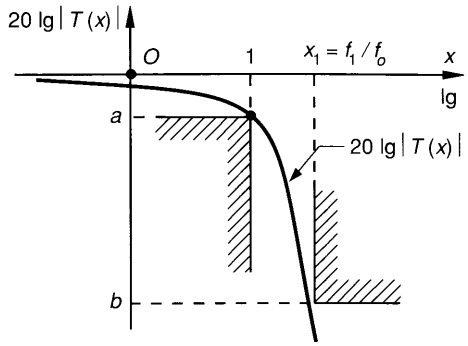


Fig. 4

La résolution commence par la détermination d'une fonction $T(x) = |\underline{T}(\underline{s})|$ qui possède les propriétés suivantes (conformes au gabarit)

- Pour $x = 1$ 20 lg $T(x) = a$
  soit $T(1) = 10^{a/20}$.
- Pour $x < 1$ 20 lg $T(x) \geqslant a$.
- Pour $x > x_1$ 20 lg $T(x) \leqslant b$.

Plusieurs approximations sont possibles. Nous étudierons les réponses de Butterworth et de Chebychev.

3.1. RÉPONSE DE BUTTERWORTH

La fonction $T(x)$ est cherchée sous la forme

$$\boxed{T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}}$$

où ***n* est l'ordre du filtre de Butterworth.**

En d'autres termes, on cherche n tel que la fonction 20 lg $\frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$ s'inscrive dans le gabarit de la figure 4.

- Pour $x = 1$

$$20 \text{ lg } T(x) = 20 \text{ lg } \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ décibels}$$

quel que soit n, toutes les courbes passent par -3 db pour $x = 1$ c'est-à-dire pour $f = f_0$.

- Pour $x < 1$

$$20 \text{ lg } T(x) > 20 \text{ lg } \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ db.}$$

La fréquence de coupure est définie à $a = -3$ db quel que soit n.

Plus n est grand, plus la décroissance de $T(x)$ est forte lorsque x augmente. La coupure est donc

d'autant plus brutale que n est plus grand. Pour satisfaire aux exigences du gabarit, l'ordre n doit vérifier l'inéquation suivante :

$$20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^{2n}}} \leqslant b$$

soit $\quad -10 \lg (1 + x_1^{2n}) \leqslant b$

$x_1^{2n} \geqslant 10^{-\frac{b}{10}} - 1$ ce qui conduit à

$$\boxed{n \geqslant \frac{\lg (10^{-\frac{b}{10}} - 1)}{2 \lg x_1} = \frac{\lg (10^{-\frac{b}{10}} - 1)}{2 \lg \left(\frac{f_1}{f_0}\right)}}$$

La connaissance de l'ordre n permet la détermination complète de la fonction $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$.

Afin de déterminer la transmittance du filtre de Butterworth qui satisfait au gabarit, il faut déterminer une fraction rationnelle $\underline{T}(\underline{s})$ qui admette $T(x)$ pour module. Pour cela, on factorise le polynôme $P(x) = 1 + x^{2n}$ en utilisant les remarques suivantes :

- si n est impair, $x = j$ et $x = -j$ sont deux zéros de $P(x)$;
- le polynôme $P(x)$ est pair : en conséquence, si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $-a - jb$ est aussi un zéro de $P(x)$;
- les coefficients du polynôme $P(x)$ sont réels. En conséquence, si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $a - jb$ est aussi zéro de $P(x)$.

Les deux dernières remarques permettent de conclure que si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $-a + jb$, $-a - jb$, $a - jb$, sont aussi des zéros de $P(x)$. Globalement $P(x) = 1 + x^{2n}$ peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} P(x) = 1 + x^{2n} &= \underset{\text{si } n \text{ est impair}}{(x + j)(x - j)}(x + a + jb) \\ &\quad (x + a - jb)(x - a - jb)(x - a + jb)(... \\ &= \underset{\substack{\text{si } n \text{ est} \\ \text{impair}}}{(1 + x^2)}[(x + a)^2 + b^2][(x - a)^2 + b^2][... \end{aligned}$$

$P(x)$ apparaît ainsi comme le carré du module du polynome en $\underline{s} = jx$

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{s}) &= (1 + jx)[b + j(x + a)][b + j(x - a)][... \\ &= (1 + \underline{s})(b + \underline{s} + ja)(b + \underline{s} - ja)(... \\ &= (1 + \underline{s})[(b + \underline{s})^2 + a^2][... \\ &= \underset{\substack{\text{si } n \text{ est} \\ \text{impair}}}{(1 + \underline{s})}(a^2 + b^2 + 2b\underline{s} + \underline{s}^2)(... \end{aligned}$$

La fonction de transfert normalisée s'écrit ainsi :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + \underline{s})(a^2 + b^2 + 2b\underline{s} + \underline{s}^2)(...}.$$

REMARQUE

$P(x)$ est aussi le carré du module du polynôme :

$$\underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})[b - \underline{s} - ja][b - \underline{s} + ja][...$$

mais cette solution ne peut convenir car elle conduirait à des pôles en $\underline{s} = jx$ dont la partie réelle est positive, entraînant de ce fait l'instabilité du filtre.

Exemple de calcul

Pour $n = 3$, les zéros de $P(x) = 1 + x^6$ sont les racines sixièmes de -1 soit :

$$+j; \quad -j; \quad \cos\frac{\pi}{6} + j \sin\frac{\pi}{6}; \quad \cos\frac{\pi}{6} - j \sin\frac{\pi}{6};$$

$$-\cos\frac{\pi}{6} - j \sin\frac{\pi}{6}; \quad -\cos\frac{\pi}{6} + j \sin\frac{\pi}{6}.$$

Ce qui conduit à

$$\underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + 2b\underline{s} + a^2 + b^2)$$

avec

$$a = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

soit : $\underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + \underline{s} + 1)$.

En pratique

L'expression de $\underline{P}(\underline{s})$ ne dépend que de l'ordre n du filtre. Il est donc inutile de l'établir pour chaque étude de filtre passe-bas.

Les expressions de $\underline{P}(\underline{s})$ sont données par des tables dont on trouvera, page 197, un extrait jusqu'à l'ordre 6.

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-bas du 2e ordre s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2}$$

ou en remplaçant $\underline{s}$ par son expression $\underline{s} = j\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\quad m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707.$

Il s'agit bien (voir Tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-bas du 2e ordre dont la pulsation de coupure à 3 db est égale à la pulsation unité ω_0.

Ordre	$\underline{P}(\underline{s})$
1	$1 + \underline{s}$
2	$1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2$
3	$(1 + \underline{s})(1 + \underline{s} + \underline{s}^2)$ $= 1 + 2\underline{s} + 2\underline{s}^2 + \underline{s}^3$
4	$(\underline{s}^2 + 0{,}765\,3\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + 1{,}848\underline{s} + 1)$ $= 1 + 2{,}613\underline{s} + 3{,}414\underline{s}^2 + 2{,}613\underline{s}^3 + \underline{s}^4$
5	$(1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + 0{,}618\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + 1{,}618\underline{s} + 1)$ $= 1 + 3{,}236\underline{s} + 5{,}236\underline{s}^2$ $+ 5{,}236\underline{s}^3 + 3{,}236\underline{s}^4 + \underline{s}^5$
6	$(\underline{s}^2 + 0{,}517\,6\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + \sqrt{2}\underline{s} + 1)$ $(\underline{s}^2 + 1{,}932\underline{s} + 1)$

Exemple de calcul

Problème

Déterminer la transmittance du filtre passe-bas de Butterworth qui satisfait au gabarit de la figure 5.

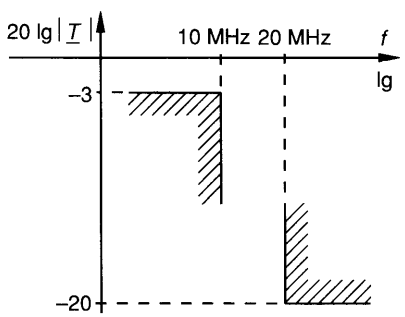


Fig. 5

La fréquence $f_0 = 10$ MHz est prise comme unité de fréquence, ce qui conduit à $x_1 = \dfrac{f_1}{f_0} = 2$.

L'ordre n du filtre est déterminé par

$$n \geqslant \frac{\lg\left[10^{+\frac{20}{10}} - 1\right]}{2 \lg 2} = 3{,}315.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 4 dont la fonction de transfert est obtenue à l'aide du tableau précédent

$$T(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + 0{,}765\,3\underline{s} + \underline{s}^2)(1 + 1{,}848\underline{s} + \underline{s}^2)}$$

soit

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 0{,}765\,3j\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\left[1 + 1{,}848j\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}.$$

3.2. RÉPONSE DE CHEBYCHEV

La fonction $T(x)$ est cherchée sous la forme

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}}$$

dans laquelle ε est un nombre et $C_n(x)$ est un polynôme, défini par récurrence, et qui vérifie les relations suivantes :

$$C_0(x) = 1; \quad C_1(x) = x;$$
$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x)$$

ε et l'ordre n du filtre doivent être déterminés de telle sorte que 20 lg $|T(x)|$ s'inscrive dans le gabarit.

• Pour la fréquence unité, $x = 1$. Les polynômes $C_n(x)$ sont tels que $C_0(1) = 1$, $C_1(1) = 1$ et par récurrence $C_{n+1}(1) = 2 - 1 = 1$.

Quel que soit l'ordre n du filtre

$$20 \lg T(1) = -10 \lg (1 + \varepsilon^2).$$

Ainsi la fréquence de coupure n'est pas définie à -3 db mais à $-10 \lg (1 + \varepsilon^2)$ db qui n'est égal à -3 db que pour $\varepsilon = 1$.

• Pour les fréquences inférieures à la fréquence unité f_0, x est inférieur à 1.

Avec le changement de variable $x = \cos \varphi$, $C_n(x)$ s'écrit $\cos n\varphi$, en effet :

$$C_0(x) = \cos 0 = 1; \quad C_1(x) = \cos \varphi.$$

Si la relation est vérifiée à l'ordre n et à l'ordre $n - 1$,

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x) &= 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \\ &= 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos (n-1)\varphi \\ &= \cos (n+1)\varphi + \cos (n-1)\varphi \\ &\qquad - \cos (n-1)\varphi \\ &= \cos (n+1)\varphi. \end{aligned}$$

La relation est vérifiée à l'ordre $n + 1$.

Ainsi, pour $x \leqslant 1$, $C_n(x)$ qui s'écrit cos $n\varphi$ est toujours inférieur à 1 et 20 lg $T(x)$ est supérieur à -10 lg $(1 + \varepsilon^2)$, ce qui confirme que la pulsation de coupure soit définie à

$$a = -10 \lg (1 + \varepsilon^2) \text{ db.}$$

De plus, dans la bande passante, 20 lg $T(x)$ évolue au rythme de cos $[n\varphi]$ = cos $[n \arccos x]$ et la courbe de réponse ondule entre 0 et

$$-10 \lg (1 + \varepsilon^2) \text{ décibels } (\textit{fig. } 6)$$

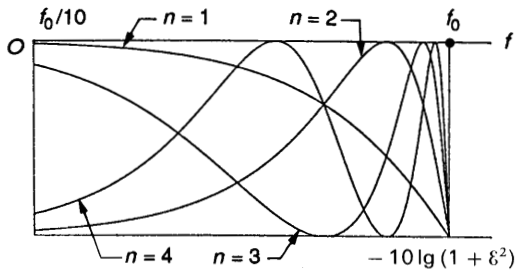


Fig. 6

• Pour les fréquences supérieures à la fréquence unité f_0, x est supérieur à 1 et le changement de variable précédent est impossible. Pour les fréquences suffisamment élevées par rapport à f_0, c'est-à-dire pour $x \gg 1$, on peut faire l'approximation suivante :

$$C_n(x) \approx 2xC_{n-1}(x)$$

$C_n(x)$ apparaît ainsi comme une progression géométrique de raison $2x$ et peut être écrit

$$C_n(x) = \frac{(2x)^n}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

La fonction $T(x)$ est alors peu différente de

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(2x)^{2n}}} \approx \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2}(2x)^n} \approx \frac{1}{\left[\frac{2\omega}{\omega_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}\right]^n}$$

$$\approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^n} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$$

La courbe 20 lg $T(x)$ admet donc pour asymptote la droite de pente $20n$ décibels par décade passant par la pulsation $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$. ε ayant été déterminé en fonction de l'ondulation tolérable dans la bande passante, il est possible de déterminer l'ordre n du filtre en positionnant la droite asymptote dans le gabarit.

On détermine ainsi $T(x)$ compte tenu de l'ondulation tolérable et de l'ordre n. Les racines de $1 + \varepsilon^2 C_n(x)$ sont données par des tables et, comme dans la réponse de Butterworth, la fonction de transfert normalisée $\underline{T}(\underline{s})$ peut être écrite sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du premier et du second ordre :

$$\underline{T}(\underline{s}) = (1 + a\underline{s})(1 + 2b'\underline{s} + a'\underline{s}^2)(...$$

4. FILTRE PASSE-HAUT

Un filtre passe-haut est décrit par le gabarit de la figure 7.

Racines des polynômes de Chebychev $1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)$

Ondulation db	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0,01	± 2,234 ± 2,28j	± 1,589j ± 1,626 ± 0,795j	± 1,355 ± 0,411j ± 0,561 ± 0,992j	± 1,228 ± 0,253j ± 0,759 ± 0,661j ± 0,817j
0,1	± 1,381 ± 1,186j	± 0,969j ± 1,206 ± 0,485j	± 1,123 ± 0,264j ± 0,465 ± 0,638j	± 0,804 ± 0,166j ± 0,668 ± 0,436j ± 0,539j
1	± 0,895 ± 0,549j	± 0,494j ± 0,966 ± 0,247j	± 0,983 ± 0,139j ± 0,407 ± 0,337j	± 0,990 ± 0,089j ± 0,612 ± 0,234j ± 0,289j

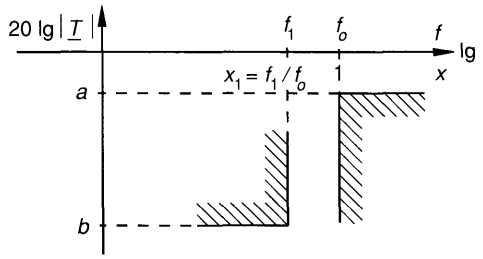


Fig. 7

La fréquence f_0 étant prise comme fréquence unité, on effectue le changement de variables

$$\underline{s} = \mathrm{j}\,\frac{f}{f_0} = \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

et on pose $x = |\underline{s}| = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

La transformation $\underline{s} \to \underline{S} = \dfrac{1}{\underline{s}}$ conduit au changement de variable

$$x \to X = \frac{1}{x},$$

c'est-à-dire $\lg x \to \lg X = -\lg x$.

Dans cette transformation, on associe à tout point son symétrique par rapport à la verticale $\lg x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$. Le gabarit de la figure 7 conduit ainsi à celui de la figure 8.

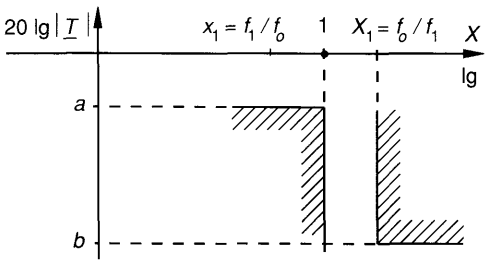


Fig. 8

Ce gabarit est caractéristique d'un filtre passe-bas dont on peut déterminer la transmittance normalisée $\underline{T}(\underline{S})$ par une des méthodes exposées précédemment (Butterworth, Chebychev ou autre).

La transformation $\underline{S} \to \dfrac{1}{\underline{s}}$ permet ensuite d'écrire la transmittance normalisée $\underline{T}(\underline{s})$ du filtre passe-haut.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer, à l'aide d'un polynôme de Butterworth, la transmittance $\underline{T}(\underline{s})$ d'un filtre passe-haut, conforme au gabarit de la figure 7, avec

$$f_0 = 10 \text{ MHz}, \quad f_1 = 4 \text{ MHz}, \quad a = -3 \text{ db}, \quad b = -18 \text{ db}.$$

L'ordre n du filtre est déterminé par :

$$n \geqslant \frac{\lg\left[10^{\frac{18}{10}} - 1\right]}{2 \lg \dfrac{10}{4}} = 2{,}25.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 3 dont la fonction de transfert est obtenue à partir du tableau précédent.

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{1}{1 + 2\underline{S} + 2\underline{S}^2 + \underline{S}^3}.$$

Après la transformation $\underline{S} \to \dfrac{1}{\underline{s}}$, on obtient pour le filtre passe-haut, la transmittance

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^3}{1 + 2\underline{s} + 2\underline{s}^2 + \underline{s}^3},$$

$$\text{soit } \underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^3}{1 + 2\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right) + 2\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^3}.$$

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-haut du 2e ordre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2}{1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2},$$

soit $$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $m = 0{,}7$.

Il s'agit bien (voir Tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-haut du 2e ordre dont la pulsation de coupure à 3 db est égale à ω_0.

Dans la transformation $\underline{s} \to \dfrac{1}{\underline{S}}$, l'inductance de valeur normalisée λ_n, d'impédance complexe normalisée $\lambda_n \underline{s}$ se transforme en un élément dont l'impédance complexe normalisée est

$$\lambda_n \frac{1}{\underline{s}} = \frac{1}{\underline{s}\,\dfrac{1}{\lambda_n}}.$$

Il s'agit d'une capacité de valeur normalisée $\gamma_n = \dfrac{1}{\lambda_n}$.

De même la capacité de valeur normalisée γ_n est remplacée par l'inductance normalisée $\lambda_n = \dfrac{1}{\gamma_n}$.

5. FILTRE PASSE-BANDE

Un filtre passe-bande est décrit par le gabarit de la figure 9.

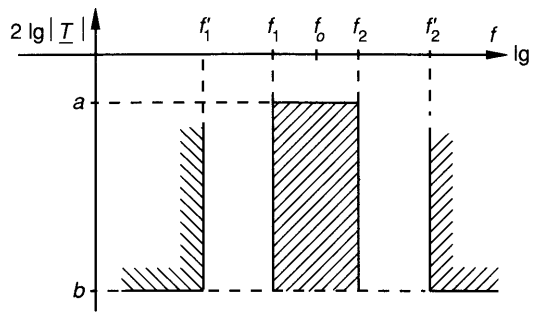


Fig. 9

La fréquence $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ est choisie comme unité de fréquence (sur l'axe des fréquences gradué logarithmiquement, le point représentatif de f_0 est le milieu du segment $f_1 f_2$).

On effectue alors la transformation

$$\underline{s} \to \underline{S} = \frac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right) \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{f_2 - f_1}{f_0}.$$

Cette transformation conduit au changement de variables

$$x = |\underline{s}| \to X = |\underline{S}| = \frac{1}{\Delta x}\left|x - \frac{1}{x}\right|$$

soit $X = \dfrac{|f^2 - f_0^2|}{f(f_2 - f_1)}$.

- Les fréquences f_1 et f_2 conduisent à $X = 1$.
- La fréquence f_0 correspond à $X = 0$ et le point représentatif part à $-\infty$ sur l'axe des fréquences.
- Les fréquences f'_1 et f'_2 conduisent à des valeurs de X supérieures à 1.

En conséquence, le gabarit de la figure 9 est associé au gabarit normalisé de la figure 10, où P est la valeur minimale de X'_1 et de X'_2 (valeurs de X associées respectivement aux fréquences f'_1 et f'_2).

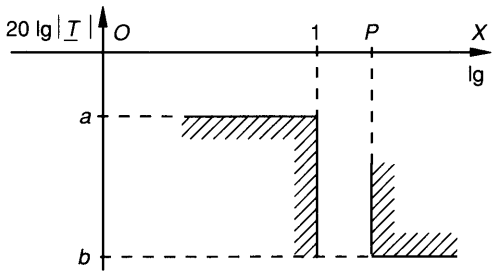


Fig. 10

Comme pour le filtre passe-haut, la détermination de la fonction de transfert du filtre passe-bande est ainsi ramenée à l'étude d'un filtre passe-bas.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer, à l'aide d'un polynome de Butterworth la fonction de transfert du filtre passe-bande conforme au gabarit de la figure 9 avec

$f_1 = 2$ MHz; $f_2 = 8$ MHz; $f'_1 = 500$ kHz; $f'_2 = 16$ MHz; $a = -3$ db et $b = -20$ db.

La fréquence unité est $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 4$ MHz.

Les fréquences f'_1 et f'_2 conduisent respectivement à

$$X'_1 = \frac{f_0}{f_2 - f_1}\left|\frac{f'_1}{f_0} - \frac{f_0}{f'_1}\right| = 5{,}25$$

et $X'_2 = \dfrac{f_0}{f_2 - f_1}\left|\dfrac{f'_2}{f_0} - \dfrac{f_0}{f'_2}\right| = 2{,}5.$

D'où l'on déduit P = valeur minimale de $(X'_1, X'_2) = 2{,}5$.

L'ordre n du filtre est donné par :

$$n \geqslant \frac{\lg\left(10^{\frac{20}{10}} - 1\right)}{2 \lg 2{,}5} = 2{,}51.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 3 dont la fonction de transfert est obtenue à partir du tableau précédent

$$T(\underline{S}) = \frac{1}{1 + 2\underline{S} + 2\underline{S}^2 + \underline{S}^3}.$$

Après la transformation $\underline{S} \to \dfrac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)$, on obtient pour le filtre passe-bande la transmittance normalisée

$$T(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right) + \dfrac{2}{\Delta_x^2}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)^2 + \dfrac{1}{\Delta_x^3}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)^3}.$$

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-bande du 1^er ordre s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right)} = \frac{\Delta x \underline{s}}{1 + \Delta x \underline{s} + \underline{s}^2}$$

soit

$$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\mathrm{j}m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\mathrm{j}m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $2m = \Delta x$.

Il s'agit bien (voir tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-bande centré sur ω_0 *dont la bande passante à 3 db est égale à*

$$2m\omega_0 = \Delta x \times \omega_0 = \omega_2 - \omega_1.$$

Dans la transformation $\underline{s} \to \underline{S} = \frac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right)$, l'inductance de valeur normalisée λ_n, d'impédance normalisée $\lambda_n \underline{s}$ se transforme en un élément d'impédance normalisée

$$\frac{\lambda_n}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right) = \frac{\lambda_n}{\Delta x}\underline{s} + \frac{1}{\frac{\Delta x}{\lambda_n}\underline{s}}.$$

Cette impédance résulte de la mise en série (*fig.* 11) d'une inductance normalisée $\frac{\lambda_n}{\Delta x}$ et d'une capacité normalisée $\frac{\Delta x}{\lambda_n}$.

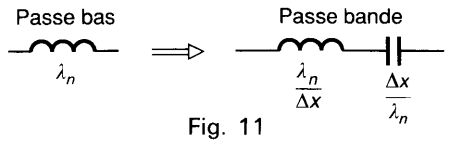


Fig. 11

De la même manière, la capacité de valeur normalisée γ_n, d'admittance normalisée $\gamma_n \underline{s}$ se transforme en un élément d'admittance normalisée

$$\frac{\gamma_n}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right) = \frac{\gamma_n}{\Delta x}\underline{s} + \frac{1}{\frac{\Delta x}{\gamma_n}\underline{s}}.$$

Cette admittance résulte de la mise en parallèle (*fig.* 12) d'une capacité normalisée $\frac{\gamma_n}{\Delta x}$ et d'une inductance normalisée $\frac{\Delta x}{\gamma_n}$.

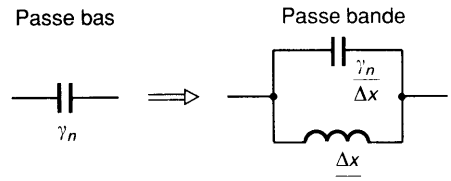


Fig. 12

Dans ce chapitre nous avons établi la fonction de transfert du filtre dont la représentation dans les diagrammes de Bode s'inscrit dans le gabarit imposé par le problème pratique. Nous étudierons dans les chapitres suivants des dispositifs permettant de réaliser la fonction de transfert souhaitée. Ce seront successivement, les filtres passifs, les filtres actifs, les filtres numériques.

EXERCICES

1. On désire déterminer, à l'aide d'un polynôme de Chebychev, la fonction de transfert $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ dont le module s'inscrit dans le gabarit de la figure 1

1° En posant $x = \frac{f}{f_0}$, le module $T(x)$ de la fonction de transfert s'écrit

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}},$$

avec

$$C_0(x) = 1; \quad C_1(x) = x; \quad C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x).$$

Sachant que $|C_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \leqslant 1$, montrer que l'ondulation de 0,3 db dans la bande passante impose $\varepsilon^2 = 0{,}071\,5$.

2° Établir l'expression du polynôme $C_4(x)$ et montrer que la fonction de transfert de Chebychev d'ordre 4, s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

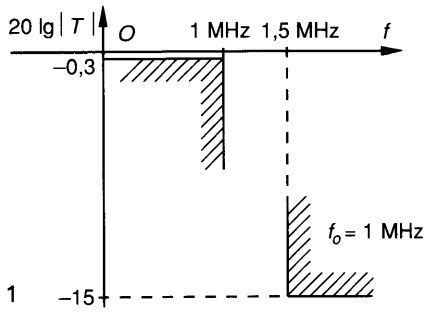


Fig. 1

3° Pour une ondulation de 0,3 db dans la bande passante, les racines du polynôme $1 + \varepsilon^2 C_4(x)$ s'écrivent

$$x_1 = \pm 1{,}045\,36 \pm 0{,}202\,6\mathrm{j},$$
$$x_2 = \pm 0{,}433\,00 \pm 0{,}489\,12\mathrm{j}.$$

Vérifier que x_1 et x_2 sont bien solutions de $1 + \varepsilon^2 C_4(x)$.

4° Montrer par une méthode analogue à celle du paragraphe 3.1 que la fonction de transfert normalisée du filtre s'écrit $\left(\text{avec } \underline{s} = \mathrm{j}x = \mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)$

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0{,}467\,5}{(\underline{s}^2 + 0{,}978\underline{s} + 0{,}427)(\underline{s}^2 + 0{,}405\underline{s} + 1{,}134)}.$$

5° En déduire la fonction de transfert $\underline{T}(\mathrm{j}f)$. Tracer, à l'aide d'un ordinateur, son module $20 \log |\underline{T}|$ dans les diagrammes de Bode et vérifier (*fig.* 2) que la courbe s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

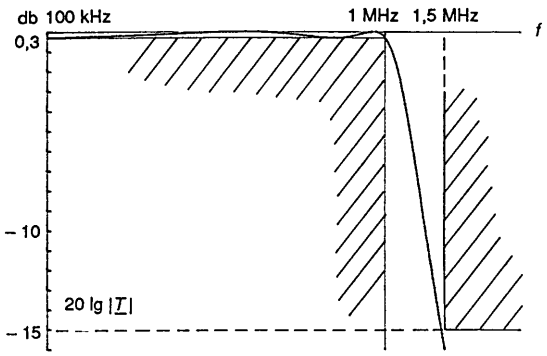


Fig. 2

2. On désire déterminer à l'aide d'un polynôme de Chebychev la fonction de transfert $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ dont le module s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

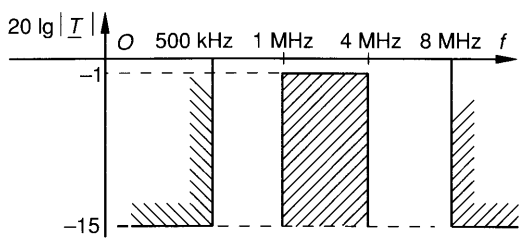


Fig. 1

1° On pose

$$f_1 = 1 \text{ MHz}, \quad f_2 = 4 \text{ MHz},$$
$$f'_1 = 500 \text{ kHz}, \quad f'_2 = 8 \text{ MHz},$$
$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad \text{et} \quad x = \frac{f}{f_0}.$$

Montrer que le gabarit normalisé du filtre passe-bas équivalent est conforme au graphe de la figure 2.

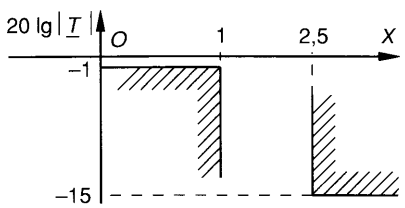


Fig. 2

2° En posant $X = \dfrac{f}{f_0}$, le module $T(X)$ de la fonction de transfert s'écrit

$$T(X) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(X)}},$$

avec

$$C_0(X) = 1, \quad C_1(X) = X, \quad C_n(X) = 2XC_{n-1}(X) - C_{n-2}(X).$$

Sachant que $|C_n(X)| \leqslant 1$ pour $X \leqslant 1$, montrer que l'ondulation tolérable dans la bande passante impose $\varepsilon^2 = 0{,}258\,9$.

3° Établir l'expression du polynôme $C_2(X)$ et montrer que la fonction de transfert

$$T(X) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_2^2(X)}}$$

s'inscrit dans le gabarit de la figure 2.

4° Montrer que les racines du polynôme $1 + \varepsilon^2 C_2^2(X)$ s'écrivent

$$X_0 = \pm 0{,}895 \pm 0{,}549\mathrm{j}.$$

5° Montrer par une méthode analogue à celle du paragraphe 3.1 que la fonction de transfert normalisée du filtre passe-bas s'écrit

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{0{,}982\,7}{\underline{S}^2 + 1{,}098\underline{S} + 1{,}102}.$$

6° En déduire par la transformation $\underline{S} = \dfrac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)$, avec $\Delta x = \dfrac{f_2 - f_1}{f_0}$, l'expression de la fonction de transfert normalisée du filtre passe-bande (*fig.* 1) :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0{,}982\,7\underline{s}^2}{0{,}444\underline{s}^4 + 0{,}732\underline{s}^3 + 1{,}99\underline{s}^2 + 0{,}732\underline{s} + 0{,}444}.$$

7° En déduire la fonction de transfert $\underline{T}(\mathrm{j}f)$:

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \frac{-0{,}245\,7f^2}{0{,}027\,8f^4 - 0{,}091\,5\mathrm{j}f^3 - 0{,}497\,5f^2 + 0{,}366\mathrm{j}f + 0{,}444}.$$

8° Tracer, à l'aide d'un ordinateur, la fonction de transfert $20 \log |\underline{T}(\mathrm{j}f)|$ et vérifier (*fig.* 3) qu'elle s'incrit dans le gabarit de la figure 1.

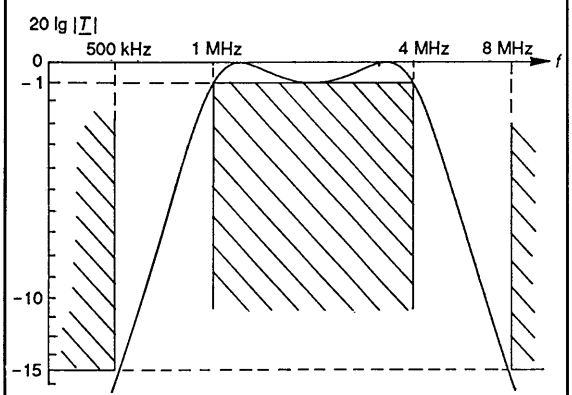


Fig. 3

2 filtres passifs

1. FILTRE PASSIF PASSE-BAS

Le filtre passif passe-bas le plus classique est un filtre «en échelle» constitué par une succession d'inductances (L_1, L_3, ...) et de capacités (C_2, C_4, ...) conformément au schéma de la figure 1.

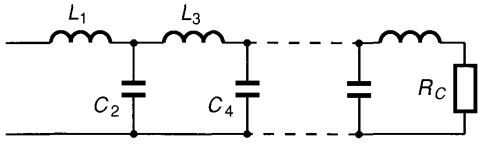


Fig. 1

Ce filtre est fermé sur une résistance de charge R_C.

1.1. NORMALISATION

Rappelons que l'unité de pulsation ω_0 est déterminée, à partir du gabarit, par la pulsation de coupure à a db. La résistance de charge étant choisie comme unité de résistance, l'unité d'inductance est définie par $L_U = \dfrac{R_C}{\omega_0}$ et l'unité de capacité par $C_U = \dfrac{1}{R_C \omega_0}$.

Nous noterons λ_1, λ_3, ... les valeurs normalisées des inductances ($L_1 = \lambda_1 L_U$; $L_3 = \lambda_3 L_U$...) et γ_2, γ_4, ... les valeurs normalisées des capacités ($C_2 = \gamma_2 C_U$; $C_4 = \gamma_4 C_U$; ...).

1.2. PARAMÈTRES ADMITTANCE

Considérons le filtre normalisé, passe-bas du troisième ordre de la figure 2.

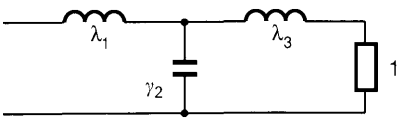


Fig. 2

Les paramètres admittance $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \underline{Y}$ et $\underline{Y}_{22}$ peuvent être déterminés sur le schéma de la figure 3 par

$$\underline{Y} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1 = 0} \quad \text{et par} \quad \underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1 = 0}$$

(les grandeurs $\underline{I}_1$, $\underline{U}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{U}_2$ sont aussi des valeurs normalisées).

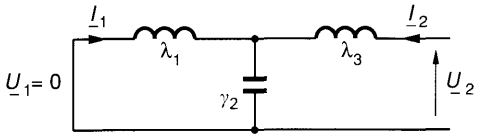


Fig. 3

Il vient

$$\underline{Y}_{22} = \cfrac{1}{\lambda_3 \underline{s} + \cfrac{1}{\gamma_2 \underline{s} + \cfrac{1}{\lambda_1 \underline{s}}}} = \frac{1 + \gamma_2 \lambda_1 \underline{s}^2}{\underline{s}[\lambda_1 + \lambda_3 + \gamma_2 \lambda_1 \lambda_3 \underline{s}^2]}$$

$$\underline{Y} = \frac{-1}{\lambda_1 \underline{s}} \cdot \cfrac{\cfrac{\lambda_1 \underline{s}}{1 + \gamma_2 \lambda_1 \underline{s}^2}}{\lambda_3 \underline{s} + \cfrac{\lambda_1 \underline{s}}{1 + \gamma_2 \lambda_1 \underline{s}^2}} = \frac{-1}{\underline{s}[\lambda_1 + \lambda_3 + \gamma_2 \lambda_1 \lambda_3 \underline{s}^2]}.$$

Dans l'écriture précédente, il apparaît que $\underline{Y}$ et $\underline{Y}_{22}$ peuvent être mis sous la forme :

$$\boxed{\underline{Y}_{22} = \frac{D_2(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_1(\underline{s}^2)} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{-1}{\underline{s} D_1(\underline{s}^2)},}$$

où $D_1(\underline{s}^2)$ et $D_2(\underline{s}^2)$ sont des polynômes en $\underline{s}^2$.
Afin d'établir que les expressions précédentes de $\underline{Y}_{22}$ et $\underline{Y}$ sont valables quel que soit l'ordre du filtre de la figure 1, admettons-les pour l'ordre $n-1$ et démontrons-les, par récurrence, pour l'ordre n.

• Si le passage de l'ordre $n-1$ à l'ordre n se fait en ajoutant une capacité γ_n en parallèle, on obtient le schéma de la figure 4, avec

$$\underline{Y}_{22n} = \underline{Y}_{22(n-1)} + \gamma_n \underline{s} = \frac{D_{2(n-1)}(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)} + \gamma_n \underline{s}$$

$$= \frac{D_{2(n-1)}(\underline{s}^2) + \gamma_n \underline{s}^2 D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)}$$

$$\underline{Y}_n = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_{2n}} = \frac{\underline{I}_1}{U_{2(n-1)}} = \underline{Y}_{(n-1)} = \frac{-1}{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)}.$$

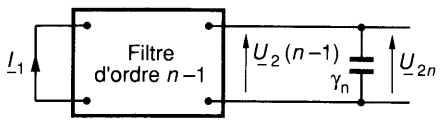


Fig. 4

Ce qui confirme les expressions

$$\underline{Y}_{22n} = \frac{D_{2n}(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_{1n}(\underline{s}^2)} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_n = \frac{-1}{\underline{s} D_{1n}(\underline{s}^2)}$$

avec $\begin{cases} D_{2n}(\underline{s}^2) = D_{2(n-1)}(\underline{s}^2) + \gamma_n \underline{s}^2 D_{1(n-1)}(\underline{s}^2) \\ D_{1n}(\underline{s}^2) = D_{1(n-1)}(\underline{s}^2). \end{cases}$

• Si le passage de l'ordre $n-1$ à l'ordre n se fait en ajoutant une inductance λ_n en série, on obtient le schéma de la figure 5 avec

$$\underline{Y}_{22n} = \frac{1}{\lambda_n \underline{s} + \dfrac{1}{\underline{Y}_{22(n-1)}}} = \frac{1}{\lambda_n \underline{s} + \dfrac{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)}{D_{2(n-1)}(\underline{s}^2)}}$$

$$= \frac{D_{2(n-1)}(\underline{s}^2)}{\underline{s}[\lambda_n D_{2(n-1)}(\underline{s}^2) + D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)]}$$

$$\underline{Y}_n = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_{2n}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_{2(n-1)}} \times \frac{\underline{U}_{2(n-1)}}{\underline{U}_{2n}}$$

$$= \underline{Y}_{n-1} \times \frac{\dfrac{1}{\underline{Y}_{22(n-1)}}}{\lambda_n \underline{s} + \dfrac{1}{\underline{Y}_{22(n-1)}}}$$

$$= \underline{Y}_{n-1} \times \frac{1}{1 + \lambda_n \underline{s} \underline{Y}_{22(n-1)}}$$

$$= \frac{-1}{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)} \times \frac{1}{1 + \lambda_n \underline{s} \dfrac{D_{2(n-1)}(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)}}$$

$$= \frac{-1}{\underline{s}[\lambda_n D_{2(n-1)}(\underline{s}^2) + D_{1(n-1)}(\underline{s}^2)]}.$$

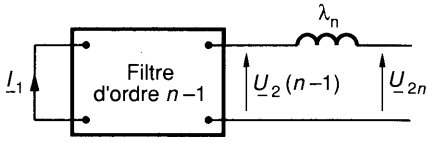


Fig. 5

Ce qui confirme l'écriture générale de $\underline{Y}_{22n}$ et $\underline{Y}_n$, avec

$$\begin{cases} D_{2n}(\underline{s}^2) = D_{2(n-1)}(\underline{s}^2), \\ D_{1n}(\underline{s}^2) = \lambda_n D_{2(n-1)}(\underline{s}^2) + D_{1(n-1)}(\underline{s}^2). \end{cases}$$

1.3. FONCTION DE TRANSFERT

Considérons le filtre normalisé d'ordre n, décrit à la figure 6.

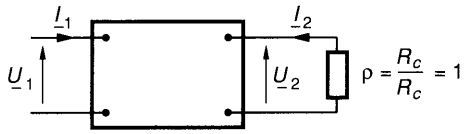


Fig. 6

Ce filtre est fermé sur la résistance de charge R_C dont la valeur normalisée est $\rho = \dfrac{R_C}{R_C} = 1$.

A partir des équations :

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = -\rho \underline{I}_2 = -\underline{I}_2, \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2; \end{cases}$$

il vient $-\underline{U}_2 = \underline{Y}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$,

soit $\underline{T} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \dfrac{-\underline{Y}}{1 + \underline{Y}_{22}}$,

ou, compte tenu de $\underline{Y}_{22} = \dfrac{D_2(\underline{s}^2)}{\underline{s} D_1(\underline{s}^2)}$ et $\underline{Y} = \dfrac{-1}{\underline{s} D_1(\underline{s}^2)}$,

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} D_1(\underline{s}^2) + D_2(\underline{s}^2)}.$$

A partir de l'expression de $\underline{T}(\underline{s})$, il est possible, en isolant au dénominateur l'ensemble des termes d'exposants pairs et l'ensemble des termes d'exposants impairs, de reconstituer les polynômes $\underline{s} D_1(\underline{s}^2)$ et $D_2(\underline{s}^2)$ et partant de là, de déterminer les paramètres $\underline{Y}_{22}$ et $\underline{Y}$.

1.4. CALCUL DES ÉLÉMENTS DU FILTRE NORMALISÉ

Nous avons vu au chapitre 1, comment les approximations de Butterworth ou de Tchebychev permettent de déterminer la fonction de transfert $\underline{T}(\underline{s})$, à partir du gabarit.

De plus nous venons d'établir qu'il est possible de reconstituer l'expression de $\underline{Y}_{22}$ en isolant, au dénominateur de $\underline{T}(\underline{s})$, les termes d'exposants pairs et d'exposants impairs.

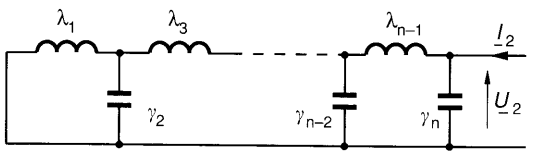


Fig. 7

Considérons dès lors le schéma de la figure 7, à partir duquel le paramètre $\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1 = 0}$ s'établit sous la forme

$$\underline{Y}_{22} = \gamma_n \underline{s} + \cfrac{1}{\lambda_{n-1}\underline{s} + \cfrac{1}{\gamma_{n-2}\underline{s} + \cfrac{1}{\ldots \lambda_3 \underline{s} + \cfrac{1}{\gamma_2 \underline{s} + \cfrac{1}{\lambda_1 \underline{s}}}}}}$$

Cette expression de $\underline{Y}_{22}$ peut être établie à partir de $\underline{Y}_{22} = \dfrac{\underline{D}_2(\underline{s}^2)}{\underline{s}\underline{D}_1(\underline{s}^2)}$ en effectuant des divisions successives de polynômes. Considérons par exemple le filtre de Butterworth d'ordre 4 dont la fonction de transfert est

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + 2{,}613\underline{s} + 3{,}414\underline{s}^2 + 2{,}613\underline{s}^3 + \underline{s}^4}.$$

Les polynômes $D_2(\underline{s}^2)$ *et* $\underline{s}D_1(\underline{s}^2)$ s'établissent ainsi à

$$\begin{cases} \underline{s}D_1(\underline{s}^2) = 2{,}613\underline{s} + 2{,}613\underline{s}^3, \\ D_2(\underline{s}^2) = 1 + 3{,}414\underline{s}^2 + \underline{s}^4 \end{cases}$$

et $\underline{Y}_{22}$ s'écrit $\underline{Y}_{22} = \dfrac{\underline{s}^4 + 3{,}414\underline{s}^2 + 1}{2{,}613\underline{s}^3 + 2{,}613\underline{s}}$.

Puis par divisions successives :

$$\underline{Y}_{22} = 0{,}383\underline{s} + \cfrac{1}{\cfrac{2{,}613\underline{s}^3 + 2{,}613\underline{s}}{2{,}414\underline{s}^2 + 1}}$$

$$\underline{Y}_{22} = 0{,}383\underline{s} + \cfrac{1}{1{,}082\underline{s} + \cfrac{1}{\cfrac{2{,}414\underline{s}^2 + 1}{1{,}531\underline{s}}}}$$

$$= 0{,}383\underline{s} + \cfrac{1}{1{,}082\underline{s} + \cfrac{1}{1{,}577\underline{s} + \cfrac{1}{1{,}531\underline{s}}}}$$

D'où l'on déduit les éléments du filtre normalisé de la figure 8.

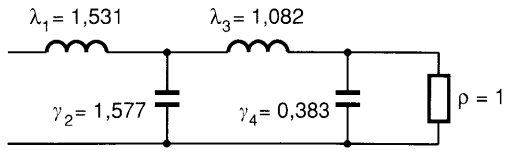


Fig. 8

Il apparaît ainsi que les éléments du filtre normalisé ne dépendent que de l'ordre du filtre. Il est donc possible de les déterminer à partir des polynômes de Butterworth (ou de Chebychev ou autres). Le tableau 1 page 209 donne les filtres normalisés établis jusqu'à l'ordre 5 par des polynômes de Butterworth.

1.5. EXEMPLE DE CALCUL

Problème

Déterminer les éléments d'un filtre passe-bas de Butterworth qui satisfait au gabarit de la figure 5 du chapitre précédent et dont la résistance de charge R_C est égale à 500 Ω.

A partir de l'unité de résistance $R_C = 500\ \Omega$ et de l'unité de pulsation $\omega_0 = 2\pi \times 10^7$ rad/s, on détermine l'unité d'inductance $L_U = \dfrac{R_C}{\omega_0} = 7{,}96\ \mu\text{H}$ et l'unité de capacité $C_U = \dfrac{1}{R_C\omega_0} = 31{,}8\ \text{pF}$.

L'ordre du filtre, calculé au paragraphe 3.1 du chapitre 1, est égal à 4, le filtre normalisé peut être extrait du tableau 1 page 209, et les éléments du filtre définitif (*fig.* 9) sont calculés par

$L_1 = 1{,}531.\ L_U = 12{,}1\mu\text{H},$
$C_2 = 1{,}577.\ C_U = 50{,}2\ \text{pF},$
$L_3 = 1{,}082.\ L_U = 8{,}61\ \mu\text{H},$
$C_4 = 0{,}383.\ C_U = 12{,}2\ \text{pF}.$

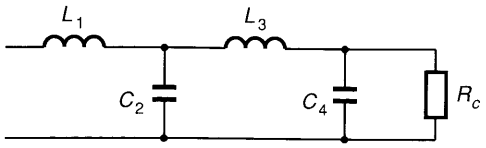


Fig. 9

REMARQUE

Les calculs précédents ont été effectués en supposant nulle la résistance du générateur. Dans le cas contraire les éléments du filtre doivent être corrigés à l'aide de coefficients donnés par des tables.

2. FILTRE PASSIF PASSE-HAUT

• Par la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\underline{s}}$ (paragraphe 4 du chapitre 1), on associe à tout filtre passe-haut un filtre passe-bas dont il est possible de calculer les éléments à l'aide du tableau 1.

• Dans la transformation inverse (passe-bas → passe-haut), l'inductance normalisée λ_n devient une capacité de valeur normalisée $\frac{1}{\lambda_n}$ et la capacité de valeur normalisée γ_n devient une inductance normalisée $\frac{1}{\gamma_n}$.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer les éléments du filtre satisfaisant au gabarit de la figure 7 du chapitre 1 (avec $f_1 = 4$ MHz, $f_0 = 10$ MHz, $a = -3$ db et $b = -18$ db) et dont la résistance de charge est égale à 100 Ω.

A partir de l'unité de résistance $R_C = 100\ \Omega$ et de l'unité de pulsation $\omega_0 = 20\pi \times 10^6$ rad/s, on détermine l'unité d'inductance $L_u = \frac{R_C}{\omega_0} = 1{,}59$ MH et l'unité de capacité $C_u = \frac{1}{R_C \omega_0} = 159$ pF.

L'ordre du filtre, calculé au paragraphe 4 du chapitre 1, est égal à 3.

À partir du tableau 1, on détermine les éléments du filtre passe-bas équivalent ($\lambda_1 = 1{,}5$, $\gamma_2 = 1{,}333$, $\lambda_3 = 0{,}5$) puis les éléments du filtre passe-haut normalisé $\left(\gamma_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 0{,}667, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\gamma_2} = 0{,}75, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\lambda_3} = 2\right)$. Le filtre définitif est conforme au schéma de la figure 10 avec

$$\begin{cases} C_1 = \gamma_1 C_u = 106\ \text{pF}, \\ L_2 = \lambda_2 L_u = 1{,}19\ \mu\text{H}, \\ C_3 = \gamma_3 C_u = 318\ \text{pF}. \end{cases}$$

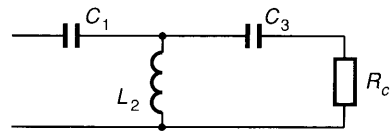


Fig. 10

3. FILTRE PASSIF PASSE-BANDE

Par la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right)$ (paragraphe 5 du chapitre 1), on associe, à tout filtre passe-bande, un filtre passe-bas dont il est possible de calculer les éléments à l'aide du tableau 1.

Dans la transformation inverse (passe-bas → passe-bande), l'inductance normalisée λ_n devient une capacité normalisée $\frac{\Delta x}{\lambda_n}$ en série avec une inductance normalisée $\frac{\lambda_n}{\Delta x}$; de même la capacité normalisée γ_n devient l'inductance normalisée $\frac{\Delta x}{\gamma_n}$ en parallèle avec la capacité normalisée $\frac{\gamma_n}{\Delta x}$.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer les éléments du filtre satisfaisant au gabarit de la figure 9 du chapitre 1 (avec $f_1 = 2$ MHz, $f_2 = 8$ MHz, $f'_1 = 500$ kHz, $f'_2 = 16$ MHz, $a = -3$ db et $b = -20$ db) et dont la résistance de charge R_C est égale à 200 Ω.

À partir de l'unité de résistance $R_C = 200\ \Omega$ et de l'unité de pulsation

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{f_1 f_2} = 8\pi \times 10^6 \text{ rad/s},$$

on détermine l'unité d'inductance

$$L_u = \frac{R_C}{\omega_0} = 7{,}96\ \mu\text{H}$$

et l'unité de capacité $C_u = \dfrac{1}{R_C \omega_0} = 199$ pF.

L'ordre du filtre, calculé au paragraphe 5 du chapitre 1, est égal à 3.

À partir du tableau 1, page 209, on détermine les éléments du filtre passe-bas équivalent ($\lambda'_1 = 1{,}5$, $\gamma'_2 = 1{,}333$, $\lambda'_3 = 0{,}5$) puis les éléments du filtre passe-bande normalisé $\left(\text{compte tenu de } \Delta x = \dfrac{f_2 - f_1}{f_0} = 1{,}5\right)$:

• impédance $\underline{z}_1$ résultant de la mise en série de l'inductance normalisée

$$\lambda_1 = \frac{\lambda'_1}{\Delta x} = 1$$

et de la capacité normalisée $\gamma_1 = \dfrac{\Delta x}{\lambda'_1} = 1$;

• impédance $\underline{z}_2$ résultant de la mise en parallèle de l'inductance normalisée

$$\lambda_2 = \frac{\Delta x}{\gamma'_2} = 1{,}125$$

et de la capacité normalisée $\gamma_2 = \dfrac{\gamma'_2}{\Delta x} = 0{,}889$;

• impédance $\underline{z}_3$ résultant de la mise en série de l'inductance normalisée

$$\lambda_3 = \frac{\lambda'_3}{\Delta x} = 0{,}333$$

et de la capacité normalisée $\gamma_3 = \dfrac{\Delta x}{\lambda'_3} = 3$.

Le filtre définitif est conforme au schéma de la figure 11 avec :

$$\begin{cases} L_1 = \lambda_1 L_u = 7{,}96\ \mu\text{H}; & C_1 = \gamma_1 C_u = 199\ \text{pF}; \\ L_2 = \lambda_2 L_u = 8{,}96\ \mu\text{H}; & C_2 = \gamma_2 C_u = 177\ \text{pF}; \\ L_3 = \lambda_3 L_u = 2{,}65\ \mu\text{H}; & C_3 = 3C_u = 597\ \text{pF}. \end{cases}$$

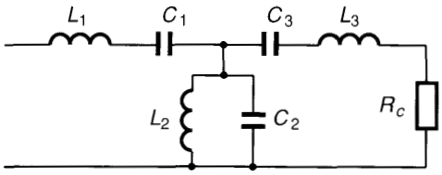


Fig. 11

4. ASSISTANCE PAR ORDINATEUR

Le caractère fastidieux des opérations précédentes justifie l'assistance d'un ordinateur. Le programme 1 constitue un exemple simple de logiciel permettant le calcul des filtres passe-bas, passe-haut et passe-bande jusqu'à l'ordre 5.

```
 10 DIM A(5,5)
 20 FOR I=1 TO 5
 30 FOR J=1 TO 5
 40 A(I,J)=0
 50 NEXT J
 60 NEXT I
 70 A(1,1)=1
 80 A(1,2)=1.414
 90 A(1,3)=1.5
100 A(1,4)=1.531
110 A(1,5)=1.546
120 A(2,2)=.707
130 A(2,3)=1.333
140 A(2,4)=1.577
150 A(2,5)=1.694
160 A(3,3)=.5
170 A(3,4)=1.082
180 A(3,5)=1.381
190 A(4,4)=.383
200 A(4,5)=.894
210 A(5,5)=.309
```

Mise en mémoire des coefficients du filtre normalisé du tableau 1 : le premier coefficient représente le numéro du composant, le second coefficient représente l'ordre du filtre.

```
220 DISP "PASSE BAS:FRAPPER 0:PA
    SSE HAUT:FRAPPER 1:PASSE BAN
    DE:FRAPPER 2"
230 INPUT Z
240 IF Z=0 THEN 270
250 IF Z=1 THEN 470
260 IF Z=2 THEN 670
```

Choix du filtre : passe-bas, passe-haut ou passe-bande.

```
270 DISP "FREQUENCE DE COUPURE A
     3 DB"
280 INPUT F
290 DISP "ATTENUATION MINIMALE E
    N DB"
300 INPUT B
310 DISP "POUR LA FREQUENCE"
320 INPUT G
330 DISP "RESISTANCE DE CHARGE"
340 INPUT R
```

FILTRE PASSE-BAS

Mise en mémoire des données du gabarit et de la résistance de charge.

```
350 U=LGT(10^(B/10)-1)
360 V=LGT((G/F)^2)
370 N=INT(U/V+1)
```

Calcul de l'ordre du filtre.

```
380 L=R/(2*PI*F)
390 C=(2*PI*R*F)^(-1)
```

Calcul des unités d'inductance et de capacité.

```
400 PRINT "ORDRE DU FILTRE=";N
410 PRINT "L1=";L*A(1,N)
420 PRINT "C2=";C*A(2,N)
430 PRINT "L3=";L*A(3,N)
440 PRINT "C4=";C*A(4,N)
450 PRINT "L5=";L*A(5,N)
460 GOTO 990
```

Calcul et impression des éléments du filtre.

```
470 DISP "FREQUENCE DE COUPURE A
     3DB"
480 INPUT F
490 DISP "ATTENUATION MINIMALE E
    N DB"
500 INPUT B
510 DISP "POUR LA FREQUENCE"
520 INPUT G
530 DISP "RESISTANCE DE CHARGE"
540 INPUT R
```

FILTRE PASSE-HAUT

Mise en mémoire des données du gabarit et de la résistance de charge.

```
550 U=LGT(10^(B/10)-1)
560 V=LGT((F/G)^2)
570 N=INT(U/V+1)
```

Calcul de l'ordre du filtre.

```
580 L=R/(2*PI*F)
590 C=(2*PI*R*F)^(-1)
```

Calcul des unités d'inductance et de capacité.

```
600 PRINT "ORDRE DU FILTRE=";N
610 PRINT "C1=";C/A(1,N)
620 PRINT "L2=";L/A(2,N)
630 PRINT "C3=";C/A(3,N)
640 PRINT "L4=";L/A(4,N)
650 PRINT "C5=";C/A(5,N)
660 GOTO 990
```

Calcul et impression des éléments du filtre.

```
670 DISP "FREQUENCE DE COUPURE B
    ASSE A 3 DB"
680 INPUT B
690 DISP "FREQUENCE DE COUPURE H
    AUTE A 3 DB"
700 INPUT H
710 DISP "ATTENUATION MINIMALE E
    N DB"
720 INPUT S
730 DISP "POUR LA FREQUENCE BASS
    E"
740 INPUT F
750 DISP "ET POUR LA FREQUENCE H
    AUTE"
760 INPUT G
770 DISP "RESISTANCE DE CHARGE"
780 INPUT R
```

FILTRE PASSE-BANDE

Mise en mémoire des données du gabarit et de la résistance de charge.

```
790 M=(B*H/F-F)/(H-B)
800 N=(G-B*H/G)/(H-B)
810 P=MIN(M,N)
820 U=LGT(10^(S/10)-1)
830 V=2*LGT(P)
840 N=INT(U/V+1)
850 L=R/(2*PI*(B*H)^(1/2))
860 C=(2*PI*R*(B*H)^(1/2))^(-1)
```

Calcul de l'ordre du filtre.

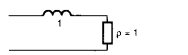
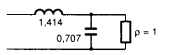
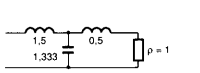
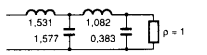
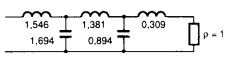
```
870 D=(H-B)/(B*H)^(1/2)
```

Calcul des unités d'inductance et de capacité.
→ Calcul de Δx

```
880 PRINT "ORDRE DU FILTRE =";N
890 PRINT "L1=";A(1,N)*L/D
900 PRINT "C1=";D*C/A(1,N)
910 PRINT "L2=";D*L/A(2,N)
920 PRINT "C2=";C*A(2,N)/D
930 PRINT "L3=";A(3,N)*L/D
940 PRINT "C3=";D*C/A(3,N)
950 PRINT "L4=";D*L/A(4,N)
960 PRINT "C4=";C*A(4,N)/D
970 PRINT "L5=";A(5,N)*L/D
980 PRINT "C5=";D*C/A(5,N)
990 END
```

Calcul et impression des éléments du filtre.

PROGRAMME 1

Ordre	Polynôme en $\underline{s}$	$\underline{Y}_{22}$ décomposé	Filtre normalisé
1	$1 + \underline{s}$	$\dfrac{1}{\underline{s}}$	
2	$1 + \underline{s}^2 + 1{,}414\underline{s}$	$0{,}707\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}414\underline{s}}$	
3	$1 + 2\underline{s}^2 + 2\underline{s} + \underline{s}^2$	$\dfrac{1}{0{,}5\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}333\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}5\underline{s}}}}$	
4	$1 + 3{,}414\underline{s}^2 + \underline{s}^4 + 2{,}613\underline{s} + 2{,}613\underline{s}^3$	$0{,}383\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}082\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}577\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}531\underline{s}}}}$	
5	$1 + 5{,}236\underline{s}^2 + 3{,}236\underline{s}^4 + 3{,}236\underline{s} + 5{,}236\underline{s}^2 + \underline{s}^2$	$\dfrac{1}{0{,}309\underline{s} + \dfrac{1}{0{,}894\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}381\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}694\underline{s} + \dfrac{1}{1{,}545\underline{s}}}}}}$	

EXERCICES

1. On souhaite construire un filtre passif dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

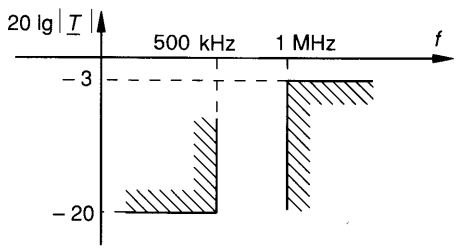


Fig. 1

La résistance de charge du filtre est $R_C = 100\ \Omega$.
Les calculs seront effectués avec l'approximation de Butterworth :

1° Déterminer le gabarit du filtre passe-bas normalisé équivalent.

2° Calculer l'ordre du filtre.

3° Calculer les éléments du filtre passe-bas normalisé équivalent.

4° Montrer que le filtre définitif est conforme au schéma de la figure 2.

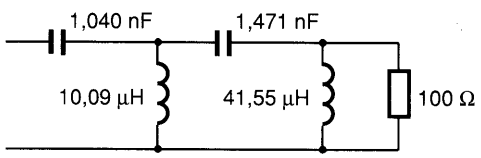


Fig. 2

2. On souhaite construire un filtre passif dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

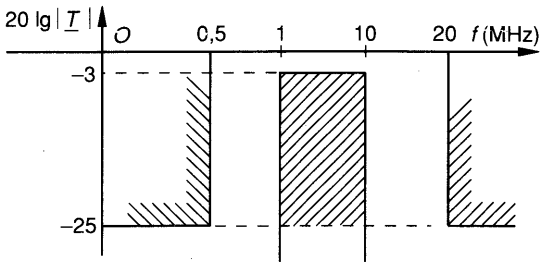


Fig. 1

La résistance de charge du filtre est $R_C = 50\ \Omega$.
Les calculs seront effectués avec l'approximation de Butterworth.

1° Déterminer le gabarit du filtre passe-bas normalisé équivalent.

2° Calculer l'ordre du filtre.

3° Calculer les éléments du filtre passe-bas normalisé équivalent.

4° Montrer que le filtre définitif est conforme au schéma de la figure 2.

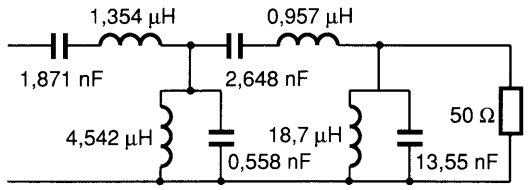


Fig. 2

3 filtres actifs

Nous avons montré, au chapitre 1, qu'il est possible de déterminer, à partir du gabarit, un polynôme $\underline{T}(\underline{s})$ tel que $20 \lg |\underline{T}(\underline{s})|$ s'inscrive dans le gabarit normalisé.

Ce polynôme $\underline{T}(\underline{s})$ résulte de la multiplication de fonctions de transfert du premier et du deuxième ordre.

FONCTIONS DE TRANSFERT DU PREMIER ORDRE

- **Filtre passe-bas**

La transmittance $\underline{T}(\underline{s}) = \dfrac{1}{1 + a\underline{s}}$, compte tenu du changement de variable $\underline{s} = \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}$, conduit à $\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1 + a\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, qui est de la forme

$$\boldsymbol{\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}}, \quad \text{avec } \omega_C = \frac{\omega_0}{a}.$$

- **Filtre passe-haut**

Compte tenu de la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \dfrac{1}{\underline{s}}$, la transmittance normalisée du filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \dfrac{a}{\underline{s}}} = \frac{\dfrac{\underline{s}}{a}}{1 + \dfrac{\underline{s}}{a}},$$

ce qui conduit à $\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{a\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{a\omega_0}}$, de la forme

$$\boldsymbol{\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}}, \quad \text{avec } \omega_C = a\omega_0.$$

FONCTIONS DE TRANSFERT DU DEUXIÈME ORDRE

- **Filtre passe-bas**

La transmittance normalisée $\underline{T}(\underline{s}) = \dfrac{1}{1 + a\underline{s} + b\underline{s}^2}$ conduit à $\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1 + a\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0} + b\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, de la forme

$$\boldsymbol{\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}},$$

avec $\omega_C = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{b}}$ et $m = \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$.

- **Filtre passe-haut**

Compte tenu de la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \dfrac{1}{\underline{s}}$, la transmittance normalisée du filtre passe-haut du second ordre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \dfrac{a}{\underline{s}} + \dfrac{b}{\underline{s}^2}} = \frac{\dfrac{\underline{s}^2}{b}}{1 + \dfrac{a}{b}\underline{s} + \dfrac{\underline{s}^2}{b}}.$$

ce qui conduit à

$$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dfrac{1}{b}\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right) + \dfrac{1}{b}\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

de la forme

$$\boldsymbol{\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}},$$

avec $\omega_C = \omega_0\sqrt{b}$ et $m = \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$.

• **Filtre passe-bande**

Compte tenu de la transformation

$$\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}}\right),$$

la transmittance normalisée du filtre passe-bande du 2e ordre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \dfrac{a}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)} = \frac{\dfrac{\Delta x}{a}\,\underline{s}}{1 + \dfrac{\Delta x}{a}\,\underline{s} + \underline{s}^2},$$

ce qui conduit à :

$$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dfrac{\Delta x}{a}\left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \dfrac{\Delta x}{a}\left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

de la forme :

$$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec $\omega_C = \omega_0$ et $m = \dfrac{\Delta x}{2a}$.

La mise en facteurs de la transmittance $\underline{T}(\underline{s})$ ne présente pas d'intérêt pour les filtres passifs, dans la mesure où la fonction de transfert de chaque cellule élémentaire L, C dépend de la charge apportée par la cellule suivante. Par contre, les filtres actifs, en mettant en œuvre des amplificateurs opérationnels, permettent de réaliser des étages élémentaires dont la résistance de sortie est quasiment nulle. La fonction de transfert de chaque cellule devient ainsi indépendante de la charge apportée par l'étage suivant et le filtre peut être réalisé en montant en cascade des filtres élémentaires dont les transmittances ont été déterminées indépendamment.

Nous exposerons, dans les paragraphes suivants, des structures de filtres, utilisant des amplificateurs opérationnels, et permettant de réaliser les transmittances :

$$\frac{A}{1 + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}}, \quad \frac{A\,\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_C}}{1 + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}}, \quad \frac{A}{1 + 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

$$\frac{A\left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}, \quad \frac{A \times 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + 2\mathrm{j}m\,\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

(où A est l'amplification dans la bande passante).

REMARQUES

1) *Dans le cas d'un filtre de Butterworth, $\underline{T}(\underline{s})$ apparaît sous la forme*

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + \underline{s})(1 + a\underline{s} + \underline{s}^2)(1 + a'\underline{s} + \underline{s}^2)\ldots}.$$

Dans chaque parenthèse, les coefficients des termes constants et des termes en $\underline{s}^2$ sont égaux à 1, ce qui conduit, après dénormalisation à

$$\underline{T}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\left(1 + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\left[1 + \mathrm{j}a\,\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\left[1 + \mathrm{j}a'\,\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

Les pulsations caractéristiques de toutes les cellules élémentaires sont égales à ω_0.

Cette propriété n'apparaît pas pour les filtres de Chebychev, pour lesquels ces pulsations sont décalées provoquant ainsi l'ondulation de la fonction de transfert dans la bande-passante.

2) *Pour les filtres passe-bande, la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \dfrac{1}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)$ appliquée à la fonction de transfert du deuxième ordre,*

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + a\underline{s} + \underline{s}^2},$$

conduit à

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \dfrac{a}{\Delta x}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right) + \dfrac{1}{\Delta_x^2}\left(\underline{s} + \dfrac{1}{\underline{s}}\right)^2} = \frac{\Delta_x^2\,\underline{s}^2}{(1 + \underline{s}^2)^2 + a\,\Delta x\,\underline{s}(1 + \underline{s}^2) + \Delta_x^2\,\underline{s}^2}.$$

Les coefficients a et Δx étant réels, $\underline{T}(\underline{s})$ peut être écrit sous forme d'un produit de deux fonctions de transfert du deuxième ordre :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}\,\Delta x}{1 + a'\underline{s} + \underline{s}^2} \times \frac{\underline{s}\,\Delta x}{1 + a''\underline{s} + \underline{s}^2}.$$

1. FILTRES ACTIFS DU PREMIER ORDRE

1.1. FILTRES PASSE-BAS

La forme générale de leur transmittance est

$$\underline{T} = A\,\frac{1}{1 + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_C}}.$$

1.1.1. Filtre inverseur

Sur le schéma de la figure 1 on écrit

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{-\dfrac{R}{R_1}}{1 + \mathrm{j}RC\omega},$$

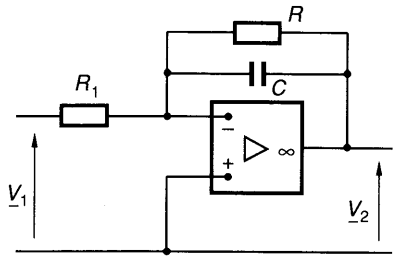


Fig. 1

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = A\,\frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}, \quad \text{avec } A = -\frac{R}{R_1} \text{ et } \omega_C = \frac{1}{RC}.$$

1.1.2. Filtre non inverseur

Sur le schéma de la figure 2, l'égalité des tensions sur l'entrée + $\left(\underline{V_+} = \underline{V_1}\,\dfrac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right)$ et sur l'entrée − $\left(\underline{V_-} = \underline{V_2}\,\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$ conduit à

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

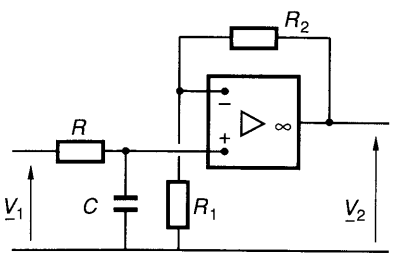


Fig. 2

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = A\,\frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}, \quad \text{avec } A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \text{ et } \omega_C = \frac{1}{RC}.$$

1.2. FILTRE PASSE-HAUT

La forme générale de leur transmittance est

$$\underline{T} = A\,\frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}.$$

Sur le schéma de la figure 3 on écrit

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = -\frac{R}{r + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = -\frac{R}{r} \cdot \frac{\mathrm{j}rC\omega}{1 + \mathrm{j}rC\omega}$$

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}}, \quad \text{avec } A = -\frac{R}{r} \text{ et } \omega_C = \frac{1}{rC}.$$

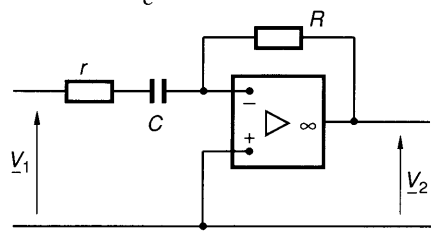


Fig. 3

2. FILTRES ACTIFS DU SECOND ORDRE

2.1. FILTRES ASSOCIANT QUADRIPÔLES ET AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

Le schéma général de cette famille de filtres est donné à la figure 4.

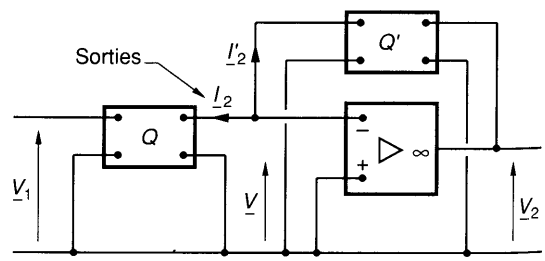


Fig. 4

Les sorties des deux quadripôles Q et Q' sont reliées à l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel. Soient respectivement $\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{12}$, $\underline{Y}_{21}$, $\underline{Y}_{22}$ et $\underline{Y}'_{11}$, $\underline{Y}'_{12}$, $\underline{Y}'_{21}$ et $\underline{Y}'_{22}$ les paramètres admittance des deux quadripôles. À partir des équations

$$\begin{cases} \underline{I}'_2 = \underline{Y}'_{21}\underline{V}_2 + \underline{Y}'_{22}\underline{V}, \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}, \\ \underline{V} = 0, \\ \underline{I}_2 = -\underline{I}'_2 \end{cases}$$

il vient : $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = -\dfrac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}'_{21}}$.

Compte tenu de cette relation, et par un choix judicieux des quadripôles Q et Q', il est possible de synthétiser une fonction de transfert.

2.1.1. Filtre passe-bas

Le quadripôle Q est conforme au schéma de la figure 5.

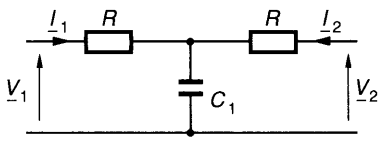


Fig. 5

Le paramètre $\underline{Y}_{21}$, calculé par $\underline{Y}_{21} = \left(\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1}\right)_{\underline{V}_2 = 0}$, est égal à

$$\underline{Y}_{21} = -\frac{1}{R} \times \frac{\dfrac{R}{1 + \mathrm{j}RC_1\omega}}{R + \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}RC_1\omega}} = -\frac{1}{R} \times \frac{1}{2 + \mathrm{j}RC_1\omega}.$$

Le quadripôle Q' est conforme au schéma de la figure 6.

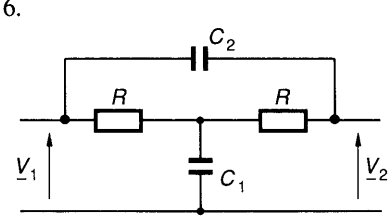


Fig. 6

Il résulte de la mise en parallèle du quadripôle de la figure 5 et du quadripôle Q'' de la figure 7 dont le paramètre $\underline{Y}''_{21}$ est égal à $\underline{Y}''_{21} = -\mathrm{j}C_2\omega$.

Le paramètre $\underline{Y}'_{21}$ calculé par $\underline{Y}'_{21} = \underline{Y}_{21} + \underline{Y}''_{21}$ est égal à :

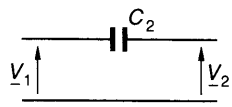


Fig. 7

$$\underline{Y}'_{21} = -\left(\mathrm{j}C_2\omega + \frac{1}{R} \times \frac{1}{2 + \mathrm{j}RC_1\omega}\right) = -\frac{1}{R} \times \frac{1 + 2\mathrm{j}RC_2\omega + R^2C_1C_2(\mathrm{j}\omega)^2}{2 + \mathrm{j}RC_1\omega}.$$

La fonction de transfert du filtre s'établit ainsi à

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}'_{21}} = -\frac{1}{1 + 2\mathrm{j}RC_2\omega + (\mathrm{j}R\sqrt{C_1C_2}\,\omega)^2},$$

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec

$$A = -1, \quad \omega_C = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}, \quad m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}.$$

2.1.2. Filtre passe-haut

Les quadripôles Q et Q' sont respectivement conformes aux schémas des figures 8 et 9.

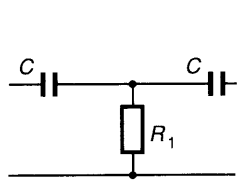


Fig. 8

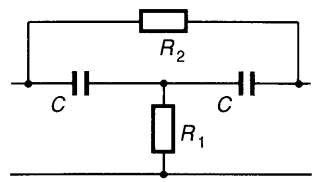


Fig. 9

Par un calcul analogue au précédent, on établit la transmittance

$$\underline{T} = A\frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec

$$A = -1, \quad \omega_C = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}, \quad m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

2.1.3. Filtre passe-bande

Le quadripôle Q' est conforme au schéma de la figure 9, son paramètre $\underline{Y}'_{21}$ est égal à

$$\underline{Y'_{21}} = -\frac{1}{R_2} - \frac{\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}R_1C\omega}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}R_1C\omega}}\mathrm{j}C\omega$$

$$= -\frac{1+2\mathrm{j}R_1C\omega + C^2R_1R_2(\mathrm{j}\omega)^2}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)}.$$

Le schéma du quadripôle Q est donné à la figure 10.

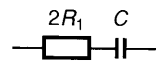


Fig. 10

Son paramètre $\underline{Y_{21}}$ est égal à

$$\underline{Y_{21}} = -\frac{1}{2R_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = -\frac{\mathrm{j}R_2C\omega}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)}$$

La transmittance du filtre s'établit ainsi à

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Y_{21}}}{\underline{Y'_{21}}} = \frac{-\mathrm{j}R_2C\omega}{1+2\mathrm{j}R_1C\omega+(\mathrm{j}\omega C\sqrt{R_1R_2})^2},$$

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1+2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}+\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec

$$A = -\frac{R_2}{2R_1},\quad \omega_C = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}},\quad m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

REMARQUE

Nous avons établi, au chapitre 2 du tome 1, que la bande passante à 3 db est égale à $2m\omega_C$. La valeur du coefficient d'amortissement m est donc d'autant plus faible que le filtre est plus sélectif. L'obtention d'une forte sélectivité nécessite l'emploi d'un amplificateur performant. Supposons, en effet, que le gain de l'amplificateur de la figure 4 soit égal à μ. À partir des équations

$$\begin{cases} \underline{V_2} = -\mu\underline{V}, \\ \underline{I_2} = \underline{Y_{21}}\,\underline{V_1} + \underline{Y_{22}}\,\underline{V}, \\ \underline{I'_2} = \underline{Y'_{21}}\,\underline{V_2} + \underline{Y'_{22}}\,\underline{V}, \\ \underline{I_2} + \underline{I'_2} = 0, \end{cases}$$

il vient $\underline{Y_{21}}\,\underline{V_1} + \underline{Y'_{21}}\,\underline{V_2} - \dfrac{\underline{V_2}}{\mu}(\underline{Y_{22}} + \underline{Y'_{22}}) = 0.$

À partir des figures 9 et 10, on détermine

$$\underline{Y'_{21}} = -\frac{1+2\mathrm{j}R_1C\omega + C^2R_1R_2(\mathrm{j}\omega)^2}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)},$$

$$\underline{Y'_{22}} = +\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}R_1C\omega}}$$

$$= \frac{1+\mathrm{j}C\omega(2R_1+R_2)+(\mathrm{j}\omega)^2R_1R_2C^2}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)},$$

$$\underline{Y_{21}} = -\frac{\mathrm{j}R_2C\omega}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)},\quad \underline{Y_{22}} = \frac{\mathrm{j}R_2C\omega}{R_2(1+2\mathrm{j}R_1C\omega)}.$$

Pour un amplificateur opérationnel d'usage courant, la fonction de transfert μ est complexe et s'écrit

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}.$$

En négligeant les termes du troisième ordre et en sachant que $\mu_0 \gg 1$, la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{-\mathrm{j}R_2C\omega}{1+2\mathrm{j}R_1C\omega\left[1+\dfrac{R_1+R_2}{\mu_0R_1}+\dfrac{1}{2R_1C\mu_0\omega_0}\right]+(\mathrm{j}\omega C\sqrt{R_1R_2})^2\left[1+\dfrac{2(R_1+R_2)}{\omega_0\mu_0R_1R_2C}\right]}.$$

Considérons, par exemple, un filtre sélectif calé sur la fréquence $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2}\,C} = 10$ kHz, *dont la sélectivité impose* $m = \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} = \dfrac{1}{50}$ *et réalisé à l'aide d'un amplificateur de la série 080 pour lequel on relève* $\mu_0 = 10^5$ *et* $f_0 = 10$ Hz.

À partir des équations

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{50} \quad et \quad \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}\,C} = 2\pi \times 10^4,$$

il vient

$$\frac{2(R_1+R_2)}{\omega_0\mu_0R_1R_2C} \approx \frac{2}{\omega_0\mu_0R_1C} = \frac{200\pi\times10^4}{\omega_0\mu_0} = 1,$$

$$\frac{R_1+R_2}{\mu_0R_1} \approx \frac{R_2}{\mu_0R_1} = \frac{25\times10^2}{10^5} = 25\times10^{-3} \ll 1,$$

$$\frac{1}{2R_1C\mu_0\omega_0} = \frac{100\pi\times10^4}{2\omega_0\mu_0} = 0{,}25.$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit alors :

$$\underline{T} = \frac{-\mathrm{j}R_2C\omega}{1+2\mathrm{j}R_1C\omega[1{,}25]+(\mathrm{j}\omega C\sqrt{R_1R_2})^2[2]}.$$

- *La pulsation centrale s'écrit*

$$\omega'_C = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{R_1R_2}\,C} = \frac{\omega_C}{\sqrt{2}} = 0{,}7\omega_C.$$

- *Le facteur d'amortissement s'écrit*

$$m' = \frac{2R_1C\times1{,}25}{2\sqrt{2}\sqrt{R_1R_2}\,C} = \frac{1{,}25}{\sqrt{2}}m = 0{,}88m.$$

2.1.4. Filtre réjecteur

La structure de la figure 4 autorise la réalisation d'un filtre réjecteur dont la transmittance est de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_C} + \left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}.$$

Le quadripôle Q est réalisé par un *double T* conformément au schéma de la figure 11.

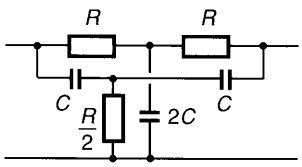
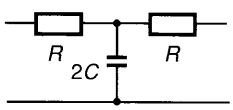


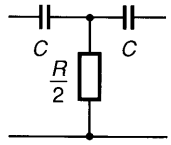
Fig. 11

Ce quadripôle résulte de la mise en parallèle de deux quadripôles élémentaires S (*fig.* 12) et S' (*fig.* 13).



Quadripôle S

Fig. 12



Quadripôle S'

Fig. 13

pour lesquels on détermine respectivement

$$\underline{Y}_{21s} = -\frac{1}{2R(1+jRC\omega)} \quad \text{pour le quadripôle } S;$$

$$\underline{Y}_{21s'} = -\frac{(jC\omega R)^2}{2R(1+jRC\omega)} \quad \text{pour le quadripôle } S'.$$

D'où l'on déduit :

$$\underline{Y}_{21} = -\frac{1+(jRC\omega)^2}{2R(1+jRC\omega)} \quad \text{pour le quadripôle } Q.$$

Le quadripôle Q' est réalisé par un *T ponté* conformément au schéma de la figure 14.

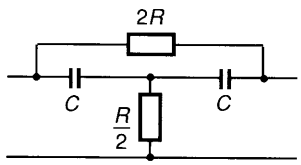


Fig. 14

Il résulte de la mise en parallèle du quadripôle S' de la figure 13 et du quadripôle S'' de la figure 15 dont le paramètre $\underline{Y}_{21s''}$ est égal à

$$\underline{Y}_{21s''} = -\frac{1}{2R}.$$

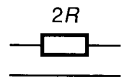


Fig. 15 Quadripôle S''

Le paramètre $\underline{Y}'_{21}$ du quadripôle Q' s'établit donc à

$$\underline{Y}'_{21} = -\left(\frac{1}{2R} + \frac{(jRC\omega)^2}{2R(1+jRC\omega)}\right) = -\frac{1+jRC\omega+(jRC\omega)^2}{2R(1+jRC\omega)},$$

ce qui conduit à la transmittance

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}'_{21}} = -\frac{1+(jRC\omega)^2}{1+jRC\omega+(jRC\omega)^2},$$

qui est bien de la forme

$$\underline{T} = A\,\frac{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_C}+\left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec $\begin{cases} A = -1, \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}, \\ m = 0{,}5. \end{cases}$

Il a été démontré au chapitre 2 du tome 1 que les limites de la bande rejetée s'établissent à

$$\left.\begin{aligned} [m+\sqrt{1+m^2}]\omega_C &= 1{,}618\omega_C \\ [-m+\sqrt{1+m^2}]\omega_C &= 0{,}618\omega_C \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } m = 0{,}5.$$

La largeur de la bande rejetée à 3 db, égale à ω_C, peut être trop importante.

Il est possible de réaliser un filtre réjecteur à sélectivité variable à l'aide du dispositif de la figure 16.

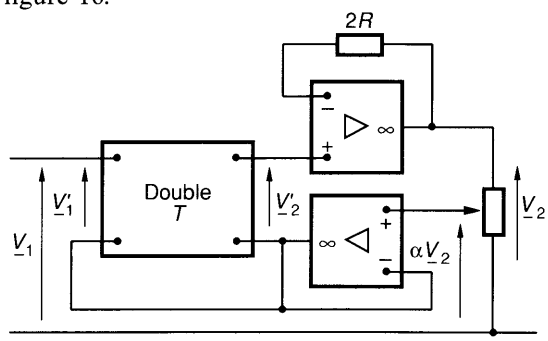


Fig. 16

La fonction de transfert du quadripole en *double T* est égale (voir tome I, chapitre 2) à

$$\frac{\underline{V}'_2}{\underline{V}'_1} = \frac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{1 + 4\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}.$$

Compte tenu des relations $\begin{cases} \underline{V}_2 = \underline{V}'_2 + \alpha \underline{V}_2 \\ \underline{V}_1 = \underline{V}'_1 + \alpha \underline{V}_2 \end{cases}$, le dispositif de la figure 16 peut être décrit par le schéma-bloc de la figure 17.

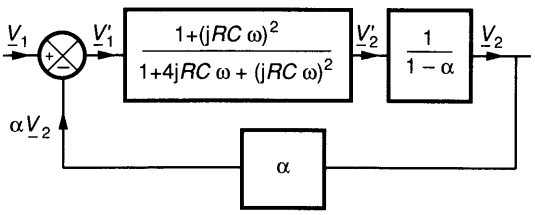


Fig. 17

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$\underline{T} = \frac{\dfrac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{1 + 4\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2} \times \dfrac{1}{1-\alpha}}{1 + \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \times \dfrac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{1 + 4\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}}$$

$$= \frac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{1 + 4(1-\alpha)\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}.$$

Elle est de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{1 + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $\begin{cases} A = 1, \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}, \\ m = 2(1-\alpha). \end{cases}$

Il s'agit donc bien d'un filtre réjecteur centré sur la pulsation $\omega_C = \dfrac{1}{RC}$, et dont la bande rejetée à 3 db a pour largeur $2m\omega_C = 4(1-\alpha)\omega_C$.

La sélectivité du filtre, réglable par α, peut devenir très importante lorsque α se rapproche de l'unité.

2.2. STRUCTURE DE RAUCH

Cette famille de filtres est décrite par le schéma de la figure 18, sur lequel $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$, $\underline{Y}_5$ sont des admittances.

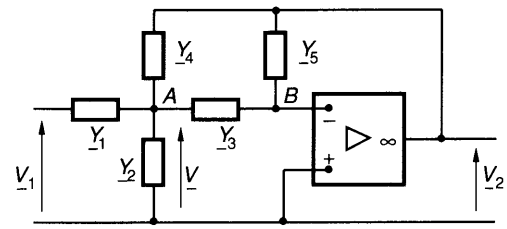


Fig. 18

La loi des nœuds, appliquée aux points A et B, conduit aux équations

$$\begin{cases} \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}) = \underline{Y}_2\underline{V} + \underline{Y}_3\underline{V} + \underline{Y}_4(\underline{V} - \underline{V}_2) \\ \underline{Y}_3\underline{V} = -\underline{Y}_5\underline{V}_2 \end{cases}$$

par élimination de $\underline{V}$, il vient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = -\frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}.$$

Les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$, $\underline{Y}_5$ sont réalisées par des résistances $\left(\underline{Y} = \dfrac{1}{R}\right)$ ou par des condensateurs $(\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega)$.

2.2.1. Filtre passe-bas

Le numérateur de la transmittance à synthétiser,

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$ étant réel, les

admittances $\underline{Y}_1$ *et* $\underline{Y}_3$ doivent être réalisées par des résistances. La présence d'un terme en $(\mathrm{j}\omega)^2$ au dénominateur impose alors que $\underline{Y}_5$ corresponde à un condensateur. Le terme réel ne peut ainsi être réalisé que par $\underline{Y}_3\underline{Y}_4$ ce qui impose pour $\underline{Y}_4$ le choix d'une résistance. Pour terminer, le terme en $(\mathrm{j}\omega)^2$, ne pouvant provenir que de $\underline{Y}_5$ et $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_2$ correspond à un condensateur. Posons donc

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}; \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3}; \quad \underline{Y}_4 = \frac{1}{R_2};$$
$$\underline{Y}_2 = \mathrm{j}C_2\omega; \quad \underline{Y}_5 = \mathrm{j}C_1\omega.$$

La transmittance s'établit à

$$\underline{T} = -\frac{\dfrac{1}{R_1 R_3}}{\dfrac{1}{R_2 R_3} + jC_1\omega\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+jC_2\omega\right)}$$

Dans le cas particulier où toutes les résistances sont égales à R, il vient :

$$\underline{T} = -\frac{1}{1+j\omega 3RC_1+(j\omega R\sqrt{C_1C_2})^2}$$

qui est bien la transmittance d'un filtre passe-bas du 2e ordre avec

$$\begin{cases} A &= -1 \\ \omega_C &= \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}, \\ m &= \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}}. \end{cases}$$

La résolution des équations précédentes, en prenant R, m et ω_C comme paramètres,

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{3}{2mR\omega_C}, \\ C_1 = \dfrac{2m}{3R\omega_C}, \end{cases}$$

permet de calculer les capacités C_1 et C_2, compte tenu de la transmittance souhaitée.

2.2.2. Filtre passe-haut

On montrerait, par un raisonnement dual, que la réalisation d'un filtre passe-haut du deuxième ordre impose

$$\underline{Y}_1 = jC_1\omega; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2}; \quad \underline{Y}_3 = jC_3\omega;$$
$$\underline{Y}_4 = jC_2\omega; \quad \underline{Y}_5 = \frac{1}{R_1}.$$

Ce qui conduit à la transmittance

$$\underline{T} = -\frac{C_1C_3(j\omega)^2}{\dfrac{1}{R_1}\left[\dfrac{1}{R_2}+j\omega(C_1+C_2+C_3)\right]+C_2C_3(j\omega)^2}.$$

Dans le cas particulier où toutes les capacités sont égales à C, il vient :

$$T = -\frac{(j\omega C\sqrt{R_1R_2})^2}{1+j\omega 3R_2C+(j\omega C\sqrt{R_1R_2})^2}$$

qui est bien la transmittance d'un filtre passe-haut du 2e ordre

$$\text{avec} \begin{cases} A &= -1, \\ \omega_C &= \dfrac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}, \\ m &= \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}, \end{cases}$$

où en prenant C, m et ω_C comme paramètres

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{3}{2mC\omega_C}, \\ R_2 = \dfrac{2m}{3C\omega_C}. \end{cases}$$

2.2.3. Filtre passe-bande

A partir de la structure de Rauch (*fig.* 18), on peut réaliser un filtre passe-bande en prenant comme admittances

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2}; \quad \underline{Y}_3 = jC_2\omega;$$
$$\underline{Y}_4 = jC_1\omega; \quad \underline{Y}_5 = \frac{1}{R_3}.$$

La fonction de transfert s'établit à

$$\underline{T} = -\frac{j\dfrac{C_2\omega}{R_1}}{\dfrac{1}{R_3}\left[\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+j(C_1+C_2)\omega\right]+(j\omega)^2C_1C_2}.$$

Dans le cas particulier où les capacités sont égales à C

$$\underline{T} = -\frac{jR_2R_3C\omega}{R_1+R_2+j\omega R_1R_2 2C+(j\omega C)^2R_1R_2R_3}$$
$$= -\frac{R_3}{2R_1} \times \frac{j\omega 2\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C}{1+j\omega 2\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C+(jC\omega)^2R_3\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}.$$

Il s'agit bien de la transmittance d'un filtre passe-bande

$$\text{avec} \begin{cases} A &= -\dfrac{R_3}{2R_1}, \\ \omega_C &= \dfrac{1}{C}\sqrt{\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2R_3}}, \\ m &= \sqrt{\dfrac{R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)}}. \end{cases}$$

La bande passante à 3 db est égale à

$\Delta\omega = 2m\omega_C = \dfrac{2}{R_3 C}$. Les équations précédentes peuvent être résolues en calculant les résistances R_1, R_2, R_3 en fonction de C, ω_C, A et $\Delta\omega$

$$\begin{cases} R_3 = \dfrac{2}{C\,\Delta\omega}, \\ R_1 = -\dfrac{R_3}{2A} = -\dfrac{1}{AC\,\Delta\omega}, \\ R_2 = \dfrac{R_1}{R_1 R_3 C^2 \omega_C^2 - 1} = \dfrac{1}{C} \times \dfrac{\Delta\omega}{2\omega_C^2 + A\,\Delta^2\omega}. \end{cases}$$

Dans le cas particulier d'un filtre très sélectif, la condition $A\,\Delta^2\omega \ll 2\omega_C^2$ peut être réalisée et l'expression de la résistance R_2 devient $R_2 \approx \dfrac{\Delta\omega}{2C\omega_C^2}$.

Le réglage du filtre présente alors une grande souplesse compte tenu du nombre réduit de composants; en effet, la capacité C étant fixée

– la bande passante $\Delta\omega$ peut être ajustée par la résistance $R_3 \left(R_3 = \dfrac{2}{C\,\Delta\omega}\right)$;

– après avoir fixé la bande passante $\Delta\omega$, l'accord sur la pulsation ω_C est réalisée par la résistance $R_2, \left(R_2 = \dfrac{\Delta\omega}{2C\omega_C^2}\right)$, et l'amplification A est ajustée par la résistance $R_1, \left(R_1 = -\dfrac{1}{AC\,\Delta\omega}\right)$.

REMARQUE

Le rapport des résistances

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{4\omega_C^2}{\Delta^2\omega} \quad \textit{et} \quad \frac{R_1}{R_2} = -\frac{1}{A} \times \frac{2\omega_C^2}{\Delta^2\omega}$$

devient trop important dans le cas d'un filtre très sélectif. Il est alors possible de modifier la structure comme l'indique le schéma de la figure 19.

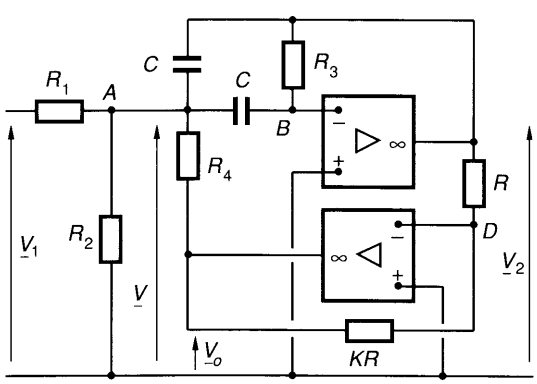


Fig. 19

La loi des nœuds écrite aux points A, B et D conduit aux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{V}_1 - \underline{V}}{R_1} = \dfrac{\underline{V}}{R_2} + \mathrm{j}C\omega\underline{V} + \dfrac{\underline{V} - \underline{V}_0}{R_4} + \mathrm{j}C\omega(\underline{V} - \underline{V}_2), \\ \mathrm{j}C\omega\underline{V} = -\dfrac{\underline{V}_2}{R_3}, \\ \dfrac{\underline{V}_2}{R} = -\dfrac{\underline{V}_0}{KR}, \end{cases}$$

desquelles on déduit :

$$\frac{\underline{V}_1}{R_1} = \underline{V}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + 2\mathrm{j}C\omega\right] - \frac{\underline{V}_0}{R_4} - \mathrm{j}C\omega\underline{V}_2.$$

La transmittance du filtre s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = -\frac{\dfrac{1}{R_1}}{\mathrm{j}C\omega - \dfrac{K}{R_4} + \dfrac{1}{\mathrm{j}R_3 C\omega}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4} + 2\mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$= -\frac{\dfrac{R_3}{R_1}}{\left(2 - K\dfrac{R_3}{R_4}\right)} \times \frac{\dfrac{\mathrm{j}C\omega\left(2 - K\dfrac{R_3}{R_4}\right)}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}}}{1 + \dfrac{\mathrm{j}C\omega\left(2 - K\dfrac{R_3}{R_4}\right)}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}} + (\mathrm{j}C\omega)^2 \dfrac{R_3}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}}}.$$

Cette transmittance est de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\dfrac{R_3}{R_1}}{2 - K\dfrac{R_3}{R_4}}, \\ \omega_C = \dfrac{1}{C}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}}{R_3}}, \\ \dfrac{2m}{\omega_C} = \dfrac{\left(2 - K\dfrac{R_3}{R_4}\right)C}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}}. \end{cases}$$

La bande passante $\Delta\omega = 2m\omega_C$ s'établit à

$$\Delta\omega = \frac{1}{R_3 C}\left(2 - K\frac{R_3}{R_4}\right).$$

Il est ainsi possible, en faisant tendre $K\dfrac{R_3}{R_4}$ vers 2, d'obtenir une bande passante très étroite. Remarquons cependant que si $K\dfrac{R_3}{R_4}$ dépasse 2, le coefficient d'amortissement m devient négatif et le système est instable.

2.3. STRUCTURE DE SALLEN ET KEY

Cette famille de filtres est décrite par le schéma de la figure 20.

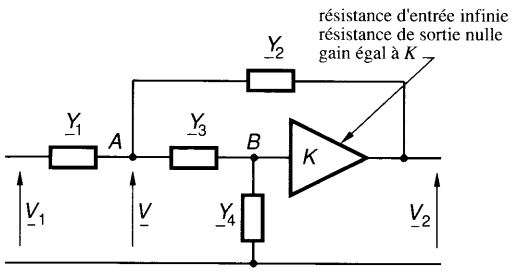


Fig. 20

Elle fait intervenir un amplificateur de tension de gain K, de résistance d'entrée infinie et de résistance de sortie nulle, qui peut être réalisé par l'amplificateur non inverseur de la figure 21 (avec $K = \dfrac{r_1 + r_2}{r_1}$).

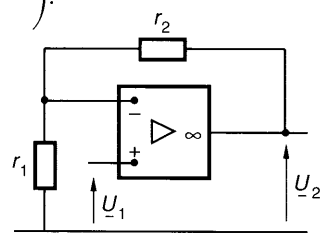


Fig. 21

Sur le schéma de la figure 20, la loi des nœuds appliquée aux points A et B, permet d'écrire, en fonction des admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$

$$\begin{cases} \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}) = \underline{Y}_2(\underline{V} - \underline{V}_2) + \underline{Y}_4\dfrac{\underline{V}_2}{K}, \\ \underline{Y}_4\dfrac{\underline{V}_2}{K} = \underline{Y}_3\left(\underline{V} - \dfrac{\underline{V}_2}{K}\right). \end{cases}$$

De ceci on déduit, par élimination de $\underline{V}$

$$\underline{Y}_1\underline{V}_1 = \underline{V}_2\left(\frac{\underline{Y}_4}{K} - \underline{Y}_2\right) + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\left(1 + \frac{\underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\right)\frac{\underline{V}_2}{K}.$$

Ce qui conduit à la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{K\underline{Y}_1\underline{Y}_3}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3(\underline{Y}_4 - K\underline{Y}_2)}.$$

Les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$ sont réalisées par des résistances $\left(\underline{Y} = \dfrac{1}{R}\right)$ ou par des capacités $(\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega)$.

2.3.1. Filtre passe-bas

Le numérateur de la transmittance à synthétiser étant réel, $\left(\underline{T} = \dfrac{A}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}\right)$, les admittances $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ doivent être réalisées par des résistances. La présence d'un terme en $(\mathrm{j}\omega)^2$ au dénominateur impose alors que $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ correspondent à des capacités

Posons donc : $\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{R_1}$; $\underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R_2}$; $\underline{Y}_2 = \mathrm{j}C_2\omega$; $\underline{Y}_4 = \mathrm{j}C_1\omega$.

La transmittance s'établit ainsi à :

$$\underline{T} = \frac{K}{(1+\mathrm{j}R_1C_2\omega)(1+\mathrm{j}R_2C_1\omega)+\mathrm{j}\omega R_1(C_1 - KC_2)}.$$

Dans le cas particulier où les deux résistances sont égales, il vient :

$$\underline{T} = \frac{K}{1 + \mathrm{j}R\omega[2C_1 + C_2(1-K)] + (\mathrm{j}\omega R\sqrt{C_1C_2})^2}$$

transmittance qui est bien de la forme

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $\begin{cases} A = K, \\ \omega_C = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}, \\ m = \sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}} \times \dfrac{1-K}{2}. \end{cases}$

REMARQUES

1° *Le coefficient K n'intervient pas dans l'expression de la pulsation caractéristique ω_C. Dans le cas où les deux capacités sont elles-mêmes égales à C, il vient :*

$$\begin{cases} A = K, \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}, \\ m = \dfrac{3-K}{2}. \end{cases}$$

Cette structure est alors particulièrement bien adaptée à la réalisation de filtres de Butterworth pour lesquels les pulsations caractéristiques de toutes les cellules sont égales à ω_0. Le filtre définitif est obtenu en plaçant en cascade des étages dont les éléments R et C sont tous identiques et dont le coefficient K (réglable par les résistances r_1 et r_2) ne dépend que d'ordre du filtre et peut être consigné dans des tables.

2° *L'existence du signe − dans l'expression de m, montre que le système peut devenir instable. En particulier dans le cas où $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C, m = \dfrac{3-K}{2}$; la stabilité, imposant que le facteur d'amortissement m ne puisse pas devenir négatif, limite K à une valeur maximale égale à 3.*

2.3.2. Filtre passe-haut

On peut établir, par un raisonnement dual, que la synthèse d'un filtre passe-haut du deuxième ordre impose

$$\underline{Y}_1 = jC_1\omega; \quad \underline{Y}_3 = jC_2\omega; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2}; \quad \underline{Y}_4 = \frac{1}{R_1}.$$

La transmittance s'établit alors à :

$$\underline{T} = K \times \frac{(j\omega)^2 C_1 C_2 R_1 R_2}{(1+jR_2C_1\omega)(1+jR_1C_2\omega)+jC_2\omega(R_2-KR_1)}$$

Elle est bien de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1+2jm\dfrac{\omega}{\omega_C}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2},$$

avec
$$\begin{cases} A = K, \\ \omega_C = \dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}, \\ m = \dfrac{1}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}\,[R_2(C_1+C_2)+R_1C_2(1-K)]. \end{cases}$$

2.3.3. Filtre passe-bande

A partir du schéma de la figure 20, on peut réaliser un filtre passe-bande en prenant comme admittances :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R}, \quad \underline{Y}_3 = jC\omega, \quad \underline{Y}_4 = \frac{1}{R} + jC\omega$$

(l'admittance $\underline{Y}_4$ résulte de la mise en parallèle de la résistance R et de la capacité C).

La transmittance s'établit alors à :

$$\underline{T} = \frac{K\dfrac{jC\omega}{R_1}}{\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R}\right)\left(\dfrac{1}{R}+2jC\omega\right)+jC\omega\left(\dfrac{1}{R}+jC\omega-\dfrac{K}{R}\right)}$$

$$= \frac{jRC\omega \times KR}{(R+R_1)(1+2jRC\omega)+jRR_1C\omega(1-K+jRC\omega)}$$

$$= \frac{KR}{[2R+R_1(3-K)]} \times \frac{jRC\omega\left[2+(1-K)\dfrac{R_1}{R+R_1}\right]}{\left[1+jRC\omega\left[2+(1-K)\dfrac{R_1}{R+R_1}\right]+(jRC\omega)^2\dfrac{R_1}{R+R_1}\right]}.$$

Cette transmittance est bien de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{2jm\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1+2jm\dfrac{\omega}{\omega_C}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec
$$\begin{cases} A = \dfrac{KR}{2R+R_1(3-K)}, \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}\sqrt{1+\dfrac{R}{R_1}}, \\ m = \dfrac{2R+R_1(3-K)}{2\sqrt{R_1(R+R_1)}}. \end{cases}$$

La bande passante s'établit à :

$$\Delta\omega = 2m\omega_C = \frac{2}{RC}\sqrt{\frac{R+R_1}{R_1}}\,\frac{2R+R_1(3-K)}{2\sqrt{R_1(R+R_1)}}$$

$$= \frac{1}{RC}\left[2\frac{R}{R_1}+3-K\right].$$

Il est ainsi possible de régler la sélectivité par le coefficient $K = \dfrac{r_1+r_2}{r_1}$, et ce indépendamment de la pulsation caractéristique ω_C. Il est cependant à remarquer que si K devient supérieur à $3+2\dfrac{R}{R_1}$, le coefficient d'amortissement m devient négatif et le système est instable.

2.4. STRUCTURE UTILISANT UN CONVERTISSEUR À IMPÉDANCE NÉGATIVE

Cette structure n'est pratiquement utilisée que pour réaliser un filtre passe-bande.

2.4.1. Convertisseur à impédance négative

Le convertisseur à impédance négative est un quadripôle qui possède les propriétés suivantes :

- s'il est fermé sur une impédance de charge $\underline{Z}_L$, il présente l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = -\dfrac{\underline{Z}_L}{K}$ (où K est un entier positif);
- s'il est attaqué par un générateur d'impédance interne $\underline{Z}_g$, il possède une impédance de sortie $\underline{Z}_S = -K\underline{Z}_g$.

Un tel quadripôle peut être réalisé par le dispositif de la figure 22.

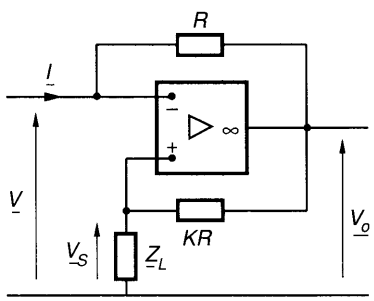


Fig. 22

A partir des équations $\begin{cases} \underline{I} = \dfrac{(\underline{V} - \underline{V}_0)}{R}, \\ \underline{V} = \underline{V}_0 \dfrac{\underline{Z}_L}{KR + \underline{Z}_L}. \end{cases}$

On calcule l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R \times \frac{1}{1 - \dfrac{KR + \underline{Z}_L}{\underline{Z}_L}} = -\frac{\underline{Z}_L}{K},$$

qui est bien de la forme souhaitée.

Le calcul de la résistance de sortie est effectué sur le schéma de la figure 23.

À partir des équations $\begin{cases} \underline{V}_S = \underline{V}_0 \dfrac{\underline{Z}_g}{\underline{Z}_g + R}. \\ \underline{I}_S = \dfrac{\underline{V}_S - \underline{V}_0}{KR}. \end{cases}$

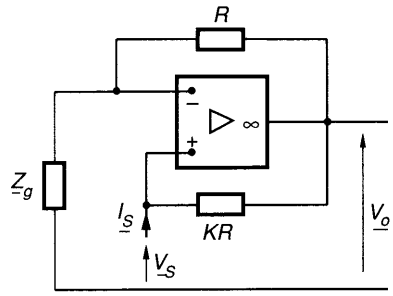


Fig. 23

On détermine l'impédance de sortie

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{V}_S}{\underline{I}_S} = \frac{KR}{1 - \dfrac{\underline{Z}_g + R}{\underline{Z}_g}} = -K\underline{Z}_g$$

qui correspond bien à l'expression souhaitée.

2.4.2. Filtre passe-bande

Le convertisseur à impédance négative peut être utilisé pour réaliser un filtre passe-bande (*fig.* 24).

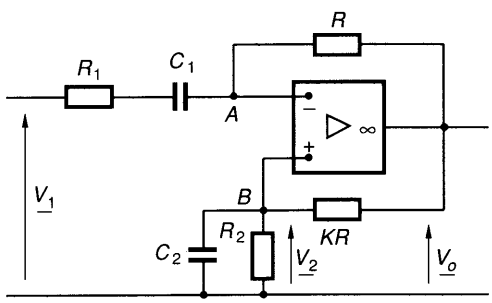


Fig. 24

L'écriture de la loi des nœuds aux points A et B conduit aux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{R_1 + \dfrac{1}{jC_1\omega}} = \dfrac{\underline{V}_2 - \underline{V}_0}{R}, \\ \underline{V}_2\left(\dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega\right) = \dfrac{\underline{V}_0 - \underline{V}_2}{KR}. \end{cases}$$

Par élimination de $\dfrac{\underline{V}_2 - \underline{V}_0}{R}$, il vient

$$\frac{(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)jC_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega} = -K\underline{V}_2 \frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}$$

ce qui conduit à la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{-\mathrm{j}R_2C_1\omega}{K(1+\mathrm{j}R_2C_2\omega)(1+\mathrm{j}R_1C_1\omega) - \mathrm{j}R_2C_1\omega}$$

$$= \frac{-R_2C_1}{[K(R_1C_1+R_2C_2)-R_2C_1]} \times \frac{\mathrm{j}\omega\left(R_1C_1+R_2C_2-\dfrac{R_2C_1}{K}\right)}{\left[1+\mathrm{j}\omega\left(R_1C_1+R_2C_2-\dfrac{R_2C_1}{K}\right)+(\mathrm{j}\omega)^2R_1C_1R_2C_2\right]}$$

Cette transmittance est bien de la forme

$$\underline{T} = A \times \frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1+2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}+\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec
$$\begin{cases} A = \dfrac{-R_2C_1}{K(R_1C_1+R_2C_2)-R_2C_1}, \\ \omega_C = \dfrac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}. \\ m = \dfrac{R_1C_1+R_2C_2-\dfrac{R_2C_1}{K}}{2\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}. \end{cases}$$

La bande passante à 3db s'établit à

$$\Delta\omega = 2m\omega_C = \frac{2m}{\omega_C}\times\omega_C^2 = \frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}-\frac{1}{KR_1C_2}.$$

Remarquons que contrairement aux autres structures, l'impédance de sortie du filtre n'est pas nulle. En effet toute charge placée en parallèle sur la sortie, modifie l'impédance (R_2, C_2) et perturbe la fonction de transfert.

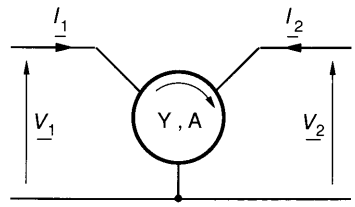
2.5. STRUCTURE UTILISANT UN GYRATEUR

2.5.1. Le gyrateur

Un gyrateur est un quadripôle actif (*fig.* 25) dont les paramètres « admittance » s'écrivent $\underline{Y}_{11} = 0$, $\underline{Y}_{22} = 0$, $\underline{Y}_{12} = -\dfrac{Y}{A}$, $\underline{Y}_{21} = AY$

avec $\begin{cases} A : \text{nombre réel positif.} \\ Y : \text{admittance réelle positive.} \end{cases}$

Il est donc décrit par les équations $\begin{cases} \underline{I}_1 = -\dfrac{Y}{A}\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 = AY\underline{V}_1 \end{cases}$.



La flèche incurvée permet de distinguer l'entrée et la sortie

Fig. 25

Simulation d'inductance

Supposons que le gyrateur soit fermé sur une capacité C.

À partir des équations

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -\dfrac{Y}{A}\underline{V}_2, \\ \underline{I}_2 = AY\underline{V}_1, \\ \underline{I}_2 = -\mathrm{j}C\omega\underline{V}_2, \end{cases}$$

il vient $\dfrac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = -\dfrac{A}{Y}\times\dfrac{1}{AY}\times\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2} = \mathrm{j}\dfrac{C}{Y^2}\omega.$

Le gyrateur, vu entre ses bornes d'entrée, est alors équivalent à une inductance $\dfrac{C}{Y^2}$. Il est ainsi possible de remplacer les inductances d'un filtre passif par des gyrateurs facilitant le réglage et supprimant les problèmes de vieillissement et de couplages parasites.

Réalisation du gyrateur

Considérons le schéma de la figure 26.

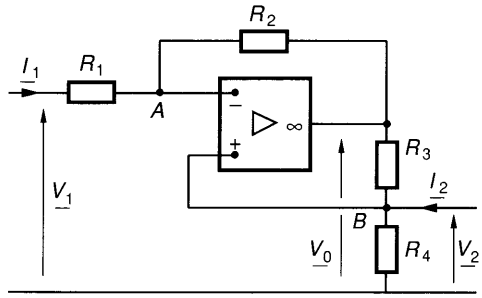


Fig. 26

La loi des nœuds appliquée aux points A et B conduit aux équations

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1-\underline{V}_2}{R_1} = \frac{\underline{V}_2-\underline{V}_0}{R_2},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{R_4}+\frac{\underline{V}_2-\underline{V}_0}{R_3},$$

soit $$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{R_4} + \frac{R_2}{R_1 R_3}(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)$$
$$= \underline{V}_2\left[\frac{1}{R_4} - \frac{R_2}{R_1 R_3}\right] + \frac{R_2}{R_1 R_3}\underline{V}_1.$$

En choisissant les résistances R_1, R_2, R_3, R_4 de telle sorte que

$$\boldsymbol{R_1 R_3 = R_2 R_4}$$

Il vient : $$\begin{cases} \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{V}_1}{R_1} - \dfrac{\underline{V}_2}{R_1}, \\ \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{V}_1}{R_4}. \end{cases}$$

Les paramètres admittance du quadripôle de la figure 26, s'écrivent donc

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1};\quad \underline{Y}_{12} = -\frac{1}{R_1};\quad \underline{Y}_{21} = \frac{1}{R_4};\quad \underline{Y}_{22} = 0.$$

Ce quadripôle résulte de la mise en parallèle des éléments suivants :

• un quadripôle Q dont les paramètres admittance sont

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1};\quad \underline{Y}_{12} = 0;\quad \underline{Y}_{21} = 0;\quad \underline{Y}_{22} = 0$$

qui est donc décrit par les équations $\begin{cases} \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{V}_1}{R_1} \\ \underline{I}_2 = 0 \end{cases}$

ce qui correspond au schéma de la figure 27;

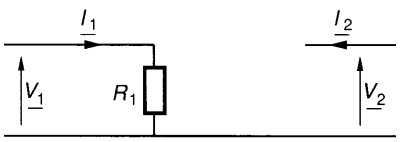


Fig. 27

• un gyrateur dont les paramètres A et Y sont solution de

$$\begin{cases} \underline{Y}_{12} = -\dfrac{Y}{A} = -\dfrac{1}{R_1} \\ \underline{Y}_{21} = AY = \dfrac{1}{R_4}. \end{cases}$$

soit $$\begin{cases} Y = \dfrac{1}{\sqrt{R_1 R_4}} \\ A = \sqrt{\dfrac{R_1}{R_4}} \end{cases}$$

Le dispositif de la figure 26 peut donc être décrit par le schéma de la figure 28.

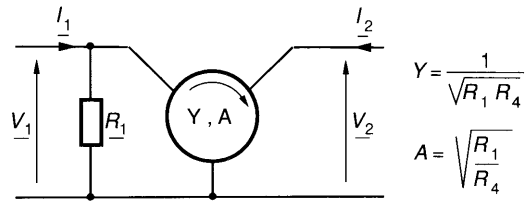


Fig. 28

Afin de s'affranchir de la résistance R_1, on place en parallèle sur l'entrée un dispositif qui présente la résistance $-R_1$ (la résistance équivalente à cette mise en parallèle, $\dfrac{-R_1^2}{R_1 - R_1}$, est infinie). Cette résistance $-R_1$ peut être obtenue à l'aide d'un convertisseur à impédance négative chargé par la résistance R_1. Le schéma complet du gyrateur est donné à la figure 29.

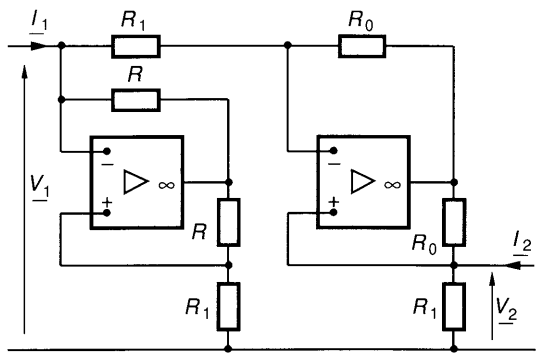


Fig. 29

2.5.2. Filtre passe-haut

Considérons le schéma de la figure 30, mettant en œuvre un gyrateur.

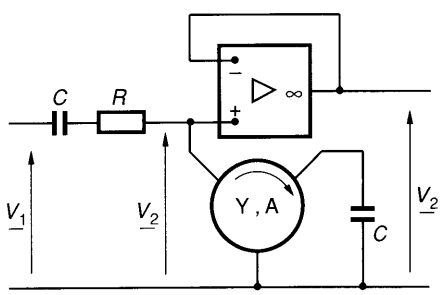


Fig. 30

Le gyrateur fait apparaître entre ses bornes d'entrée (sous la tension $\underline{V}_2$), l'inductance $\dfrac{C}{Y^2}$.

La fonction de transfert est obtenue par division potentiométrique

$$\underline{T} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{C\omega}{Y^2}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \dfrac{\mathrm{j}C\omega}{Y^2}} = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{j}C\omega}{Y}\right)^2}{1 + \mathrm{j}RC\omega + \left(\dfrac{\mathrm{j}C\omega}{Y}\right)^2}$$

transmittance de la forme

$$\underline{T} = A\,\frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $\begin{cases} A = 1 \\ \omega_C = \dfrac{Y}{C} \\ m = \dfrac{RY}{2} \end{cases}$

2.5.3. Filtre passe-bande

Considérons le schéma de la figure 31, dans lequel le coefficient A du gyrateur est égal à 1.

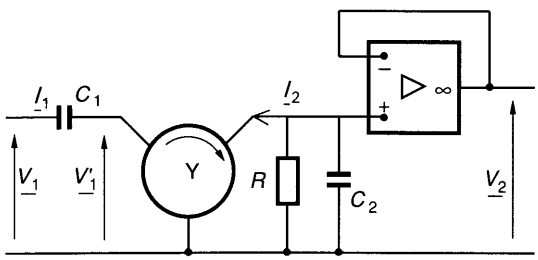


Fig. 31

À partir des équations :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \mathrm{j}C_1\omega(\underline{V}_1 - \underline{V}'_1) = -Y\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 = -\underline{V}_2\left[\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C_2\omega\right] = Y\underline{V}'_1 \end{cases}$$

on obtient, par élimination de $\underline{V}'_1$:

$$\mathrm{j}C_1\omega\left[\underline{V}_1 + \frac{\underline{V}_2}{Y}\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C_2\omega\right)\right] = -Y\underline{V}_2.$$

Ce qui conduit à la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{-\mathrm{j}C_1\omega}{Y + \dfrac{\mathrm{j}C_1\omega}{RY} + (\mathrm{j}\omega)^2\dfrac{C_1C_2}{Y}}$$

$$= -RY \times \frac{\dfrac{\mathrm{j}C_1\omega}{RY^2}}{1 + \dfrac{\mathrm{j}C_1\omega}{RY^2} + \left(\mathrm{j}\omega\dfrac{\sqrt{C_1C_2}}{Y}\right)^2}$$

Elle est de la forme

$$\underline{T} = A\,\frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $\begin{cases} A = -RY \\ \omega_C = \dfrac{Y}{\sqrt{C_1C_2}} \\ m = \dfrac{1}{2RY}\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}} \end{cases}$

La bande passante à 3 db s'établit à

$$\Delta\omega = 2m\omega_C = \frac{1}{RC_2}.$$

Remarquons que le dispositif présente une bonne souplesse de réglage : l'amplification étant fixée par R et Y, on procède au réglage de la bande passante par la capacité C_2 puis à l'accord du filtre par la capacité C_1.

2.6. LES RÉSEAUX À VARIABLES D'ÉTAT

2.6.1. Calcul analogique

Ce paragraphe nous ramène à l'origine de la dénomination des amplificateurs opérationnels. Au départ, ces composants étaient en effet destinés à réaliser les opérations élémentaires des équations différentielles (sommation, multiplication par un nombre, intégration). Ils permettent ainsi de simuler, par une réponse électrique, le fonctionnement d'un système physique quelconque régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Considérons, par exemple, le système dont les grandeurs d'entrée x et de sortie y sont liées par l'équation différentielle du second ordre

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy = x$$

la réponse peut être simulée par le dispositif de la figure 32.

En effet, à partir des équations écrites sur l'entrée — des deux intégrateurs :

$$\begin{cases} \dfrac{y_2}{R} = -C\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{y_1}{aR} = -C\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

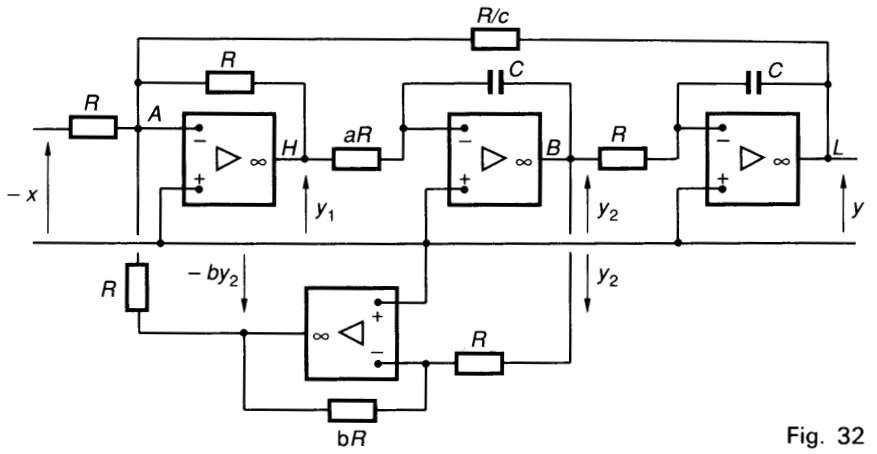


Fig. 32

il vient, en posant $t' = \dfrac{t}{RC}$,

$$\begin{cases} y_2 = -\dfrac{dy}{dt'} \\ y_1 = -a\dfrac{dy_2}{dt'} = a\dfrac{d^2y}{dt'^2} \end{cases}$$

La loi des nœuds appliquée au point A conduit à :

$$-\frac{x}{R} + \frac{cy}{R} + \frac{y_1}{R} - \frac{by_2}{R} = 0$$

soit $$a\frac{d^2y}{dt'^2} + b\frac{dy}{dt'} + cy = +x$$

qui est bien l'équation différentielle souhaitée.

REMARQUES

1° Le changement de variable $t' = \dfrac{t}{RC}$ revient à prendre la constante de temps $\tau = RC$ comme unité de temps (il s'agit en fait d'une normalisation). Il est ainsi possible, en changeant l'échelle des temps, de simuler la réponse « en ralenti » ou « en accéléré ».

2° Si l'étude d'une simulation particulière nécessite l'apport de conditions initiales, ces dernières peuvent être introduites sous forme de charge initiale sur les condensateurs d'intégration.

2.6.2. Les réseaux à variables d'état utilisés comme filtres

Les équations précédentes entre valeurs instantanées :

$$\begin{cases} y_2 = -RC\dfrac{dy}{dt} \\ y_1 = -aRC\dfrac{dy_2}{dt} \\ -x + cy + y_1 - by_2 = 0 \end{cases}$$

correspondent en régime harmonique aux équations complexes

$$(S)\begin{cases} \underline{Y}_2 = -\mathrm{j}RC\omega\underline{Y} \\ \underline{Y}_1 = -\mathrm{j}aRC\omega\underline{Y}_2 \\ -\underline{X} + c\underline{Y} + \underline{Y}_1 - b\underline{Y}_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à la transmittance :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{1}{c + \mathrm{j}bRC\omega + a(\mathrm{j}RC\omega)^2}.$$

• En prenant la sortie au point L, le montage se comporte comme un filtre passe-bas, de transmittance

$$\underline{T} = A\frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $$\begin{cases} A = \dfrac{1}{c} \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{c}{a}} \\ m = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} \end{cases}$$

• À partir du système d'équations complexes (S) on détermine la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{X}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}} \times \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{-\mathrm{j}RC\omega}{c + \mathrm{j}bRC\omega + a(\mathrm{j}RC\omega)^2}.$$

En prenant la sortie au point B, le dispositif de la figure 32 se comporte donc comme un filtre passe-bande, de transmittance

$$\underline{T} = A\frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A = \dfrac{-1}{b} \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{c}{a}} \\ m = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} \end{cases}$$

• À partir du système d'équations complexes (S) on détermine la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{Y_1}}{\underline{X}} = \frac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_2}} \times \frac{\underline{Y_2}}{\underline{X}} = \frac{a(jRC\omega)^2}{c + jbRC\omega + a(jRC\omega)^2}.$$

En prenant la sortie au point H, le système de la figure 32 se comporte donc comme un filtre passe-haut, de transmittance

$$\underline{T} = \frac{A\left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A = 1 \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{c}{a}} \\ m = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} \end{cases}$$

Il est possible, à partir de la structure de la figure 32 de construire un filtre réjecteur. Supposons en effet que l'on ajoute au dispositif un montage sommateur (*fig.* 33), alimenté par les tensions y et y_1.

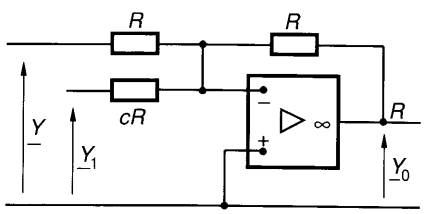


Fig. 33

Compte tenu de l'équation $\underline{Y_0} = -\left(\underline{Y} + \dfrac{1}{C}\underline{Y_1}\right)$, on détermine la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{Y_0}}{\underline{X}} = -\left(\frac{\underline{Y}}{\underline{X}} + \frac{1}{c}\frac{\underline{Y_1}}{\underline{X}}\right)$$

$$= -\frac{1 + \dfrac{a}{c}(jRC\omega)^2}{c + jbRC\omega + a(jRC\omega)^2}.$$

En prenant la sortie au point R, le dispositif se comporte comme un filtre réjecteur de transmittance

$$\underline{T} = A\frac{1 + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_C} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A = 1 \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{a}{c}}. \\ m = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} \end{cases}$$

Cette structure de filtre met en œuvre un nombre important d'amplificateurs opérationnels. En contrepartie, elle présente une grande souplesse de réglage. Dans le cas habituel, où on ne désire qu'un seul type de filtre, on peut construire les structures simplifiées suivantes :

2.6.3. Filtre passe-bas

Le montage correspondant est donné à la figure 34.

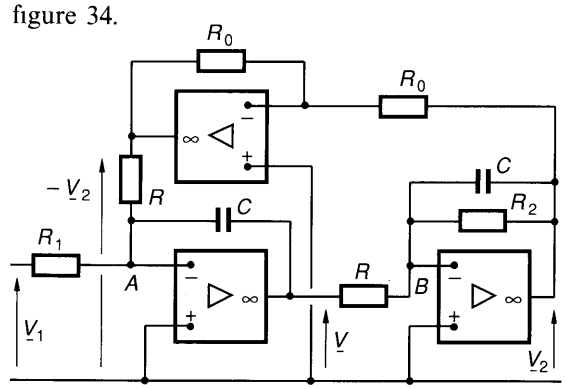


Fig. 34

La loi des nœuds écrite aux points A et B conduit aux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{V_1}}{R_1} - \dfrac{\underline{V_2}}{R} + jC\omega\underline{V} = 0 \\ \dfrac{\underline{V}}{R} + \left(jC\omega + \dfrac{1}{R_2}\right)\underline{V_2} = 0 \end{cases}$$

Par élimination de $\underline{V}$, on détermine la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{1}{\dfrac{R_1}{R} + jR_1C\omega\left[jRC\omega + \dfrac{R}{R_2}\right]}$$

$$= \frac{R}{R_1} \times \frac{1}{1 + j\,\frac{R^2 C\omega}{R_2} + (jRC\omega)^2}.$$

Cette transmittance est bien de la forme

$$\underline{T} = A \frac{1}{1 + 2jm\,\frac{\omega}{\omega_C} + \left(j\,\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}$$

avec $\begin{cases} A = \dfrac{R}{R_1} \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC}. \\ m = \dfrac{R}{2R_2} \end{cases}$

Remarquons que lorsque la pulsation caractéristique a été ajustée par RC, l'amplification A peut être réglée par R_1 et le coefficient d'amortissement m par R_2.

2.6.4. Filtre passe-haut

On peut vérifier sur le schéma de la figure 34 que les permutations

$$\frac{1}{R} \leftrightarrow jC\omega; \quad \frac{1}{R_1} \rightarrow jC_1\omega; \quad \frac{1}{R_2} \rightarrow jC_2\omega,$$

conduisent à la fonction de transfert

$$\underline{T} = \frac{C_1}{C} \times \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C}\,\frac{1}{jRC\omega} + \frac{1}{(jRC\omega)^2}}$$

$$= \frac{C_1}{C} \times \frac{(jRC\omega)^2}{1 + jRC_2\omega + (jRC\omega)^2}$$

qui est bien la fonction de transfert d'un filtre passe-haut

avec $\begin{cases} A = \dfrac{C_1}{C} \\ \omega_C = \dfrac{1}{RC} \\ m = \dfrac{C_2}{2C} \end{cases}$

2.6.5. Filtre passe-bande

Le montage est donné à la figure 35.
La loi des nœuds appliquée aux points A et B conduit aux équations

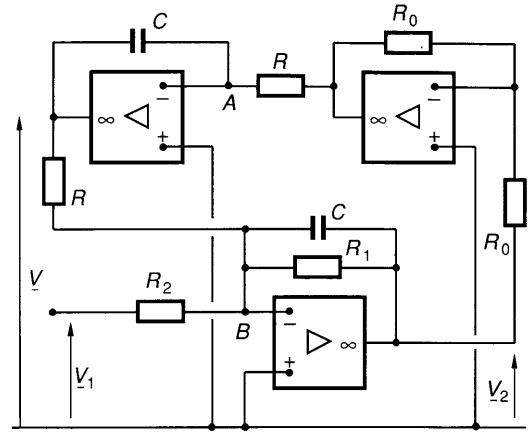


Fig. 35

$$\begin{cases} -\dfrac{\underline{V_2}}{R} + jC\omega\underline{V} = 0 \\ \dfrac{\underline{V}}{R} + \dfrac{\underline{V_1}}{R_2} + \underline{V_2}\left(jC\omega + \dfrac{1}{R_1}\right) = 0 \end{cases}$$

Par élimination de $\underline{V}$, on détermine la transmittance

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = -\frac{1}{jR_2C\omega + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R}\,\frac{1}{jRC\omega}}$$

$$= -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{j\,\frac{R^2C\omega}{R_1}}{1 + j\,\frac{R^2C\omega}{R_1} + (jRC\omega)^2}$$

Il s'agit bien de la transmittance d'un filtre passe-bande dont l'amplification est égale à $A = -\dfrac{R_1}{R_2}$, la pulsation caractéristique est égale à $\omega_C = \dfrac{1}{RC}$ et dont la bande passante à 3 db vaut

$$\Delta\omega = 2m\omega_C = \frac{2m}{\omega_C}\,\omega_C^2 = \frac{R^2C}{R_1} \cdot \frac{1}{R^2C^2} = \frac{1}{R_1C}.$$

3. EXEMPLE DE CALCUL

Problème

Déterminer les éléments d'un filtre actif passe-bas dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 36.

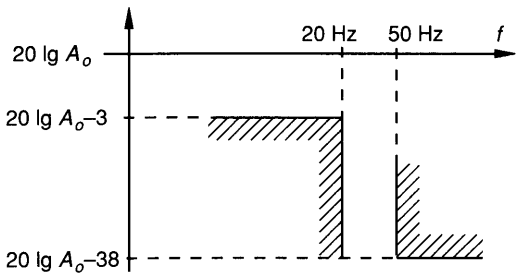


Fig. 36

Le problème sera résolu en choisissant l'approximation de Butterworth, et le filtre actif sera réalisé par une structure de Sallen et Key.
L'ordre du filtre est calculé (voir paragraphe 3.1) par :

$$n \geqslant \frac{\lg\,[10^{38/10} - 1]}{2 \lg \frac{50}{20}} = 4{,}77.$$

Nous prendrons donc $n = 5$.

• La fonction de transfert normalisée extraite des tables de Butterworth (paragraphe 3.1 du chapitre 1), est

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1+\underline{s})(1+0{,}618\underline{s}+\underline{s}^2)(1+1{,}618\underline{s}+\underline{s}^2)}$$

ce qui conduit, après dénormalisation, à

$$\underline{T}(f) = \frac{1}{\left(1+\mathrm{j}\frac{f}{f_0}\right)\left[1+2\mathrm{j}m_1\frac{f}{f_0}+\left(\mathrm{j}\frac{f}{f_0}\right)^2\right]\left[1+2\mathrm{j}m_2\frac{f}{f_0}+\left(\mathrm{j}\frac{f}{f_0}\right)^2\right]}$$

avec $f_0 = 20$ Hz; $m_1 = \frac{0{,}618}{2} = 0{,}309$;

$m_2 = \frac{1{,}618}{2} = 0{,}809$.

• Le filtre correspondant est obtenu en plaçant en cascade :

– le montage de la figure 2 qui permet, en choisissant

$$R_1 = \infty;\ R_2 = 0;\ RC = \frac{1}{2\pi 20} = 7{,}958 \text{ ms},$$

de réaliser la transmittance $\underline{T} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}}$;

– deux structures conformes au schéma de la figure 20 sur lesquelles les admittances $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ sont réalisées par deux résistances R et les admittances $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ correspondent à deux capacités C telles que

$$RC = \frac{1}{2\pi 20} = 7{,}958 \text{ ms}.$$

Les coefficients K_1 et K_2 de chacune des structures, calculés à partir de $m = \dfrac{3-K}{2}$, sont respectivement égaux à

$$\begin{cases} K_1 = 3 - 2m_1 = 2{,}382 \\ K_2 = 3 - 2m_2 = 1{,}382 \end{cases}$$

Sachant que, sur le schéma de la figure 21, le coefficient K est donné par $K = \dfrac{r_1 + r_2}{r_1}$, les valeurs particulières K_1 et K_2 peuvent être obtenues en choisissant $r_1 = 10$ kΩ et respectivement, $r_2 = 13{,}82$ kΩ pour obtenir K_1 et $r_2 = 3{,}82$ kΩ pour obtenir K_2.

• Le filtre définitif est donné à la figure 37; la constante de temps $RC = 7{,}958$ ms est réalisée par $C = 150$ nF et $R = 53$ kΩ.
L'amplification A_0 dans la bande passante est égale à $A_0 = K_1 K_2 = 3{,}29$ soit $20 \lg A_0 = 10{,}35$ db.

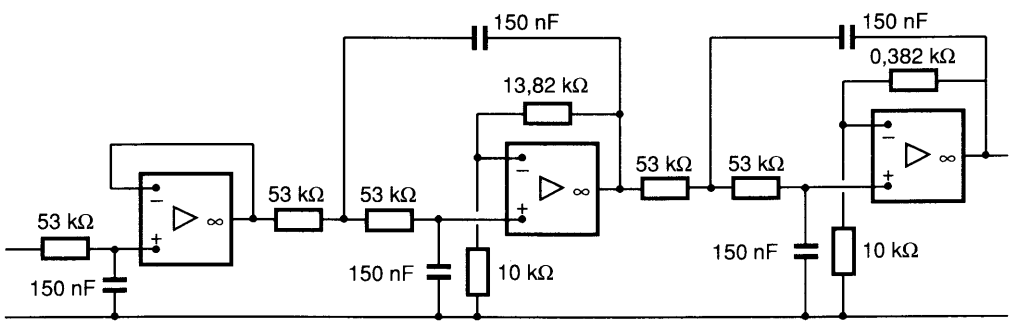


Fig. 37

REMARQUE

La structure de Sallen et Key facilite le calcul des filtres de Butterworth. La constante de temps RC de toutes les cellules est égale à $RC = \frac{1}{2\pi f_0}$ *(où* f_0 *est la fréquence de coupure à 3 db). Le facteur d'amortissement m de chaque cellule est déterminé (fig. 21) par les résistances* r_1 *et* $r_2 = \alpha r_1$ *de telle sorte que* $m = \frac{3-K}{2} = \frac{3-1-\alpha}{2}$ *soit* $\alpha = 2 - 2m$.

Sachant que 2m correspond au coefficient du terme en s dans le polynôme de Butterworth, $s^2 + as + 1$, *le coefficient α est donné par le tableau suivant*

ordre	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	α_1	α_2	α_3	$20 \lg A_0$
2	*1,414*			*0,586*			*4,01 db*
3	*1*			*1*			*6,02 db*
4	*0,7653*	*1,848*		*1,235*	*0,152*		*8,22 db*
5	*0,618*	*1,618*		*1,382*	*0,382*		*10,35 db*
6	*0,5176*	*1,414*	*1,932*	*1,482*	*0,586*	*0,068*	*12,47 db*

$20 \lg A_0$ *est calculé par*

$$20 \lg A_0 = 20 \lg K_1 K_2 \ldots = 20 \lg (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots$$

Le calcul du filtre se résume alors à la lecture de quelques coefficients dans une table.

On conçoit que la synthèse des filtres actifs se prête particulièrement bien à une assistance par ordinateur. Le programme de traitement doit faire appel à une bibliothèque de structures (Rauch, Sallen et Key,...) ainsi qu'à des tableaux de coefficients, fonctions des données du gabarit, et calculés à l'aide d'une des approximations (Butterworth, Chebychev, Bessel...).

4. SENSIBILITÉS

La précision avec laquelle sont réalisés les paramètres de chaque cellule (amplification A, coefficient d'amortissement m, pulsation caractéristique ω_C, bande passante $\Delta\omega$...) dépend du soin apporté dans le choix des composants du filtre.

Les paramètres de chaque cellule pouvant être plus ou moins sensibles aux variations d'un composant particulier, on définit la notion de sensibilité par

$$S_a^A = \frac{\frac{dA}{A}}{\frac{da}{a}} = \frac{a}{A}\frac{dA}{da}$$

où dA est la variation du paramètre A résultant d'une variation da du composant a.

Il s'agit d'un calcul d'erreur classique qui conserve ici tout son intérêt dans la mesure où il permet de déterminer, *a priori*, la précision sur les composants.

Si le paramètre A dépend des composants a, b, c ..., par $A = f(a, b, c...)$ le terme $\frac{dA}{da}$ est calculé en effectuant une dérivée partielle de A par rapport à a, en maintenant les grandeurs b, c... constantes.

Exemples de calcul

1° Considérons le filtre passe-bande, construit à partir d'un réseau à variables d'état (*fig.* 35). Sa bande passante a été établie par $\Delta\omega = \frac{1}{R_1 C}$.

Afin de déterminer la sensibilité de la bande passante aux variations de la résistance R_1, calculons

$$\frac{d\Delta\omega}{dR_1} = -\frac{1}{R_1^2 C}.$$

La sensibilité $S_{R_1}^{\Delta\omega}$ s'écrit ainsi

$$S_{R_1}^{\Delta\omega} = \frac{R_1}{\Delta\omega}\frac{d\Delta\omega}{dR_1} = -1.$$

Une erreur de 1 % sur la résistance R_1 se traduit donc par une erreur de 1 % sur la bande passante $\Delta\omega$, et ce quelle que soit la sélectivité du filtre.

2° Considérons le filtre passe-bande, construit à partir d'une structure de Sallen et Key (*fig.* 20) avec $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}$; $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R}$; $\underline{Y}_3 = jC\omega$; $\underline{Y}_4 = \frac{1}{R} + jC\omega$.

La bande passante $\Delta\omega$ a été établie par $\Delta\omega = \frac{1}{RC}\left[2\frac{R}{R_1} + 3 - K\right]$.

Compte tenu de $\frac{d\Delta\omega}{dR_1} = -\frac{2}{R_1^2 C}$, la sensibilité $S_{R_1}^{\Delta\omega}$ s'écrit :

$$S_{R_1}^{\Delta\omega} = \frac{R_1}{\Delta\omega}\frac{d\Delta\omega}{dR_1} = \frac{R_1 RC}{\left[2\frac{R}{R_1} + 3 - K\right]} \times \left(\frac{-2}{R_1^2 C}\right)$$

$$= -\frac{2R}{R_1} \times \frac{1}{\left[2\frac{R}{R_1} + 3 - K\right]}.$$

Dans le cas particulier où $R = R_1$, la bande passante s'établit à $\Delta\omega = \frac{1}{RC}(5 - K) = \frac{\omega_C(5-K)}{\sqrt{2}}$.

Si le filtre est très sélectif, $\Delta\omega$ est faible par rapport à ω_C et le facteur K est voisin de 5. Considérons, par exemple $K = 4{,}8$, la sensibilité $S_{R_1}^{\Delta\omega}$ devient :

$$S_{R_1}^{\Delta\omega} = -2\frac{1}{2+3-4{,}8} = -10$$

une erreur de 1 % sur la résistance R_1 se traduit ainsi par une erreur de 10 % sur la bande passante. Nous pouvons en conclure que, du point de vue de la sensibilité, et pour la construction d'un filtre passe-bande très sélectif, le réseau à variables d'état est plus performant que la structure de Sallen et Key.

5. COMPARAISON FILTRES ACTIFS-FILTRES PASSIFS

5.1. LIMITATION DES FILTRES PASSIFS

Le principal inconvénient des filtres passifs provient des inductances qu'ils mettent en œuvre :

- une bobine possède toujours une résistance et il est d'autant plus difficile d'obtenir un coefficient de qualité $\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ élevé, que la fréquence d'utilisation est plus basse;
- il est très coûteux de réaliser une inductance à faible tolérance et dans la plupart des cas un réglage devra être prévu. Remarquons que la mise en œuvre d'un filtre passif est extrêmement délicate dans la mesure où il ne peut pas être séparé en étages indépendants;
- une inductance mutuelle indésirable peut être à l'origine d'un couplage parasite entre les bobines;
- l'inductance est susceptible de varier avec la température;
- la fonction de transfert du filtre passif dépend de la résistance de charge qui doit donc être déterminée très précisément.

5.2. LIMITATION DES FILTRES ACTIFS

Les principaux défauts des filtres actifs proviennent des imperfections des amplificateurs opérationnels.

- Leur mise en œuvre nécessite la construction d'une ou deux alimentations de tension continue ce qui peut entraîner une consommation d'énergie prohibitive.
- L'excursion du signal est limitée du côté des fortes amplitudes par la saturation des amplificateurs opérationnels et du côté des basses amplitudes par leur bruit.
- Lorsque la fréquence d'utilisation augmente les imperfections des amplificateurs deviennent de plus en plus sensibles : la chute du gain en tension et le déphasage entre les tensions d'entrée et de sortie perturbent les caractéristiques du filtre.
- La contre-réaction sur les amplificateurs opérationnels peut conduire à l'instabilité du filtre.

5.3. CONCLUSION

Il résulte des remarques précédentes que les filtres passifs sont plus difficiles à élaborer en basse fréquence alors que les filtres actifs sont moins performants en haute fréquence.

- Les filtres actifs peuvent être utilisés à moindre coût lorsque la fréquence d'utilisation est inférieure à 100 kHz. (L'utilisation d'amplificateurs opérationnels d'usage courant, 081, 741, limite cette fréquence à une dizaine de kilohertz.)
- L'utilisation des filtres passifs est limitée à 10 Hz du côté des basses fréquences alors qu'ils deviennent plus performants lorsque la fréquence d'utilisation dépasse 1 MHz.

EXERCICES

1. On désire réaliser, à l'aide de l'approximation de *Chebychev* et en utilisant une structure de **Rauch**, un filtre actif passe-bas dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

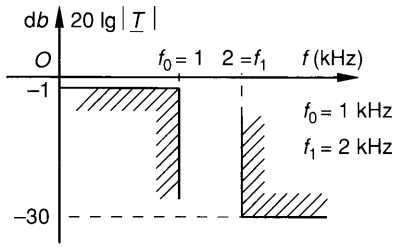


Fig. 1

1° Sachant que la fonction de transfert se met sous la forme

$$|\underline{T}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}},$$

avec $x = \dfrac{f}{f_0}$ et $|C_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \leqslant 1$.
Montrer que le gabarit impose $\varepsilon^2 = 0{,}258\,9$.

2° Sachant que les polynômes $C_n(x)$ sont définis par

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x),$$

avec $C_0(x) = 1$ et $C_1(x) = x$.
Établir l'expression du polynôme $C_4(x)$ et montrer que la fonction de transfert de Chebychev d'ordre 4 s'inscrit dans le gabarit. Comparer à une fonction de Butterworth d'ordre 4 (de fréquence de coupure f_0) et conclure.

3° Pour une atténuation de 1 db dans la bande passante, le polynôme de Chebychev d'ordre 4, s'écrit :

$$1 + \varepsilon^2 C_n^2(x) = 1 + 0{,}258\,9[8x^4 - 8x^2 + 1]^2.$$

Les racines de ce polynôme, extraites des tables de Chebychev, sont

$$x_1 = \pm\, 0{,}983\,38 \pm j0{,}139\,54;$$
$$x_2 = \pm\, 0{,}407\,33 \pm j0{,}336\,87.$$

α) Vérifier que x_1 et x_2 sont bien solutions de $1 + \varepsilon^2 C_n^2(x) = 0$.

β) Montrer (par une méthode analogue à celle du paragraphe 3.1, chapitre 1) que la fonction de transfert normalisée du filtre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0{,}245\,7}{(\underline{s}^2 + 0{,}279\,1\underline{s} + 0{,}986\,5)(\underline{s}^2 + 0{,}673\,7\underline{s} + 0{,}279\,4)}.$$

γ) En déduire que la transmittance du filtre est

$$\underline{T}(jf) = \frac{0{,}891\,4}{\left[1 + \dfrac{jf}{3\,534} + \left(\dfrac{jf}{993}\right)^2\right]\left[1 + \dfrac{jf}{415} + \left(\dfrac{jf}{529}\right)^2\right]}.$$

δ) Le filtre est réalisé en montant en cascade deux structures de Rauch conformes au schéma de la figure 2, avec $R = 10$ kΩ.

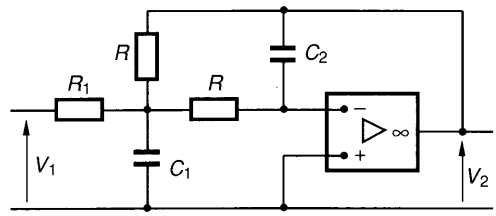


Fig. 2

En reportant le facteur d'amplification $A = 0{,}891\,4$ sur la première cellule, calculer les éléments R_1, C_1, C_2 de chaque étage.

4° Tracer, à l'aide d'un ordinateur la courbe 20 lg $|\underline{T}|$ et vérifier qu'elle est conforme au diagramme de la figure 3.

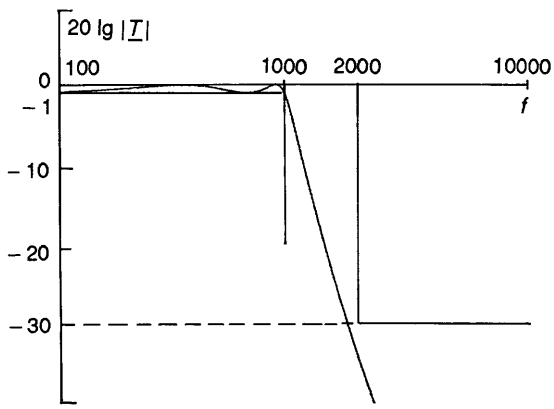


Fig. 3

2. On établira dans cet exercice, quelques résultats complémentaires relatifs à la structure de Sallen et Key (*fig.* 20).

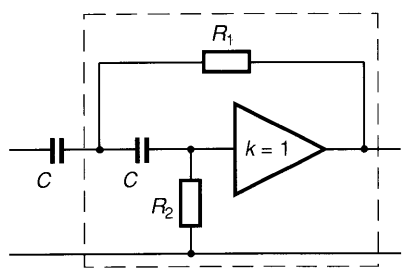


Fig. 1

1° Dans cette question les admittances $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ sont réalisées par deux capacités C égales et les admittances $\underline{Y}_1$

et $\underline{Y}_3$ correspondent respectivement aux résistances R_1 et R_2.

a) Établir la transmittance du filtre et la mettre sous la forme

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_C} + \left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}.$$

Exprimer A, m et ω_C en fonction de R_1, R_2, C et K.

b) Montrer que si la résistance interne du générateur d'attaque est égale à ρ, les propriétés du filtre sont perturbées. On montrera, en particulier, que la pulsation caractéristique passe de ω_C à $\omega'_C = \frac{\omega_C}{\sqrt{1 + \frac{\rho}{R_1}}}$ et que le coefficient d'amortissement passe de m à $m' = m\frac{1 + \frac{\rho}{R_1 + R_2}}{\sqrt{1 + \frac{\rho}{R_1}}}$.

c) Montrer que la courbe $m' = f(\rho)$ passe par un minimum lorsque $R_2 = R_1 + \rho$. En déduire des conséquences pratiques.

2° Dans cette question les admittances $\underline{Y}_1$ et $\underline{Y}_3$ sont réalisées par deux capacités C égales et les admittances $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_4$ correspondent respectivement aux résistances R_1 et R_2.

a) Établir la transmittance du filtre et la mettre sous la forme

$$\underline{T} = A\frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_C} + \left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}.$$

Exprimer A, m et ω_C en fonction de R_1, R_2, C et K.

b) Montrer que la partie encadrée du schéma de la figure 1 est équivalente au schéma de la figure 2. Utiliser ce résultat pour retrouver la transmittance de la question 2°, *a*).

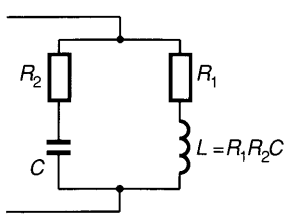


Fig. 2

3. Pour réaliser un filtre passe-bande à l'aide d'une structure de Sallen et Key, on utilise l'amplificateur de la figure 1.

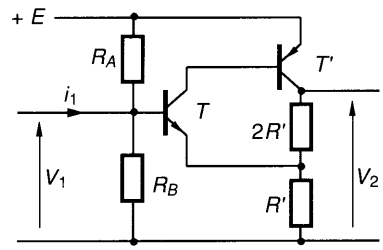


Fig. 1

1° *a*) Dessiner le schéma équivalent du dispositif pour les petites variations (on supposera nuls les paramètres hybrides h_{22} et h_{12}).

b) Calculer la résistance d'entrée $R_e = \frac{v_1}{i_1}$ et l'amplification en tension $K = \frac{v_2}{v_1}$ en supposant que l'amplificateur ne débite aucun courant. Calculer la résistance de sortie R_S en supposant nulle la résistance du générateur d'attaque.

c) On pose $R = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}$. Compte tenu des ordres de grandeur $h_{21} \gg 1$; $h'_{21} \gg 1$; $h_{11} \ll h_{21}R'$; $R \ll h_{21}h'_{21}R'$. Établir les résultats suivants $K \approx 3$, $R_e \approx R$, $R_S \approx \frac{2R'}{h'_{21}}$.

2° À l'aide de l'amplificateur de la figure 1, on réalise le dispositif de la figure 2 $\left(\text{avec } R = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}\right)$.

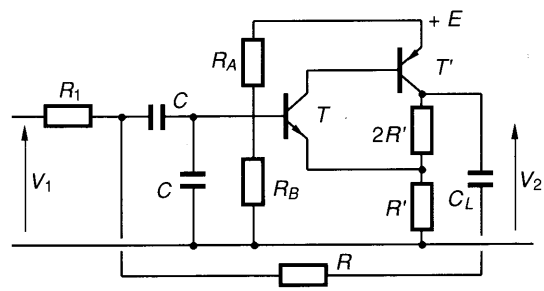


Fig. 2

Pour les fréquences de travail, le condensateur C_L se comporte comme un court-circuit.

Montrer que la figure 2 correspond bien à un filtre passe-bande de Sallen et Key. Établir les expressions de son amplification A, de sa pulsation d'accord ω_C et de sa bande passante $\Delta\omega$.

4 filtres numériques

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Il sera fait appel, dans ce paragraphe, à un certain nombre de propriétés qui ont été établies au chapitre 5 du tome I.

Une chaîne de traitement numérique (*fig.* 1) est composée des sous-ensembles suivants :

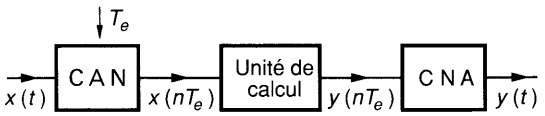


Fig. 1

– **un convertisseur analogique numérique** (C.A.N.). Il prélève, sur le signal d'entrée $x(t)$, et avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = \dfrac{1}{T_e}$, une suite d'échantillons $x(nT_e)$. Si le signal d'entrée est une sinusoïde de fréquence f_0, le convertisseur analogique numérique, qui contient un échantillonneur, fait apparaître une infinité de composantes sinusoïdales, de même amplitude et de fréquences f_0, $F_e - f_0$, $F_e + f_0$, $2F_e - f_0$, ...;

– **une unité de calcul,** réalisée en logique câblée ou programmée. Elle détermine à chaque instant d'échantillonnage nT_e, une valeur $y(nT_e)$ de l'échantillon de sortie;

– **un convertisseur numérique analogique** qui transforme la suite d'échantillons $y(nT_e)$ en signal analogique $y(t)$. Le convertisseur numérique-analogique contient, en général, un bloqueur d'ordre zéro et un filtre passe-bas analogique. Dans le cas où la fréquence f_0 du signal sinusoïdal d'entrée est inférieure à $\dfrac{F_e}{2}$ (condition de Shannon), le C.N.A. isole la composante sinusoïdale de fréquence f_0.

Nous supposerons que, lorsque l'unité de calcul réalise l'opération $y(nT_e) = x(nT_e)$, les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont identiques. En réalité, dans le cas où la fréquence d'échantillonnage F_e n'est pas très grande par rapport à f_0, la fonction blocage introduit un retard de $\dfrac{T_e}{2}$ et une atténuation $\dfrac{\sin \pi f_0 T_e}{\pi f_0 T_e}$.

Dans toute la suite, nous négligerons l'influence du bloqueur et,

dans le cas d'une attaque sinusoïdale, nous appellerons signal de sortie le signal sinusoïdal confondu avec $y(nT_e)$ aux instants d'échantillonnnage.

La fonction filtrage étant caractérisée par une transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$, la chaîne de traitement numérique, alimentée par un signal sinusoïdal $x(t) = X \cos \omega_0 t$, doit élaborer une suite d'échantillons $y(nT_e)$ de la forme

$$y(nT_e) = Y \cos (n\omega_0 T_e + \varphi)$$

avec $\begin{cases} \dfrac{Y}{X} = |\underline{T}(j\omega_0)| \\ \varphi = \arg \underline{T}(j\omega_0). \end{cases}$

Rappels

• A toute séquence $e(nT_e)$, on fait correspondre une transformée en Z définie par

$$\underline{E}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e)\underline{Z}^{-n}.$$

• Un retard de T_e sur les fonctions du temps se traduit, sur les transformées en Z par une multiplication par $\underline{Z}^{-1}$, soit :

$$r(t) = e(t - T_e) \Rightarrow \underline{R}(\underline{Z}) = \underline{Z}^{-1}\underline{E}(\underline{Z}).$$

• La transmittance en Z de la chaîne de traitement numérique est définie par

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})},$$

où $\underline{Y}(\underline{Z})$ et $\underline{X}(\underline{Z})$ sont respectivement les transformées en Z des séquences d'entrée $x(nT_e)$ et de sortie $y(nT_e)$.

• Pour un signal d'entrée sinusoïdal, la transmittance complexe $\underline{T}$ est donnée par $\underline{T} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$, où $\underline{X}$ est le nombre complexe associé au signal sinusoïdal d'attaque $x(t)$, et $\underline{Y}$ est le nombre complexe associé au signal sinusoïdal virtuel confondu avec $y(nT_e)$ aux instants d'échantillonnage. Dans ces conditions, le passage de la transmittance en Z, $\underline{T}(\underline{Z})$, à la transmittance complexe $\underline{T}$, s'effectue par

$$\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}.$$

• Afin de réaliser la transmittance $\underline{T}(\mathrm{j}\omega)$, l'unité de calcul élabore l'échantillon $y(nT_e)$ en fonction des échantillons d'entrée

$$x(nT_e), \qquad x[(n-1)T_e], \qquad x[(n-2)T_e], \ldots$$

et éventuellement des échantillons de sortie précédents, $y[(n-1)T_e]$, $y[(n-2)T_e]$, ... Dans le cas où le calcul fait appel aux échantillons de sortie antérieurs, le filtre est dit **récursif.** Si l'échantillon $y(nT_e)$ ne dépend que des échantillons d'entrée, le filtre est **non récursif.**

• Suivant la réponse apportée à une impulsion d'entrée, nous distinguerons essentiellement deux catégories de filtres numériques :

– les filtres à **réponse impulsionnelle finie** (R.I.F.), pour lesquels l'algorithme de calcul de l'échantillon $y(nT_e)$ fait appel à un nombre limité de valeurs prélevées sur la réponse impulsionnelle. Il s'agit, bien sûr, d'une approximation dans la mesure où la réponse impulsionnelle de la plupart des systèmes physiques a théoriquement une durée infinie. Cette approximation est d'autant plus justifiée que le nombre d'échantillons utilisés pour le calcul est important. La réalisation de ces filtres est, en général, **non récursive;**

– les filtres à **réponse impulsionnelle infinie** (R.I.I.) : Ils tiennent compte de la totalité de la réponse impulsionnelle. Comme la détermination de l'échantillon $y(nT_e)$ ne peut faire appel qu'à un nombre fini d'échantillons, l'algorithme de calcul s'appuie sur une relation de récurrence et la réalisation du filtre est **récursive.**

2. LES FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE (R.I.F.)

2.1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

a) Le calcul de l'échantillon $y(nT_e)$ doit correspondre à une transmittance complexe $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ qui possède les propriétés suivantes :

– la courbe du module $|\underline{T}(f)|$ en fonction de la fréquence f, doit approcher la représentation $|\underline{T}_0(f)| = f(f)$ correspondant à un filtre parfait. Par exemple, pour un filtre passe-bas, dont la fréquence de coupure est f_C, la courbe $|\underline{T}(f)| = f(f)$, représentée en échelle linéaire doit tendre vers le tracé idéal $|\underline{T}_0(f)|$ de la figure 2;

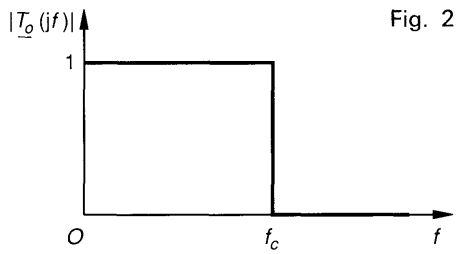


Fig. 2

– l'argument de $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ doit être proportionnel à la fréquence, soit :

$$\arg\,[\underline{T}(\mathrm{j}f)] = -\omega\tau = -2\pi f\tau.$$

Cette exigence, qui n'est pas générale, permet d'obtenir, dans la bande passante, le même temps de retard τ pour tous les harmoniques et d'éviter ainsi la distorsion.

b) A tout signal $s(t)$ d'énergie finie, on fait correspondre (voir paragraphe 2.2.1 du chapitre 6 de la partie 2) une transformée de Fourier $\underline{S}(f)$ suivant les relations :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f t}\, \mathrm{d}f$$

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f t}\, \mathrm{d}t.$$

Appliquons, au filtre numérique de la figure 1, une impulsion de Dirac $\delta(t)$, d'intensité unité, définie par

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \neq 0 \\ \displaystyle\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1. \end{cases}$$

Soient $\underline{X}(f)$ et $\underline{Y}(f)$ les transformées de Fourier des signaux d'entrée et de sortie, soit $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ la transmittance complexe du filtre et soit $h(t) = y(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre.

A partir des équations

$$\begin{cases} \underline{X}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\ \underline{Y}(f) = \underline{T}(\mathrm{j}f)\,\underline{X}(f) \\ y(t) \quad = h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Y}(f)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}f. \end{cases}$$

Il vient $\quad h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(\mathrm{j}f)\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}ft}\ \mathrm{d}f.$

Ainsi la réponse impulsionnelle $h(t)$ peut être déterminée, à partir de la transmittance complexe $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ par l'opération

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(\mathrm{j}f)\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}ft}\ \mathrm{d}f.$$

En d'autres termes, la transmittance complexe est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

• Dans un premier temps, nous établirons, par une approximation, l'algorithme de calcul de l'échantillon $y(nT_e)$; nous étudierons sur un exemple l'incidence de cette approximation, puis nous optimiserons la réponse du filtre en modifiant la fenêtre temporelle.

2.2. ALGORITHME DE CALCUL

a) Calcul de l'échantillon $y(nT_e)$.

En considérant que le signal d'entrée est une suite d'impulsions de Dirac, d'intensité $x(nT_e)$, décalées de T_e dans le temps, l'échantillon $y(nT_e)$ apparaît comme la somme, à l'instant nT_e, de toutes les réponses impulsionnelles antérieures pondérées par la valeur correspondante de l'échantillon d'entrée $x(nT_e)$. Le temps de calcul étant limité, la détermination de $y(nT_e)$, ne peut faire appel qu'à un nombre fini N de réponses impulsionnelles, ce qui conduit à calculer l'échantillon $y(nT_e)$ par la formule approchée

$$\boldsymbol{y(nT_e) = \sum_{m=0}^{N-1} x[(n-m)T_e]\,h(mT_e)}$$

• $x[(n-m)T_e] \times h(mT_e)$ est la valeur, à l'instant nT_e, de la réponse du filtre à l'impulsion d'intensité $x[(n-m)T_e]$, centrée sur $t = (n-m)T_e$.

L'opération $\quad y(nT_e) = \displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} x[(n-m)T_e]\,h(mT_e)$

se traduit sur les transformées en Z, $\underline{Y}(\underline{Z})$ et $\underline{X}(\underline{Z})$ par :

$$\underline{Y}(\underline{Z}) = \underline{X}(\underline{Z}) \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\ \underline{Z}^{-m},$$

ce qui, compte tenu de la relation $\underline{Z} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}fT_e}$, conduit à écrire, entre les nombres complexes $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ associés aux grandeurs sinusoïdales $x(t)$ et $y(t)$, l'équation :

$$\underline{Y} = \underline{X} \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}mfT_e}.$$

Le filtre numérique synthétise ainsi la transmittance

$$\boxed{\underline{T}(\mathrm{j}f) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}mfT_e}.}$$

REMARQUE

La relation précédente peut être établie sans faire appel aux transformées en Z.

Pour un signal d'entrée sinusoïdal, $x(t) = X\cos 2\pi ft$, l'échantillon $y(nT_e)$, calculé par

$$y(nT_e) = \sum_{m=0}^{N-1} x[(n-m)T_e]\,h(mT_e),$$

s'écrit

$$y(nT_e) = X \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\cos[2\pi(n-m)fT_e].$$

Afin d'effectuer le calcul de $y(nT_e)$, on lui associe $z(nT_e)$ défini par

$$z(nT_e) = X \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\sin[2\pi(n-m)fT_e].$$

La somme $\underline{s}(nT_e) = y(nT_e) + \mathrm{j}z(nT_e)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{s}(nT_e) &= X \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)[\cos[2\pi(n-m)fT_e] \\ &\qquad + \mathrm{j}\sin[2\pi(n-m)fT_e]] \\ &= X \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}(n-m)fT_e} \end{aligned}$$

$y(nT_e)$ apparaît ainsi comme la partie réelle de $\underline{s}(nT_e)$, soit :

$$\begin{aligned} y(nT_e) &= R_e[\underline{s}(nT_e)] \\ &= XR_e\left[\sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}(n-m)fT_e}\right] \\ &= XR_e\left[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}nfT_e} \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}mfT_e}\right]. \end{aligned}$$

En posant $\quad \underline{T}(\mathrm{j}f) = \displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}fmT_e}$

$$= T\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

(T et φ sont respectivement le module et l'argument de $\underline{T}(\mathrm{j}f)$), il vient :

$$\begin{aligned} y(nT_e) &= XR_e[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}nfT_e} T\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}] \\ &= TXR_e[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi nfT_e+\varphi)}] \\ &= TX\cos(2\pi nfT_e+\varphi). \end{aligned}$$

$y(nT_e)$ apparaît ainsi comme l'échantillon prélevé, à l'instant nT_e, sur la sinusoïde d'amplitude $TX = X\,|\underline{T}(\mathrm{j}f)|$ et de phase $\varphi = \arg[\underline{T}(\mathrm{j}f)]$, ce qui justifie la transmittance du filtre :

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}mfT_e}.$$

b) Calcul des coefficients $h(mT_e)$:

Afin d'établir l'algorithme de calcul de l'échantillon $y(nT_e)$ par

$$y(nT_e) = \sum_{m=0}^{N-1} x[(n-m)T_e]h(mT_e)$$

il faut déterminer à partir de la fonction de transfert souhaitée $|\underline{T}_0(f)| = f(f)$, les valeurs $h(mT_e)$ des échantillons de la réponse impulsionnelle pour $0 < m < N-1$. Considérant que $h(t)$ et $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ sont liées par la relation

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(\mathrm{j}f)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}ft}\,\mathrm{d}f$$

qui fait appel à des fréquences négatives, on associe à la fonction de transfert souhaitée $|\underline{T}_0(f)| = f(f)$, son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et on **approxime** l'échantillon $h(mT_e)$ par

$$\boldsymbol{h(mT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0(\mathrm{j}k\,\Delta f)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}k\,\Delta f mT_e}.}$$

Les différentes valeurs de

$\underline{T}_0(\mathrm{j}k\,\Delta f) = |\underline{T}_0(k\,\Delta f)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$ sont déterminées de la manière suivante :

– le module, $|\underline{T}_0(k\,\Delta f)|$, est obtenu en balayant la fonction de transfert souhaitée avec le pas fréquentiel Δf. Dans le cas habituel, on choisit $\Delta f = \dfrac{1}{NT_e}$, et le balayage est représenté par le schéma de la figure 3;

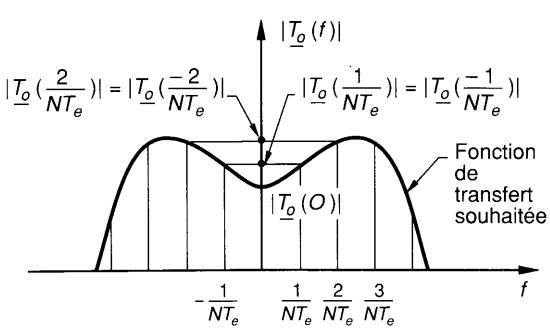


Fig. 3

– l'argument $\varphi_k = \arg[\underline{T}_0(\mathrm{j}k\,\Delta f)]$ sera défini ultérieurement pour satisfaire l'hypothèse d'un filtre à phase linéaire.

Au total le calcul de $h(mT_e)$ s'effectue par

$$h(mT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}\frac{km}{N}}.$$

c) Fonction de transfert du filtre numérique.

Compte tenu des approximations effectuées pour déterminer l'algorithme de calcul

$$y(nT_e) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)x[(n-m)T_e],$$

la fonction de transfert $|\underline{T}(f)| = f(f)$ synthétisée par le filtre diffère de la fonction de transfert souhaitée $|\underline{T}_0(f)| = f(f)$. Afin d'établir la correspondance entre ces deux fonctions, regroupons les équations

$$\begin{cases} \underline{T}(\mathrm{j}f) = \displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}mfT_e} \\ h(mT_e) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}\frac{km}{N}} \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \underline{T}(\mathrm{j}f) &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}m\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}m\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)}. \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-am} = 1 + \mathrm{e}^{-a} + \ldots + \mathrm{e}^{-a(N-1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-aN}}{1-\mathrm{e}^{-a}}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} &\underline{T}(\mathrm{j}f) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}N\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}(N-1)\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)} \\ &\qquad \times \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{j}N\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)} - \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}N\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{j}\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)} - \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{j}\left(fT_e-\frac{k}{N}\right)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(j\frac{k}{NT_e}\right) e^{-\pi j(N-1)\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)} \times \frac{\sin \pi N\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)}{\sin \pi\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)}$$

$$= e^{-\pi j(N-1)fT_e} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(j\frac{k}{NT_e}\right) e^{\pi k j \frac{N-1}{N}} \times \frac{\sin \pi N\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)}{N \sin \pi\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)}.$$

Sachant que $\underline{T}_0\left(j\frac{k}{NT_e}\right)$ s'écrit sous la forme

$$\underline{T}_0\left(j\frac{k}{NT_e}\right) = \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| e^{j\varphi_k}$$

il vient :

$$\underline{T}(jf) = e^{-\pi j(N-1)fT_e} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| e^{j\left(\varphi_k + k\pi\frac{N-1}{N}\right)} \times \frac{\sin \pi NT_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}.$$

Afin d'obtenir un filtre à phase linéaire, il est nécessaire que la transmittance $\underline{T}(jf)$ puisse être mise sous la forme

$$\underline{T}(jf) = |\underline{T}(f)| \times e^{j\varphi}$$

avec $\varphi = -\omega\tau = -2\pi f\tau$.

Cette condition impose la relation

$$\boxed{\varphi_k = -k\pi \frac{N-1}{N},}$$

ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\underline{T}(jf) = |\underline{T}(f)| e^{j\varphi}$$

avec

$$\begin{cases} |\underline{T}(f)| = \left| \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \frac{\sin \pi NT_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)} \right| \\ \varphi = -\pi(N-1)fT_e. \end{cases}$$

- L'équation relative à l'argument,

$$\varphi = -\pi(N-1)fT_e,$$

permet de conclure que le filtre numérique impose dans sa bande passante, un temps de retard

$$\tau = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\varphi}{2\pi f} = \frac{N-1}{2} T_e.$$

- L'équation relative au module,

$$|\underline{T}(f)| = \left| \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \frac{\sin \pi NT_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)} \right|$$

permet d'établir la fonction de transfert du filtre numérique, $|\underline{T}(f)| = f(f)$ en fonction des échantillons fréquentiels, $\left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right|$ prélevés sur la fonction de transfert souhaitée.

d) Relation entre la fonction de transfert du filtre et la fonction de transfert souhaitée.

La fonction de transfert du filtre $|T(f)| = f(f)$, apparaît comme le module d'une somme de fonctions de la forme $\frac{\sin \pi N f T_e}{N \sin \pi f T_e}$, pondérées par les échantillons fréquentiels $\left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right|$ et décalées du pas fréquentiel $\frac{1}{NT_e}$.

- La fonction $\frac{\sin \pi N f T_e}{N \sin \pi f T_e}$, dont les variations sont rappelées à la figure 4 présente les propriétés suivantes :
  - elle est périodique de période $\frac{1}{T_e} = F_e$;
  - elle est maximale et égale à 1 pour $f = 0$;
  - elle s'annule pour $f = \frac{k}{NT_e}$ avec $k \neq 0$.

- La périodicité impose que la fonction de transfert du filtre se reproduise identiquement à elle-même, pour une translation fréquentielle kF_e. Or la condition de Shannon, impose que le signal d'entrée $x(t)$ ne contienne aucun harmonique de fréquence supérieure à $\frac{F_e}{2}$. Si cette

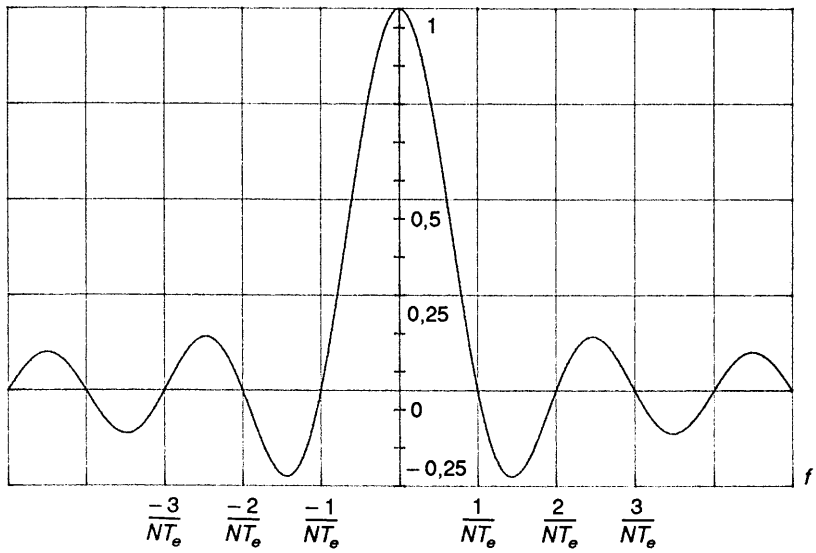


Fig. 4

condition est satisfaite, la périodicité fréquentielle de $|\underline{T}(f)|$ est sans conséquence. Pour s'en assurer, on fait précéder le filtre numérique d'un filtre analogique, appelé « filtre antirepliement » qui supprime les composantes de fréquence supérieure à $\frac{F_e}{2}$.

• A partir des propriétés suivantes :

– les différentes fonctions $\dfrac{\sin \pi N T_e\left(f - \dfrac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \dfrac{k}{NT_e}\right)}$

sont décalées du pas fréquentiel $\dfrac{1}{NT_e}$;

– la fonction

$$\frac{\sin \pi N f T_e}{N \sin \pi f T_e} = 1 \quad \text{pour } f = 0$$
$$= 0 \quad \text{pour } f = \frac{k}{NT_e} \quad (\text{avec } k \neq 0)$$

nous déduisons que pour les fréquences $f = \dfrac{k}{NT_e}$,

$$\left|\underline{T}\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| = \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right|.$$

Ainsi la fonction de transfert du filtre s'identifie à la fonction de transfert souhaitée aux points où les échantillons fréquentiels ont été prélevés. Mais, en dehors de ces points, les deux courbes sont différentes et la fonction de transfert du filtre présente, dans la bande de fréquence à éliminer, aussi bien que dans la bande passante, des ondulations qu'il est difficile de chiffrer dans le cas général.

Nous allons les étudier sur un exemple particulier.

2.3. EXEMPLE : FILTRE PASSE-BAS

Soit à déterminer l'algorithme de calcul d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est fixée à $f_C = 100$ Hz.

La fréquence d'échantillonnage est égale à $F_e = 500$ Hz.

Le nombre d'échantillons fréquentiels est égal à $N = 16$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$y(nT_e) = y_n; \qquad x(nT_e) = x_n$$

et $h(mT_e) = h(m)$.

L'algorithme de calcul de l'échantillon y_n est donné par :

$$y_n = \sum_{m=0}^{15} h(m) x_{n-m}$$
$$= [h(0)x_n + h(1)x_{n-1} + \ldots + h(15)x_{n-15}].$$

Afin de déterminer la valeur des seize échantillons $h(0)$, ... $h(15)$, de la réponse impulsionnelle, la fonction de transfert souhaitée est balayée au pas fréquentiel $\dfrac{1}{NT_e} = \dfrac{500}{16} = 31{,}25$ Hz; ce qui conduit au schéma de la figure 5 sur lequel on relève

$$\left|T_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| = 1 \quad \text{pour} \quad k \leqslant 3$$
$$= 0 \quad \text{pour} \quad k > 3.$$

Le coefficient général, $h(mT_e)$, calculé par :

$$h(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|T_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \times e^{j\varphi_k} e^{2\pi j \frac{km}{N}}$$
$$\left(\text{avec } \varphi_k = -k\pi \frac{N-1}{N} = -\frac{15}{16} k\pi\right)$$

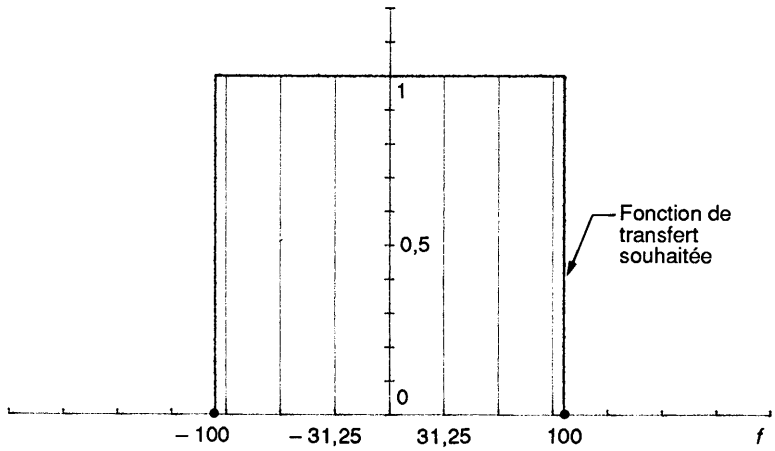


Fig. 5

s'écrit :

$$h(m) = \frac{1}{16} \sum_{k=-3}^{3} e^{jk\pi \frac{2m-15}{16}}.$$

En isolant le terme correspondant à $k = 0$, et en regroupant les termes en k et $-k$, il vient :

$$h(m) = \frac{1}{16}\left[1 + \sum_{k=1}^{3} \left[e^{jk\pi \frac{2m-15}{16}} + e^{-jk\pi \frac{2m-15}{16}}\right]\right]$$

soit

$$h(m) = \frac{1}{16}\left[1 + 2 \times \sum_{k=1}^{3} \cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right)\right].$$

Le calcul numérique donne :

$h(0)$	$= -0{,}048\,5$;	$h(1)$	$= 0{,}030\,8$
$h(2)$	$= 0{,}067\,8$;	$h(3)$	$= -0{,}007\,9$
$h(4)$	$= -0{,}098\,1$;	$h(5)$	$= -0{,}038\,5$
$h(6)$	$= 0{,}189\,9$;	$h(7)$	$= 0{,}404\,5$
$h(8)$	$= 0{,}404\,5$;	$h(9)$	$= 0{,}189\,9$
$h(10)$	$= -0{,}038\,5$;	$h(11)$	$= -0{,}098\,1$
$h(12)$	$= -0{,}007\,9$;	$h(13)$	$= 0{,}067\,8$
$h(14)$	$= -0{,}030\,8$;	$h(15)$	$= -0{,}048\,5$.

L'équation caractéristique du filtre est donc :

$$\begin{aligned} y_n = {} & -0{,}048\,5(x_n + x_{n-15}) \\ & + 0{,}030\,8(x_{n-1} + x_{n-14}) \\ & + 0{,}067\,8(x_{n-2} + x_{n-13}) \\ & - 0{,}007\,9(x_{n-3} + x_{n-12}) \\ & - 0{,}098\,1(x_{n-4} + x_{n-11}) \\ & - 0{,}038\,5(x_{n-5} + x_{n-10}) \\ & + 0{,}189\,9(x_{n-6} + x_{n-9}) \\ & + 0{,}404\,5(x_{n-7} + x_{n-8}). \end{aligned}$$

REMARQUES

1. *La somme des coefficients* $h(0) + h(1) + ... + h(15)$ *est égale à* 1.

Ce résultat est commun à tous les filtres passe-bas. En effet, en continu, pour $x_n = x_{n-1} = ... = x_{n-15} = 1$, *le calcul doit conduire à* $y_n = 1$ *quel que soit* n, *c'est-à-dire :*

$$1 = h(0) + h(1) + ... + h(15).$$

2. *Les coefficients* $h(m)$ *sont tels que* $h(m) = h(15 - m)$. *Le résultat, dû à la variation linéaire de la phase, pouvait être prévu à partir de l'équation :*

$$h(m) = \frac{1}{16}\left[1 + 2 \sum_{k=-3}^{3} \cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right)\right].$$

La transformation $m \rightarrow 15 - m$ *se traduit par :*

$$\cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right) \rightarrow \cos\left(k\pi \frac{30-2m-15}{16}\right) = \cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right).$$

Dans cette transformation tous les termes

$$\cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right)$$

sont invariables et $h(m) = h(15 - m)$.

La fonction de transfert du filtre s'écrit

$$|\underline{T}(f)| = \left| \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \frac{\sin \pi N\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)}{N \sin \pi\left(fT_e - \frac{k}{N}\right)} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=-3}^{3} \frac{\sin\left[16\pi\left(0{,}002f - \frac{k}{16}\right)\right]}{16 \sin\left[\pi\left(0{,}002f - \frac{k}{16}\right)\right]} \right|.$$

Le tracé par ordinateur (programme 2) de la courbe $|T(f)| = f(f)$ est donné à la figure 6.

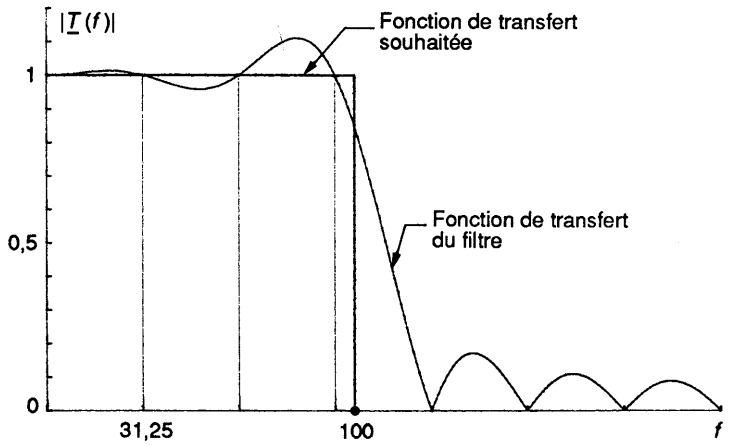


Fig. 6

```
10 SCALE 0,7*31.25,0,1 2
20 XAXIS 0,31.25
30 YAXIS 0,.1
40 MOVE 0,1
50 DRAW 100,1
60 DRAW 100,0
70 FOR N=0 TO 3*31.25 STEP 31.2
   5
80 MOVE N,0
90 DRAW N,1
100 NEXT N
110 FOR N=0 TO 7*31.25 STEP 1
120 A=0
130 FOR K=-3 TO 3
140 B=.002*N-K/16
150 IF B=0 THEN GOTO 190
160 A=A+SIN(16*PI*B)/SIN(PI*B)
170 NEXT K
180 PLOT N,ABS(A)/16
190 NEXT N
200 END
```

Tracé de la fonction de transfert souhaitée

Tracé des points d'échantillonnage

Tracé de la fonction de transfert du filtre

PROGRAMME 2

Elle s'identifie bien à la fonction de transfert souhaitée aux points où les échantillons fréquentiels ont été prélevés, mais elle présente des ondulations intolérables.

Simulation sur ordinateur de la réponse expérimentale

L'échantillon y_n ne dépendant que des échantillons d'entrée (filtre non récursif), la simulation peut être effectuée directement en régime permanent. Elle est obtenue en traçant pour chaque fréquence F, variant entre 5 Hz et 7.(31,25) Hz, une période de la sinusoïde image de y_n. L'échantillon d'entrée x_n s'écrit

$$x_n = \cos 2\pi F n T_e = \cos 0{,}004\pi F n.$$

La valeur maximale de y_n conduit à l'amplitude de la fonction de transfert. Le programme correspondant est le programme 3. La figure 7 donne le tracé fourni par l'ordinateur.

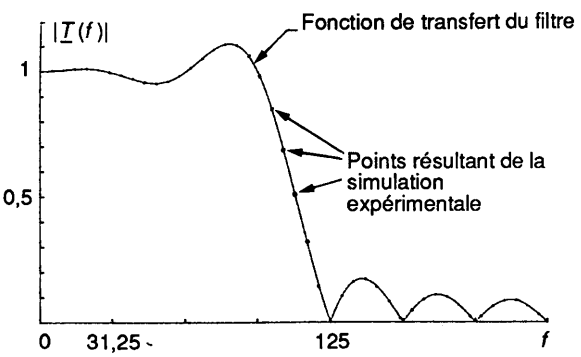


Fig. 7

```
 10 SCALE 0,7*31.25,0,1 2
 20 XAXIS 0,31.25
 30 YAXIS 0,.1
 40 FOR F=5 TO 7*31.25 STEP 5
 50 B=0
 60 FOR N=0 TO 500/F STEP 20/F      → début du calcul d'une sinusoïde y_n
 70 A=.004*PI*F
 80 Y0=-.048547*(COS(A*N)+COS(A*    → calcul de h (0) [x_n+x_n-15]
    (N-15)))
 90 Y1=.030788*(COS(A*(N-1))+COS    → calcul de h (1) [x_n-1+x_n-14]
    (A*(N-14)))
100 Y2=.0678165*(COS(A*(N-2))+CO    → calcul de h (2) [x_n-2+x_n-13]
    S(A*(N-13)))
110 Y3=-.007925*(COS(A*(N-3))+CO    → calcul de h (3) [x_n-3+x_n-12]
    S(A*(N-12)))
120 Y4=-.098045*(COS(A*(N-4))+CO    → calcul de h (4) [x_n-4+x_n-11]
    S(A*(N-11)))
130 Y5=-.038487*(COS(A*(N-5))+CO    → calcul de h (5) [x_n-5+x_n-10]
    S(A*(N-10)))
140 Y6=.18988*(COS(A*(N-6))+COS(    → calcul de h (6) [x_n-6+x_n-9]
    A*(N-9)))
150 Y7=.404517*(COS(A*(N-7))+COS    → calcul de h (7) [x_n-7+x_n-8]
    (A*(N-8)))
160 C=Y0+Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7       → C = y_n
170 IF ABS(C)>=B THEN B=ABS(C)      → B = valeur maximale de y_n
180 NEXT N
190 PENUP
200 PLOT F,B
210 NEXT F
220 END
```

PROGRAMME 3

Les points résultants de la simulation suivent exactement la courbe théorique.

2.4. CALCUL À PARTIR DE L'EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

a) On pourrait espérer obtenir une meilleure réponse du filtre en balayant la fonction de transfert souhaitée, $\underline{T}_0(\mathrm{j}f)$, avec un pas fréquentiel plus faible.

Supposons sur l'exemple précédent, que le balayage s'effectue au pas $\Delta f = \dfrac{1}{LNT_e}$, où $N = 16$ et L est un nombre entier. L'échantillon $h(mT_e)$ de la réponse impulsionnelle s'écrit alors

$$h(mT_e) = \frac{1}{16L} \sum_{k=-\frac{16L}{2}}^{\frac{16L}{2}-1} \underline{T}_0\left(\frac{\mathrm{j}k}{16LT_e}\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{km}{16L}}.$$

Le calcul se poursuit comme précédemment et la fonction de transfert du filtre s'écrit

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{16L} \sum_{k=-8L}^{8L-1} \underline{T}_0\left(\frac{\mathrm{j}k}{16LT_e}\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{km}{16L}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f m T_e}$$

$$= \frac{1}{16L} \sum_{k=-8L}^{8L-1} \sum_{m=0}^{15} \underline{T}_0\left(\frac{\mathrm{j}k}{16LT_e}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)}.$$

En posant

$$\underline{T}_0\left(\mathrm{j}\frac{k}{16LT_e}\right) = \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{16LT_e}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k},$$

il vient :

$$\underline{T}(\mathrm{j}f)$$

$$= \frac{1}{16L} \sum_{k=-8L}^{8L-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{16LT_e}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \sum_{m=0}^{15} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)}$$

$$= \frac{1}{16L} \sum_{k=-8L}^{8L-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{16LT_e}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 15 \left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)} \times \frac{\sin 16\pi\left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)}{\sin \pi\left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)}.$$

Comme précédemment la variation linéaire de la phase impose.

$$\varphi_k = -\frac{k\pi 15}{16L} = -k\pi \frac{N-1}{NL}.$$

Ce qui conduit à

$$|\underline{T}(f)|$$

$$= \frac{1}{16L} \left| \sum_{k=-8L}^{8L-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{16LT_e}\right)\right| \frac{\sin 16\pi\left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)}{\sin \pi\left(fT_e - \frac{k}{16L}\right)} \right|.$$

Dans le cas où $|\underline{T}_0(f)|$ est donné par la figure 2, avec $f_C = 100$ Hz et pour $L = 4$, l'expression précédente devient :

$$|\underline{T}(f)| = \frac{1}{64}\left|\sum_{k=-12}^{k=12} \frac{\sin 16\pi\left(fT_e - \dfrac{k}{64}\right)}{\sin \pi\left(fT_e - \dfrac{k}{64}\right)}\right|.$$

La figure 8 donne le tracé correspondant de la courbe $|\underline{T}(f)| = f(f)$.

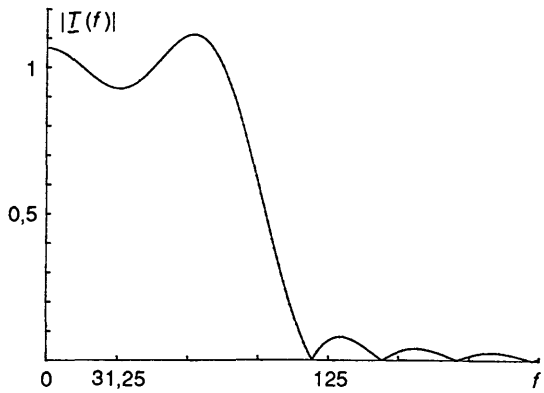


Fig. 8

Pour les valeurs supérieures de L, les courbes représentatives de la fonction de transfert diffèrent peu de la courbe tracée pour $L = 4$. Par comparaison avec la courbe de la figure 6, il apparaît que l'accroissement du nombre de points d'échantillonnage de la fonction de transfert souhaitée $|\underline{T}_0(jf)|$, diminue les ondulations dans la bande atténuée mais les augmente dans la bande passante.

b) À partir de l'expression de $h(mT_e)$

$$h(mT_e) = \frac{1}{16L}\sum_{k=-8L}^{8L-1} \underline{T}_0\left(j\,\frac{k}{16LT_e}\right) e^{2\pi j\frac{km}{16L}}$$

$$= T_e\left[\frac{1}{16LT_e}\sum_{k=-8L}^{8L-1} \underline{T}_0\left(j\,\frac{k}{16LT_e}\right) e^{2\pi j\frac{km}{16LT_e}T_e}\right]$$

et compte tenu de l'expression du pas fréquentiel de balayage

$$\Delta f = \frac{1}{16LT_e}$$

il vient :

$$h(mT_e) = T_e\left[\sum_{k=-8L}^{8L-1} \underline{T}_0(jk\,\Delta f)\, e^{2\pi jk\Delta f mT_e}\,\Delta f\right].$$

Si L tend vers l'infini, le pas de balayage $\Delta f = \dfrac{1}{16LT_e}$ devient infiniment petit et peut être assimilé à la différentielle df. Les limites de k deviennent infiniment grandes et $k\,\Delta f$ tend vers la variable continue f. Le passage à la limite conduit à :

$$h(mT_e) = T_e\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}_0(jf)\, e^{2\pi jfmT_e}\, df.$$

REMARQUE

Par comparaison avec la formule du paragraphe 2.1, il apparaît un facteur T_e supplémentaire. La formule $h(mT_e) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{T}(jf)\, e^{2\pi jfmT_e}\, df$ *présente, en effet, un défaut d'homogénéité dû au fait que l'on associe au signal d'*amplitude $x(nT_e)$*, une impulsion d'*intensité $x(nT_e)$*. Ce défaut disparaît si l'impulsion associée au signal* d'amplitude $x(nT_e)$ *a pour* intensité $T_e \times x(nT_e)$.

Pour l'argument, dont l'expression est :

$$\varphi_k = \arg\,[\underline{T}_0(jk\,\Delta f)] = -k\pi\,\frac{N-1}{NL}$$

$$= -k\,\frac{1}{16LT_e}\,\pi(N-1)T_e$$

$$= -k\,\Delta f\pi(N-1)T_e$$

le passage à la limite se traduit par

$$\boxed{\arg\,[\underline{T}_0(jf)] = -\pi f(N-1)T_e.}$$

c) La formule

$$h(mT_e) = T_e\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}_0(jf)\, e^{2\pi jmfT_e}\, df$$

permet un calcul direct des coefficients $h(mT_e)$ dans le cas où l'expression analytique de $\underline{T}_0(jf)$ est connue.

Reprenons l'exemple précédent :

- $|\underline{T}_0(jf)|$, déterminé à partir de la courbe de la figure 2, est égal à

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } -f_C < f < f_C \\ 0 & \text{pour } |f| > f_C. \end{cases}$$

- $\arg\,[\underline{T}_0(jf)] = -\pi f(N-1)T_e$.

L'expression analytique de $\underline{T}_0(jf)$ s'établit ainsi à :

$$\underline{T}_0(jf) = \begin{cases} e^{-j\pi f(N-1)T_e} & \text{pour } -f_C < f < f_C \\ 0 & \text{pour } |f| > f_C. \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$h(mT_e) = T_e \int_{-\infty}^{\infty} \underline{T}_0(\mathrm{j}f)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f m T_e}\, \mathrm{d}f$$

$$= T_e \int_{-f_C}^{f_C} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f m T_e}\, \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} f (N-1) T_e}\, \mathrm{d}f$$

$$= T_e \int_{-f_C}^{f_C} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}\, \mathrm{d}f$$

soit :

$$h(mT_e) = T_e \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f_C T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f_C T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}}{2\pi \mathrm{j} T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}$$

$$h(mT_e) = \frac{\sin 2\pi f_C T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}{\pi \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}$$

Sur l'exemple précédent, $T_e = 0{,}002$ seconde, $f_C = 100$ Hz, $N = 16$, en posant $h(mT_e) = h(m)$, le calcul numérique conduit à :

$$\begin{aligned}
h(0) &= -1{,}3 \times 10^{-12} \approx 0;\\
h(1) &= 0{,}046\,6;\\
h(2) &= 0{,}034\,0;\\
h(3) &= -0{,}041\,6;\\
h(4) &= -0{,}086\,5;\\
h(5) &= -1{,}3 \times 10^{-12} \approx 0;\\
h(6) &= 0{,}201\,8;\\
h(7) &= 0{,}374\,2;\\
h(8) &= 0{,}374\,2;\\
h(9) &= 0{,}201\,8;\\
h(10) &= -1{,}3 \times 10^{-12} \approx 0;\\
h(11) &= -0{,}086\,5;\\
h(12) &= -0{,}041\,6;\\
h(13) &= 0{,}034\,0;\\
h(14) &= 0{,}046\,6;\\
h(15) &= -1{,}3 \times 10^{-12} \approx 0.
\end{aligned}$$

En posant $y(nT_e) = y_n$ et $x(nT_e) = x_n$, l'équation caractéristique du filtre s'écrit :

$$\begin{aligned}
y_n = {} & \mathbf{0{,}046\,6}(x_{n-1} + x_{n-14})\\
& + \mathbf{0{,}034\,0}(x_{n-2} + x_{n-13})\\
& - \mathbf{0{,}041\,6}(x_{n-3} + x_{n-12})\\
& - \mathbf{0{,}086\,5}(x_{n-4} + x_{n-11})\\
& + \mathbf{0{,}201\,8}(x_{n-6} + x_{n-9})\\
& + \mathbf{0{,}374\,2}(x_{n-7} + x_{n-8}).
\end{aligned}$$

La fonction de transfert du filtre, calculée par

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f m T_e}$$

s'écrit :

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin 2\pi f_C T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}{\pi \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f m T_e}$$

$$= \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1) f T_e} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin 2\pi f_C T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}{\pi \left(m - \frac{N-1}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f T_e \left(m - \frac{N-1}{2}\right)}$$

ou en posant $i = m - \dfrac{N-1}{2}$

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1) f T_e} \sum_{i=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi i f_C T_e}{\pi i}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f T_e i}.$$

En regroupant les termes en $+i$ et $-i$, et sachant que la fonction $\dfrac{\sin 2 f_C T_e x}{x}$ est paire, il vient :

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(N-1) f T_e} \sum_{i=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{\pi i} \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f T_e i} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f T_e i}\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(N-1) f T_e} \sum_{i=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} 2\, \frac{\sin 2\pi f_C T_e i \cos 2\pi f T_e i}{\pi i}.$$

– L'argument de $\underline{T}(\mathrm{j}f) = -\pi(N-1) f T_e$, est bien proportionnel à la fréquence f (filtre à phase linéaire).

– Le module de $\underline{T}(\mathrm{j}f)$ s'écrit :

$$|\underline{T}(f)| = \left| \sum_{i=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} 2 \times \frac{\sin 2\pi f_C T_e i \times \cos 2\pi f T_e i}{\pi i} \right|.$$

Pour $f_C = 100$ Hz, $T_e = 0{,}002$ seconde et $N = 16$, le tracé de $|\underline{T}(f)|$ par ordinateur, à l'aide du programme 4 conduit à la courbe de la figure 9.

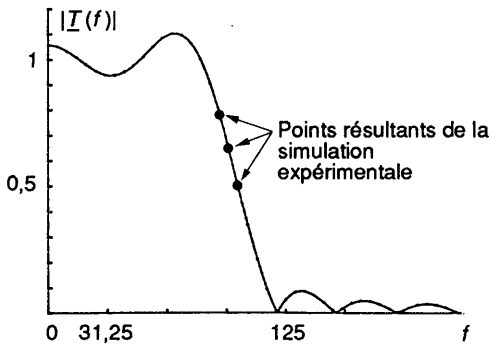


Fig. 9

```
10 SCALE 0,7*31.25,0,1.2
20 XAXIS 0,31.25
30 YAXIS 0, 1
40 FOR N=0 TO 7*31.25
50 A=0
60 FOR K=.5 TO 7.5 STEP 1
70 A=A+2*SIN(.4*PI*K)*COS(.004*
   PI*N*K)/(PI*K)
80 NEXT K
90 PLOT N,ABS(A)
100 NEXT N
110 END
```

PROGRAMME 4

La courbe obtenue est peu différente de celle de la figure 8, correspondant à un balayage de la fonction de transfert souhaitée avec le pas fréquentiel $\Delta f = \dfrac{1}{64T_e}$.

La simulation de la réponse expérimentale peut être effectuée à l'aide du programme 3 dans lequel les coefficients $h(m)$ sont modifiés conformément à la nouvelle équation caractéristique du filtre. Les points correspondants sont reportés sur la figure 9. Ils s'inscrivent sur la courbe théorique.

2.5. DIMINUTION DES ONDULATIONS : NOTION DE FENÊTRE TEMPORELLE

a) Revenons à la détermination de $h(mT_e)$ par balayage de la fonction de transfert souhaitée, $|T_0(f)|$, au pas fréquentiel $\Delta f = \dfrac{1}{NT_e}$. Étudions, dans un premier temps, l'effet de la multiplication de l'échantillon temporel $h(mT_e)$ par $e^{2\pi j \frac{m}{N-1}}$.

La fonction de transfert du filtre devient :

$$\underline{T}'(jf) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\, e^{-2\pi j \frac{m}{N-1}}\, e^{2\pi j m f T_e}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\, e^{-2\pi j m T_e \left[f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right]}$$

$$= \underline{T}\left[j\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right]$$

le remplacement de f par $f - \dfrac{1}{(N-1)T_e}$ traduit une translation fréquentielle de $\dfrac{1}{(N-1)T_e}$.

b) On réalise une **fenêtre de Hamming** en multipliant l'échantillon temporel $h(mT_e)$ par

$$\frac{1}{2}\left[1 - \cos 2\pi \frac{m}{N-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{e^{2\pi j \frac{m}{N-1}} + e^{-2\pi j \frac{m}{N-1}}}{2}\right].$$

La fonction de transfert du filtre devient :

$$\underline{T}_H(jf) = \frac{1}{2}\left[\underline{T}(jf) - \frac{1}{2} \times \underline{T}\left[j\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right] - \frac{1}{2} \times \underline{T}\left[j\left(f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right]\right].$$

Soit, compte tenu de

$$\underline{T}(jf) = e^{-\pi j(N-1)fT_e} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \frac{\sin \pi N T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}$$

et en posant

$$\underline{H}(jf) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right| \frac{\sin \pi N T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}{N \sin \pi T_e\left(f - \frac{k}{NT_e}\right)}$$

$$\underline{T}_H(jf) = \frac{1}{2}\left[e^{-\pi j(N-1)fT_e}\underline{H}(jf) - \frac{1}{2}e^{-\pi j(N-1)fT_e}e^{+\pi j}\underline{H}\left[j\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right] - \frac{1}{2}e^{-\pi j(N-1)fT_e}e^{-\pi j}\underline{H}\left[j\left(f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right]\right].$$

Compte tenu de $e^{\pi j} = e^{-\pi j} = -1$, il vient :

$$\underline{T}_H(jf) = \frac{e^{-\pi j(N-1)fT_e}}{2}\left[\underline{H}(jf) + \frac{1}{2}\underline{H}\left[j\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right] + \frac{1}{2}\underline{H}\left[j\left(f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right]\right].$$

La phase de $\underline{T}_H(jf)$, $-\pi(N-1)fT_e$, est identique à celle de $\underline{T}(jf)$, mais, chaque échantillon fréquentiel $\left|\underline{T}_0\left(\frac{k}{NT_e}\right)\right|$ qui était précédemment multiplié par une fonction de la forme

$$\frac{\sin \pi N T_e F}{N \sin \pi T_e F} \quad \text{avec} \quad F = f - \frac{k}{NT_e}$$

(*fig.* 4) est maintenant multiplié par :

$$G(F) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin \pi N T_e F}{N \sin \pi T_e F} + \frac{\sin \pi N\left(T_e F - \frac{1}{N-1}\right)}{2N \sin \pi\left(T_e F - \frac{1}{N-1}\right)} + \frac{\sin \pi N\left(T_e F + \frac{1}{N-1}\right)}{2N \sin \pi\left(T_e F + \frac{1}{N-1}\right)}\right]$$

dont la représentation en fonction de F est donnée à la figure 10.

Par comparaison avec la courbe de la figure 4, les ondulations sont très atténuées et la largeur du lobe central est passée de $\frac{2}{NT_e}$ à $\frac{4}{NT_e}$.

Reprenons le filtre dont la fonction de transfert souhaitée, $|\underline{T}_0(f)|$ est donnée par la courbe de la figure 2, avec $f_C = 100$ Hertz et pour $T_e = 0{,}002$ seconde et $N = 16$, la fonction de transfert du filtre s'écrit

$$|\underline{T}_H(f)| = \frac{1}{2}\sum_{k=-3}^{3} G\left(f - \frac{k}{NT_e}\right).$$

Ses variations en fonction de f sont données à la figure 11.

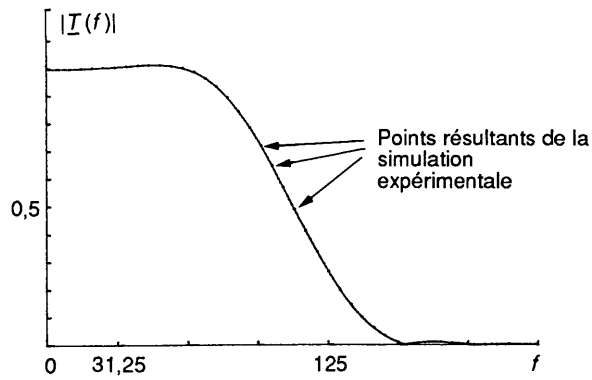


Fig. 11

Le calcul numérique des coefficients du filtre s'effectue par

$$h_H(mT_e) = \frac{h(mT_e)}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi m}{N-1}\right)$$

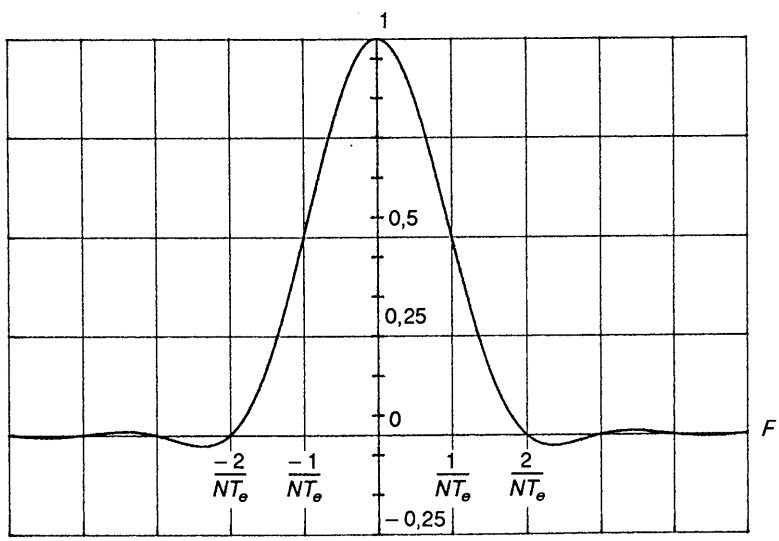


Fig. 10

d'où, pour $h_H(mT_e)$, la formule suivante :

$$= \frac{\left(1 - \cos 2\pi \frac{m}{15}\right)}{32}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{3} \cos\left(k\pi \frac{2m-15}{16}\right)\right]$$

conduit à :

$h_H(0)$	= 0;	$h_H(1)$	= 0,001 3;
$h_H(2)$	= 0,011 2;	$h_H(3)$	= − 0,002 7;
$h_H(4)$	= − 0,054 1;	$h_H(5)$	= − 0,028 9;
$h_H(6)$	= 0,171 8;	$h_H(7)$	= 0,400 1;
$h_H(8)$	= 0,400 1;	$h_H(9)$	= 0,171 8;
$h_H(10)$	= − 0,028 9;	$h_H(11)$	= − 0,054 1;
$h_H(12)$	= − 0,002 7;	$h_H(13)$	= 0,011 2;
$h_H(14)$	= 0,001 3;	$h_H(15)$	= 0.

L'équation caractéristique du filtre s'écrit

$$\begin{aligned} y_n = {} & \mathbf{0{,}001\,3}(x_{n-1} + x_{n-14}) \\ & + \mathbf{0{,}011\,2}(x_{n-2} + x_{n-13}) \\ & - \mathbf{0{,}002\,7}(x_{n-3} + x_{n-12}) \\ & - \mathbf{0{,}054\,1}(x_{n-4} + x_{n-11}) \\ & - \mathbf{0{,}028\,9}(x_{n-5} + x_{n-10}) \\ & + \mathbf{0{,}171\,8}(x_{n-6} + x_{n-9}) \\ & + \mathbf{0{,}400\,1}(x_{n-7} + x_{n-8}). \end{aligned}$$

Les points résultants de la simulation expérimentale et tracés à l'aide du programme 3, sur lequel les coefficients $h_H(mT_e)$ ont été modifiés conformément à l'équation caractéristique, sont reportés sur la figure 11.

Les ondulations de la fonction de transfert du filtre sont effectivement atténuées mais le front de la réponse fréquentielle est moins raide et ce, consécutivement à l'élargissement du lobe central $\left(\text{de } \frac{2}{NT_e} \text{ à } \frac{4}{NT_e}\right)$. On peut considérer que la transition de la bande passante à la bande atténuée s'effectue sur une plage fréquentielle d'environ $\frac{3}{NT_e}$. Pour obtenir un front plus raide, on peut, si le temps de calcul le permet, augmenter le nombre N de points sur lesquels opère l'algorithme.

c) Pour le cas où la détermination des échantillons temporels $h(mT_e)$ est effectuée à partir de l'expression analytique $\underline{T}_0(\mathrm{j}f)$ de la fonction de transfert souhaitée, la multiplication de $h(mT_e)$ par $\frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi m}{N-1}\right)$ transforme la fonction de transfert du filtre

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1)fT_e} \sum_{i=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} 2 \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{\pi i} \cos 2\pi f T_e i$$

en $\underline{T}_H(\mathrm{j}f) = \frac{1}{2}\left[\underline{T}(\mathrm{j}f) - \frac{1}{2}\underline{T}\left[\mathrm{j}\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right] - \frac{1}{2}\underline{T}\left[\mathrm{j}\left(f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right]\right]$

$$= \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1)fT_e} \sum_{i=0,5}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{\pi i} \cos 2\pi f T_e i - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1)fT_e}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} \sum_{i=0,5}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{2\pi i} \cos 2\pi T_e i\left[f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right] - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1)fT_e}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} \sum_{i=0,5}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{2\pi i} \cos 2\pi T_e i\left[f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right]$$

ou compte tenu de $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -1$

$$\underline{T}_H(\mathrm{j}f) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(N-1)fT_e} \sum_{i=0,5}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin 2\pi f_C T_e i}{\pi i} \left[\cos 2\pi f T_e i + \frac{1}{2}\cos 2\pi T_e i\left(f - \frac{1}{(N-1)T_e}\right) + \frac{1}{2}\cos 2\pi T_e i\left(f + \frac{1}{(N-1)T_e}\right)\right].$$

La représentation de $|\underline{T}_H(f)|$ est donné à la figure 12.

Le tracé est effectué en décibels pour faciliter l'inscription de la courbe dans un éventuel gabarit.

Le calcul des échantillons temporels $h_H(mT_e)$ par

$$h_H(mT_e) = \frac{h(mT_e)}{2}\left[1 - \cos \frac{2\pi m}{N-1}\right] = \frac{\sin 2\pi f_C T_e\left(m - \frac{N-1}{2}\right)}{2\pi\left(m - \frac{N-1}{2}\right)} \times \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{N-1}\right)$$

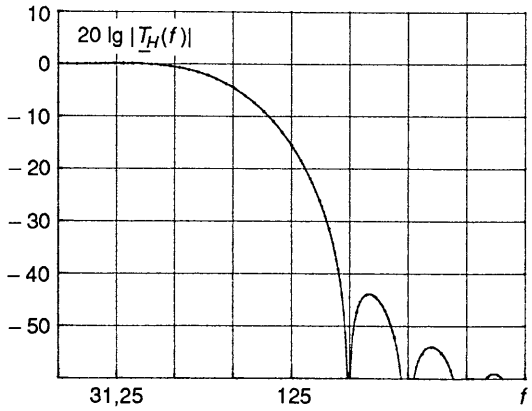


Fig. 12

conduit à :

$h(0) = h(15) = 0;$

$h(1) = h(14) = 0{,}002\,0;$

$h(2) = h(13) = 0{,}005\,6;$

$h(3) = h(12) = -\,0{,}014\,4;$

$h(4) = h(11) = -\,0{,}047\,8;$

$h(5) = h(10) = -\,9 \times 10^{-13} \approx 0;$

$h(6) = h(9) = 0{,}182\,5;$

$h(7) = h(8) = 0{,}370\,1.$

L'équation caractéristique du filtre s'écrit :

$$\begin{aligned} y_n = {} & 0{,}002(x_{n-1} + x_{n-14}) \\ & + 0{,}005\,6(x_{n-2} + x_{n-13}) \\ & - 0{,}014\,4(x_{n-3} + x_{n-12}) \\ & - 0{,}047\,8(x_{n-4} + x_{n-11}) \\ & + 0{,}182\,5(x_{n-6} + x_{n-9}) \\ & + 0{,}370\,1(x_{n-7} + x_{n-8}) \end{aligned}$$

REMARQUES

1. *La fenêtre de Hamming provoque dans la bande de fréquences à éliminer une atténuation minimale de 44 db. Si cette atténuation est insuffisante, il faut utiliser une fenêtre plus sophistiquée (Kaiser, Blackman...).*

2. *Si le gabarit impose un front plus raide entre la bande passante et la bande atténuée, il faut augmenter le nombre N d'échantillons temporels $h(mT_e)$.*

2.6. RÉALISATION RÉCURSIVE DES FILTRES R.I.F.

Sachant que la transmittance en Z du filtre s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT_e)\underline{Z}^{-m}$$

et que l'on approxime $h(mT_e)$ par

$$h(mT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{km}{N}}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \underline{T}(\underline{Z}) &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right)}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\underline{Z}^{-1}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}})^m \\ &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right)}{N} \times \frac{1 - (\underline{Z}^{-1} \times \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}})^N}{1 - \underline{Z}^{-1} \times \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$(\underline{Z}^{-1}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}})^N = \underline{Z}^{-N}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} k} = \underline{Z}^{-N}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{T}(\underline{Z}) = {} & \frac{1 - \underline{Z}^{-N}}{N} \\ & \times \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \frac{1}{1 - \underline{Z}^{-1} \times \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}}} \end{aligned}$$

Le système résulte de la mise en cascade de deux systèmes dont les transmittances s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \underline{T}_a(\underline{Z}) = \dfrac{1 - \underline{Z}^{-N}}{N} \\ \underline{T}_b(\underline{Z}) = \displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \frac{1}{1 - \underline{Z}^{-1}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}}}. \end{cases}$$

Le filtre de transmittance $\underline{T}_b(\underline{Z})$ peut être représenté par la mise en parallèle de N filtres de transmittance

$$\underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) \frac{1}{1 - \underline{Z}^{-1}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{k}{N}}}.$$

Sur l'exemple traité précédemment

$$\underline{T}_0\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{NT_e}\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} \frac{N-1}{N} k} & \text{pour } -3 \leqslant k \leqslant 3 \\ 0 & \text{pour } |k| > 3. \end{cases}$$

La transmittance $\underline{T}_b(\underline{Z})$ s'écrit alors :

$$\underline{T}_b(\underline{Z}) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{e^{-\pi jk\frac{N-1}{N}}}{1-\underline{Z}^{-1}\,e^{2\pi j\frac{k}{N}}}$$

ou, en isolant le terme correspondant à $k = 0$ et en regroupant les termes en k et $-k$.

$$\underline{T}_b(\underline{Z}) = \frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{e^{-\pi jk\frac{N-1}{N}}}{1-\underline{Z}^{-1}e^{2\pi j\frac{k}{N}}} + \frac{e^{\pi jk\frac{N-1}{N}}}{1-\underline{Z}^{-1}\times e^{-2\pi j\frac{k}{N}}}$$

$$= \frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} + 2\sum_{k=1}^{3} \frac{\cos k\pi\frac{N-1}{N} - \underline{Z}^{-1}\cos k\pi\frac{N+1}{N}}{1-2\underline{Z}^{-1}\cos\frac{2\pi k}{N}+\underline{Z}^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} + 2\sum_{k=1}^{3} (-1)^k \times \frac{(1-\underline{Z}^{-1})\cos\frac{k\pi}{N}}{1-2\underline{Z}^{-1}\cos\frac{2\pi k}{N}+\underline{Z}^{-2}}.$$

- La transmittance

$$\underline{T}_a(\underline{Z}) = \frac{1-\underline{Z}^{-N}}{N} = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})}$$

conduit à l'algorithme

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-N}}{N}.$$

- La transmittance $\dfrac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})} = \dfrac{1}{1-\underline{Z}^{-1}}$ conduit à l'algorithme $y_n = y_{n-1} + x_n$.

- La transmittance

$$\underline{T}_b(\underline{Z}) = 2(-1)^k \frac{(1-\underline{Z}^{-1})\cos\frac{k\pi}{N}}{1-2\underline{Z}^{-1}\cos\frac{2\pi k}{N}+\underline{Z}^{-2}} = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})}$$

donne l'équation

$$y_n = (-1)^k\left[(x_n - x_{n-1})2\cos\frac{k\pi}{N}\right] + 2y_{n-1}\cos\frac{2k\pi}{N} - y_{n-2}.$$

Soit pour $N = 16$ et

$k = 1$

$$y_n = 1{,}962(x_{n-1} - x_n) + 1{,}848y_{n-1} - y_{n-2}$$

$k = 2$

$$y_n = 1{,}848(x_n - x_{n-1}) + 1{,}414y_{n-1} - y_{n-2}$$

$k = 3$

$$y_n = 1{,}663(x_{n-1} - x_n) + 0{,}765y_{n-1} - y_{n-2}.$$

La réalisation du filtre peut alors être représentée par le schéma de la figure 13.
Le calcul de l'échantillon y_n s'effectue de la manière suivante :

– u_n est calculé à partir de x_n et x_{n-16}.

– Les échantillons y'_n, y''_n, y'''_n, y''''_n sont calculés à partir des échantillons u_n et u_{n-1} par quatre algorithmes récursifs.

– L'échantillon y_n est calculé par

$$y_n = \frac{y'_n + y''_n + y'''_n + y''''_n}{N}.$$

La réalisation récursive des filtres R.I.F. permet de diminuer le temps de calcul dans le cas où de nombreux échantillons $\left|T_0\left(j\,\dfrac{k}{NT_e}\right)\right|$ sont nuls.

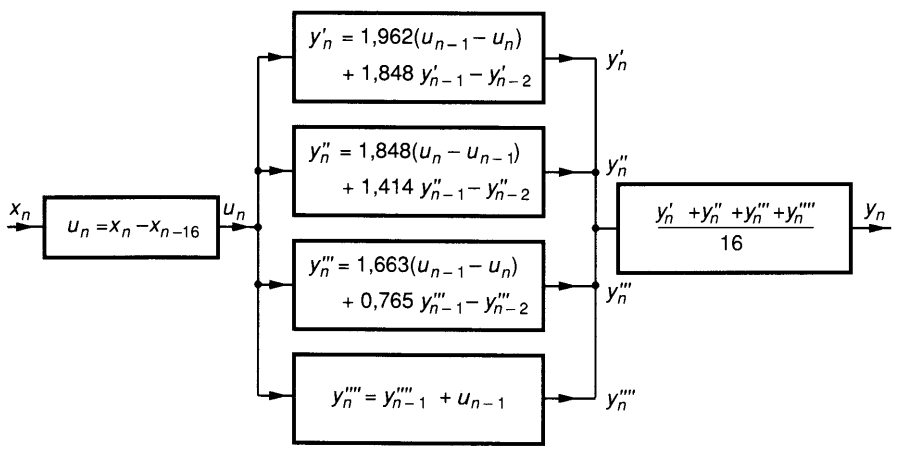


Fig. 13

3. LES FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE (R.I.I.)

L'étude des filtres à réponse impulsionnelle infinie permet de déterminer l'équation caractéristique du filtre à partir de la fonction de transfert analogique souhaitée. Elle autorise ainsi la liaison avec la théorie générale du filtrage exposées au début de cette partie. Il a été établi, au chapitre 5 du tome 1, que cette transition peut être réalisée par l'une des approximations suivantes : équivalence de la dérivation — équivalence de l'intégration — échantillonnage de la réponse impulsionnelle.

3.1. ÉQUIVALENCE DE LA DÉRIVATION

Dans cette approximation, le passage de la transmittance de Laplace à la transmittance en Z s'effectue par :

$$\underline{P} \leftrightarrow \frac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$$

où T_e est la période d'échantillonnage.

Exemple de calcul

Soit à déterminer l'équation caractéristique du filtre passe-bas dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 14.

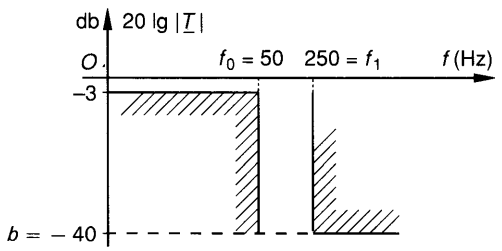


Fig. 14

La synthèse sera réalisée en utilisant un filtre de Butterworth et la période d'échantillonnage est fixée à $T_e = 0{,}001$ seconde. L'ordre du filtre donné par

$$n \geqslant \frac{\lg\left(10^{-\frac{b}{10}} - 1\right)}{2 \lg\left(\frac{f_1}{f_0}\right)} = 2{,}86$$

est égal à 3.

La fonction de transfert normalisée, extraite des tables de Butterworth, s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + \underline{s})(1 + \underline{s} + \underline{s}^2)}.$$

Compte tenu de

$$\underline{s} = \frac{j\omega}{\omega_0} = \frac{\underline{P}}{\omega_0}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = 100\pi,$$

la transmittance de Laplace à réaliser s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\omega_0^3}{(\underline{P} + \omega_0)(\underline{P}^2 + \omega_0 \underline{P} + \omega_0^2)}.$$

Par application de l'équivalence de la dérivation, la transmittance en Z s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{\omega_0^3}{\left(\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{T_e} + \omega_0\right)\left[\frac{(1-\underline{Z}^{-1})^2}{T_e^2} + \omega_0 \frac{(1-\underline{Z}^{-1})}{T_e} + \omega_0^2\right]}$$

$$= \frac{(\omega_0 T_e)^3}{(1+\omega_0 T_e - \underline{Z}^{-1})[1+\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2 - \underline{Z}^{-1}(2+\omega_0 T_e) + Z^{-2}]}$$

où, compte tenu des valeurs numériques

$$\left(\omega_0 T_e = \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{0{,}031\,0}{1{,}856\,7 - 4{,}454\,0\underline{Z}^{-1} + 3{,}628\,3\underline{Z}^{-2} - \underline{Z}^{-3}}.$$

Ce qui conduit à l'équation caractéristique du filtre numérique

$$y_n = y_{n-1}\frac{4{,}454\,0}{1{,}856\,7} - y_{n-2}\frac{3{,}628\,3}{1{,}856\,7} + y_{n-3}\frac{1}{1{,}856\,7} + x_n \frac{0{,}031\,0}{1{,}856\,7}.$$

Soit

$$\boxed{y_n = 2{,}398\,9 y_{n-1} - 1{,}954\,2 y_{n-2} + 0{,}538\,6 y_{n-3} + 0{,}016\,7 x_n.}$$

La transmittance complexe du filtre numérique est obtenue en remplaçant, dans la transmittance en Z, la variable $\underline{Z}$ par $e^{\pi j f T_e}$, soit :

$$\underline{T}(jf) = \frac{0{,}031\,0}{1{,}856\,7 - 4{,}454\,0\,e^{-2\pi j f T_e} + 3{,}628\,3\,e^{-4\pi j f T_e} - e^{-6\pi j f T_e}}.$$

Son module est donné par

$$|\underline{T}(jf)| = \frac{0{,}031\,0}{\sqrt{R^2(f) + I^2(f)}}$$

avec

$$\begin{cases} R(f) = 1{,}856\,7 - 4{,}454 \cos 2\pi f T_e \\ \qquad\quad + 3{,}628\,3 \cos 4\pi f T_e - \cos 6\pi f T_e \\ I(f) = -4{,}454 \sin 2\pi f T_e \\ \qquad\quad + 3{,}628\,3 \sin 4\pi f T_e - \sin 6\pi f T_e. \end{cases}$$

La représentation de 20 lg $|T(f)|$ dans le diagramme de Bode est donnée à la figure 15

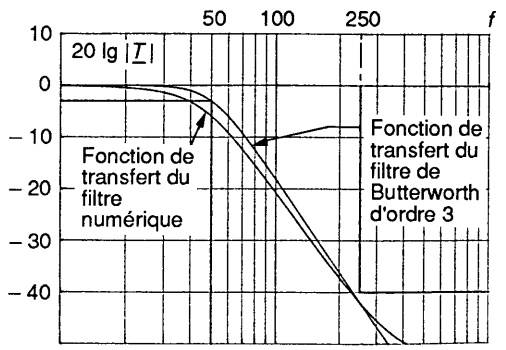


Fig. 15

La fréquence d'échantillonnage n'étant pas suffisamment élevée, la courbe de réponse du filtre ne s'inscrit pas dans le gabarit.

3.2. ÉQUIVALENCE DE L'INTÉGRATION

Dans cette approximation, le passage de la transmittance de Laplace à la transmittance en Z s'effectue par la transformation bilinéaire

$$\underline{P} \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - \underline{Z}^{-1}}{1 + \underline{Z}^{-1}}.$$

Exemple de calcul

Reprenons l'exemple précédent, pour lequel la transmittance de Laplace à réaliser s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\omega_0^3}{(\underline{P} + \omega_0)(\underline{P}^2 + \omega_0 \underline{P} + \omega_0^2)}$$

avec $\omega_0 = 100\pi$ et $T_e = 0{,}001$ seconde.
La transmittance en Z correspondante s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{\omega_0^3}{\left(\frac{2}{T_e}\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}} + \omega_0\right)\left[\frac{4}{T_e^2}\frac{(1-\underline{Z}^{-1})^2}{(1+\underline{Z}^{-1})^2} + \frac{2\omega_0}{T_e}\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}} + \omega_0^2\right]}$$

$$= \frac{(\omega_0 T_e)^3 (1 + \underline{Z}^{-1})^3}{[2(1-\underline{Z}^{-1}) + \omega_0 T_e(1 + \underline{Z}^{-1})][4(1-\underline{Z}^{-1})^2 + 2\omega_0 T_e(1-\underline{Z}^{-1})(1+\underline{Z}^{-1}) + \omega_0^2 T_e^2 (1+\underline{Z}^{-1})^2]}$$

$$= \frac{(\omega_0 T_e)^3 (1 + 3\underline{Z}^{-1} + 3\underline{Z}^{-2} + \underline{Z}^{-3})}{[2 + \omega_0 T_e + \underline{Z}^{-1}(\omega_0 T_e - 2)][4 + 2\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2 + 2\underline{Z}^{-1}(\omega_0^2 T_e^2 - 4) + \underline{Z}^{-2}(4 - 2\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2)]}$$

ou, compte tenu des valeurs numériques

$$\left(\omega_0 T_e = \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{0{,}031\,00(1 + 3\underline{Z}^{-1} + 3\underline{Z}^{-2} + \underline{Z}^{-3})}{10{,}939\,1 - 26{,}025\,5\underline{Z}^{-1} + 21{,}184\,9\underline{Z}^{-2} - 5{,}850\,5\underline{Z}^{-3}}.$$

Ce qui conduit à l'équation caractéristique du filtre

$$y_n = \frac{26{,}025\,5}{10{,}939\,1} y_{n-1} - \frac{21{,}184\,9}{10{,}939\,1} y_{n-2} + \frac{5{,}850\,5}{10{,}939\,1} y_{n-3} + \frac{0{,}031\,0}{10{,}939\,1}(x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3})$$

soit

$$y_n = 2{,}379\,1 y_{n-1} - 1{,}936\,6 y_{n-2} + 0{,}534\,8 y_{n-3} + 0{,}002\,8(x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3}).$$

La transmittance complexe du filtre, obtenue par $\underline{Z} \leftrightarrow e^{2\pi j f T_e}$, s'écrit

$$\underline{T}(jf) = \frac{0{,}031(1 + 3e^{-2\pi j f T_e} + 3e^{-4\pi j f T_e} + e^{-6\pi j f T_e})}{10{,}939\,1 - 26{,}025\,5 e^{-2\pi j f T_e} + 21{,}184\,9 e^{-4\pi j f T_e} - 5{,}850\,5 e^{-6\pi j f T_e}}.$$

Son module est donné par

$$|\underline{T}(jf)| = \sqrt{\frac{R_1^2(f) + I_1^2(f)}{R_2^2(f) + I_2^2(f)}}$$

avec

$$\begin{cases} R_1(f) = 0{,}031(1 + 3\cos 2\pi f T_e \\ \qquad\quad + 3\cos 4\pi f T_e + \cos 6\pi f T_e) \\ I_1(f) = 0{,}031(3\sin 2\pi f T_e + 3\sin 4\pi f T_e \\ \qquad\quad + \sin 6\pi f T_e) \\ R_2(f) = 10{,}939\,1 - 26{,}025\,5\cos 2\pi f T_e \\ \qquad + 21{,}184\,9\cos 4\pi f T_e - 5{,}850\,5\cos 6\pi f T_e \\ I_2(f) = -26{,}025\,5\sin 2\pi f T_e \\ \qquad + 21{,}184\,9\sin 4\pi f T_e - 5{,}850\,5\sin 6\pi f T_e. \end{cases}$$

La représentation de 20 lg $|\underline{T}(f)|$ dans le diagramme de Bode est donnée à la figure 16.

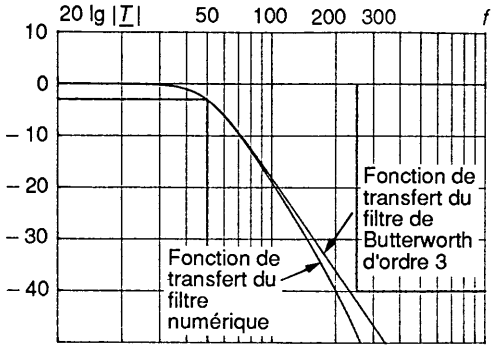


Fig. 16

La courbe de réponse du filtre s'inscrit dans le gabarit.

REMARQUE

La transformation bilinéaire $\underline{P} \leftrightarrow \frac{2}{T_e}\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}}$ *se traduit en régime harmonique par*

$$j\omega \leftrightarrow \frac{2}{T_e}\frac{1-e^{-2\pi jfT_e}}{1+e^{-2\pi jfT_e}} = \frac{2}{T_e}\frac{e^{+\pi jfT_e}-e^{-\pi jfT_e}}{e^{+\pi jfT_e}+e^{-\pi jfT_e}}$$

soit $j\omega \leftrightarrow \frac{2j}{T_e}\frac{\sin \pi f T_e}{\cos \pi f T_e}$.

A la fréquence analogique f_a, *la transformée bilinéaire fait ainsi correspondre la fréquence* f *suivant la relation*

$$f_a \leftrightarrow \frac{1}{\pi T_e}\tan \pi f T_e$$

où $f = \frac{1}{\pi T_e}\arctan \pi f_a T_e$.

• *A la fréquence analogique* $f_a = 50$ *Hz correspond la fréquence*

$$f = \frac{1}{0{,}001\pi}\arctan(\pi \times 50 \times 0{,}001) = 49{,}6 \text{ Hz}.$$

La perturbation est ainsi peu sensible au voisinage de la fréquence de coupure $f_0 = 50$ *Hz.*

• *A la fréquence analogique* $f_a = 250$ *Hz correspond la fréquence*

$$f = \frac{1}{0{,}001\pi}\arctan(\pi \times 250 \times 0{,}001) = 212 \text{ Hz},$$

ce qui explique l'écart par rapport à la courbe théorique.

3.3. ÉCHANTILLONNAGE DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE

Dans cette méthode de transposition, la transformée en Z, $\underline{T}(\underline{Z})$ est obtenue à partir de la transformée de Laplace $\underline{T}(\underline{P})$ par l'opération

$$\underline{T}(\underline{Z}) = (1-\underline{Z}^{-1})\sum_{i=0}^{k}\frac{\underline{A}_i}{1-e^{\underline{P}_i T_e}\underline{Z}^{-1}}$$

où $\underline{P}_i$ sont les pôles de la transmittance $\frac{\underline{T}(\underline{P})}{\underline{P}}$ et $\underline{A}_i$ les résidus correspondants.

Exemple de calcul

Reprenons l'exemple précédent, pour lequel la transmittance à réaliser s'écrit

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{\omega_0^3}{(\underline{P}+\omega_0)(\underline{P}^2+\omega_0\underline{P}+\omega_0^2)}.$$

La transmittance

$$\frac{\underline{T}(\underline{P})}{\underline{P}} = \frac{\omega_0^3}{\underline{P}(\underline{P}+\omega_0)(\underline{P}^2+\omega_0\underline{P}+\omega_0^2)}$$

s'écrit, après décomposition en éléments simples

$$\frac{\underline{T}(\underline{P})}{\underline{P}} = \frac{1}{\underline{P}} - \frac{1}{\underline{P}+\omega_0} + \frac{1}{\sqrt{3}j}\left[\frac{1}{\underline{P}+\omega_0\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{1}{\underline{P}+\omega_0\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right]$$

soit :

$$\underline{P}_0 = 0; \quad \underline{P}_1 = -\omega_0; \quad \underline{P}_2 = -\omega_0\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad \underline{P}_3 = -\omega_0\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\underline{A}_0 = 1; \quad \underline{A}_1 = -1; \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}j}; \quad \underline{A}_3 = \frac{-1}{\sqrt{3}j}.$$

La transmittance en Z correspondante s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{Z}) = (1-\underline{Z}^{-1})\sum_{i=0}^{3}\frac{\underline{A}_i}{1-e^{\underline{P}_i T_e}\underline{Z}^{-1}}$$

$$= (1-Z^{-1})\left[\frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}j}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}(1+j\sqrt{3})}\underline{Z}^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}(1-j\sqrt{3})}\underline{Z}^{-1}}\right)\right]$$

$$= \frac{\underline{Z}^{-1}(1 - e^{-\omega_0 T_e})}{1 - e^{-\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-1}} - \frac{(1 - \underline{Z}^{-1})}{\sqrt{3}j}$$

$$\left(\frac{e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}}(e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 T_e} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 T_e})\underline{Z}^{-1}}{1 - e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}}(e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 T_e} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 T_e})\underline{Z}^{-1} + e^{-\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}} \right)$$

$$= \frac{\underline{Z}^{-1}(1 - e^{-\omega_0 T_e})}{1 - e^{-\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-1}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 T_e (\underline{Z}^{-1} - \underline{Z}^{-2})}{1 - 2e^{-\frac{\omega_0 T_e}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 T_e \underline{Z}^{-1} + e^{-\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}}$$

ou, compte tenu des valeurs numériques ($\omega_0 T_e = \pi/10$)

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{0{,}2696\underline{Z}^{-1}}{1 - 0{,}7304\underline{Z}^{-1}} - \frac{0{,}2652(\underline{Z}^{-1} - \underline{Z}^{-2})}{1 - 1{,}6464\underline{Z}^{-1} + 0{,}7304\underline{Z}^{-2}}$$

$$= \frac{0{,}0044\underline{Z}^{-1} + 0{,}0150\underline{Z}^{-2} + 0{,}0032\underline{Z}^{-3}}{1 - 2{,}3768\underline{Z}^{-1} + 1{,}9329\underline{Z}^{-2} - 0{,}5335\underline{Z}^{-3}}$$

ce qui correspond, pour le filtre, à l'équation caractéristique

$$\boxed{y_n = 2{,}3768y_{n-1} - 1{,}9329y_{n-2} + 0{,}5335y_{n-3} + 0{,}0044x_{n-1} + 0{,}0150x_{n-2} + 0{,}0032x_{n-3}}$$

La transmittance complexe du filtre obtenue par la transformation

$$\underline{Z} \leftrightarrow e^{2\pi j f T_e}$$

s'écrit :

$$\underline{T}(jf) = \frac{0{,}0044e^{-2\pi j f T_e} + 0{,}0150e^{-4\pi j f T_e} + 0{,}0032e^{-6\pi j f T_e}}{1 - 2{,}3768e^{-2\pi j f T_e} + 1{,}9329e^{-4\pi j f T_e} - 0{,}5335e^{-6\pi j f T_e}}$$

Son module est donné par

$$|T(jf)| = \sqrt{\frac{R_1^2(f) + I_1^2(f)}{R_2^2(f) + \underline{T}_2^2(f)}}$$

avec

$$R_1(f) = 0{,}0044 \cos 2\pi f T_e + 0{,}0150 \cos 4\pi f T_e + 0{,}0032 \cos 6\pi f T_e;$$

$$I_1(f) = 0{,}0044 \sin 2\pi f T_e + 0{,}0150 \sin 4\pi f T_e + 0{,}0032 \sin 6\pi f T_e;$$

$$R_2(f) = 1 - 2{,}3768 \cos 2\pi f T_e + 1{,}9329 \cos 4\pi f T_e - 0{,}5335 \cos 6\pi f T_2;$$

$$T_2(f) = -2{,}3768 \sin 2\pi f T_e + 1{,}9329 \sin 4\pi f T_e - 0{,}5335 \sin 6\pi f T_e.$$

La représentation dans le diagramme de Bode est donnée à la figure 17.

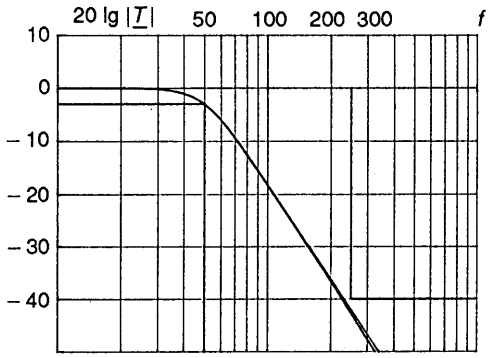


Fig. 17

Elle est quasiment confondue avec la courbe théorique.

Simulation de la réponse indicielle expérimentale

Pour une attaque par un échelon, $\underline{X}(\underline{P}) = \frac{1}{\underline{P}}$, la transformée de Laplace du signal de sortie s'écrit :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{\underline{T}(\underline{P})}{\underline{P}} = \frac{\omega_0^3}{\underline{P}(\underline{P} + \omega_0)(\underline{P}^2 + \omega_0\underline{P} + \omega_0^2)}$$

$$= \frac{1}{\underline{P}} - \frac{1}{\underline{P} + \omega_0} + \frac{1}{\sqrt{3}j} \left[\frac{1}{P + \omega_0\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{1}{P + \omega_0\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right]$$

Il lui correspond la réponse théorique

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_0 t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_0}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right).$$

À partir de l'équation caractéristique du filtre, on peut simuler la réponse indicielle expérimentale ($x_n = 1 \quad \forall n \geqslant 0$), à l'aide du programme 5.

Les points obtenus par simulation de la réponse expérimentale (*fig.* 18) s'inscrivent exactement sur la courbe théorique.

```
 10 SCALE 0,.05,0,1.2          simulation de la réponse expérimentale
 20 XAXIS 0,.01
 30 YAXIS 0,.2
 40 Y3=0                       → y(n-3)
 50 Y2=.0044                   → y(n-2)
 60 Y1=2.3768*Y2+.0044+.015    → y(n-1)
 70 PLOT 0,Y3 @ PENUP
 80 PLOT .001,Y2 @ PENUP
 90 PLOT .002,Y1 @ PENUP
100 FOR N=3 TO 100
110 Y=2.3768*Y1-1.9329*Y2+.5335*  ——► équation caractéristique du
    Y3+.0044+.015+.0032               filtre
120 Y3=Y2 @ Y2=Y1 @ Y1=Y
130 PLOT N*1/1000,Y
140 PENUP
150 NEXT N
160 MOVE 0,0
170 FOR N=0 TO .05 STEP .0001     tracé de la courbe théorique
180 PLOT N,1-EXP(-100*PI*N)-2*3^
    -.5*EXP(-50*PI*N)*SIN(3^.5*5
    0*PI*N)
190 NEXT N
200 END
```

PROGRAMME 5

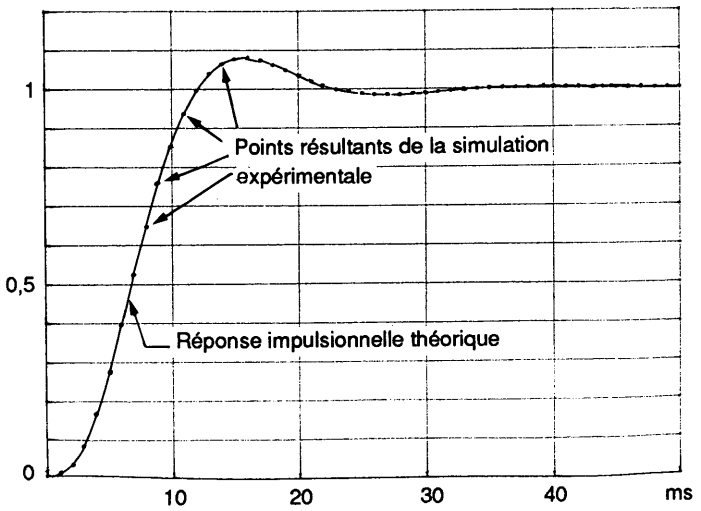


Fig. 18

3.4. COMPARAISON ENTRE FILTRES ANALOGIQUES ET FILTRES NUMÉRIQUES

a) Pour les filtres numériques comme pour les filtres analogiques, une forte réjection de la bande de fréquences atténuées se traduit par un accroissement de l'ordre du filtre et par suite nécessite l'emploi d'un matériel plus important.

• Pour les filtres analogiques, le nombre de cellules élémentaires (premier et deuxième ordre) augmente avec l'ordre du filtre.

• Pour les filtres numériques, le nombre d'échantillons traités par l'algorithme de calcul croît avec l'ordre du filtre.

- En logique programmée, cela se traduit par un temps de calcul plus élevé nécessitant l'emploi d'un microprocesseur performant.
- En logique câblée, l'accroissement des opérations entraîne la mise en œuvre d'un matériel plus important (multiplicateurs, fonctions retard, ...).

b) La fréquence d'échantillonnage F_e limite l'utilisation des filtres numériques à fréquence élevée (rappelons que le signal d'entrée ne doit pas faire apparaître de composante dont la fréquence serait supérieure à $\frac{F_e}{2}$).

De plus, les coefficients du filtre dépendant de la période d'échantillonnage T_e, cette dernière devra être fixée avec précision.

c) Si l'élaboration du filtre nécessite des calculs complexes (complexité qui peut d'ailleurs être réduite par l'assistance d'un ordinateur) la mise en œuvre au niveau matériel ne nécessite aucun réglage (si ce n'est celui de la fréquence d'échantillonnage) ce qui présente les avantages suivants

– tous les filtres numériques d'une même série ont un comportement parfaitement identique dès que leur fréquence d'échantillonnage est fixée;

– l'adaptation d'un filtre numérique à une situation donnée est très souple dans la mesure où sa fonction de transfert peut être adaptée en modifiant les coefficients de son équation caractéristique. On peut ainsi envisager l'élaboration de filtres auto-adaptatifs;

– la précision du filtre numérique ne dépend que de la précision de l'horloge qui fixe la fréquence d'échantillonnage F_e. Or les mesures de fréquence sont beaucoup plus précises que les mesures de résistances, de condensateurs ou d'inductances (il suffit pour s'en convaincre de compter le nombre d'afficheurs d'un fréquencemètre haut de gamme);

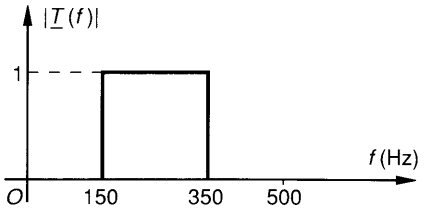
– le filtre numérique ne présente aucun vieillissement dans le temps si sa fréquence d'horloge est bien stabilisée;

– la miniaturisation du filtre numérique peut être très poussée dans la mesure où l'évolution technologique permet une miniaturisation des fonctions alors que celle des composants (résistance mais surtout inductance et condensateur) est limitée.

Comme pour tous les systèmes numériques, les difficultés, inhérentes à la construction, sont transférées au stade de la conception autorisant ainsi une mise en œuvre matérielle plus confortable.

EXERCICES

1. On désire construire un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie et à phase linéaire, dont la fonction de transfert approche le tracé idéal (échelle linéaire) de la figure 1.



La fréquence d'échantillonnage est fixée à $F_e = 1$ kHz.

1° Par échantillonnage de la réponse fréquentielle bilatérale souhaitée, au pas fréquentiel $\Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{F_e}{N}$ et pour $N = 16$, montrer que les échantillons temporels $h(mT_e)$ de la réponse impulsionnelle s'écrivent

$$h(mT_e) = \frac{1}{N}\sum_{k=3}^{5} e^{2\pi j\frac{km}{N}} e^{-\pi jk\frac{(N-1)}{N}} + e^{-2\pi j\frac{km}{N}} e^{\pi jk\frac{N-1}{N}}$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=3}^{5} \cos\frac{k\pi}{N}\,[2m-(N-1)].$$

2° Montrer que l'équation caractéristique du filtre s'écrit

$$y_n = -0{,}085\,0(x_0 + x_{15}) + 0{,}058\,6(x_1 + x_{14}) + 0{,}009\,8(x_2 + x_{13}) + 0{,}053\,9(x_3 + x_{12}) + 0{,}122\,9(x_4 + x_{11}) - 0{,}186\,6(x_5 + x_{10}) - 0{,}235\,4(x_6 + x_9) + 0{,}261\,8(x_7 + x_8).$$

3° On désire effectuer une réalisation récursive du filtre. Montrer que la transmittance en Z s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{1-\underline{Z}^{-N}}{N}\,2\sum_{k=3}^{5}(-1)^k\frac{(1-\underline{Z}^{-1})\cos\frac{k\pi}{N}}{1-2\underline{Z}^{-1}\cos\frac{2k\pi}{N}+\underline{Z}^{-2}}.$$

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{1-\underline{Z}^{-N}}{N}\left[\frac{-1{,}662(1-\underline{Z}^{-1})}{1-0{,}765\underline{Z}^{-1}+\underline{Z}^{-2}} + \frac{1{,}414(1-\underline{Z}^{-1})}{1+\underline{Z}^{-2}} - \frac{1{,}112(1-\underline{Z}^{-1})}{1+0{,}765\underline{Z}+\underline{Z}^{-2}}\right].$$

Établir le schéma synoptique du filtre en faisant apparaître dans chaque bloc, l'équation caractéristique.

4° Montrer que la transmittance du filtre s'écrit

$$\underline{T}(\mathrm{j}f) = \sum_{k=3}^{5}\frac{\sin\left[16\pi\left(0{,}001f-\frac{k}{16}\right)\right]}{16\sin\pi\left(0{,}001f-\frac{k}{16}\right)} + \frac{\sin\left[16\pi\left(0{,}001f+\frac{k}{16}\right)\right]}{16\sin\pi\left(0{,}001f+\frac{k}{16}\right)},$$

tracer par ordinateur, la courbe représentative de

$$|\underline{T}(f)| = f(f)$$

et vérifier qu'elle est conforme au tracé de la figure 2.

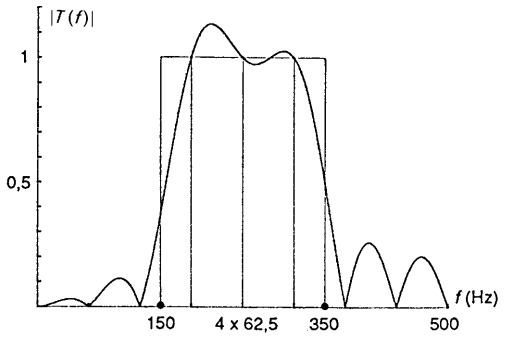


Fig. 2

En utilisant le programme 3 et après avoir adapté les valeurs numériques, vérifier que les points résultant de la simulation expérimentale s'inscrivent sur la courbe de la figure 2.

5° On désire supprimer les ondulations de la fonction de transfert (*fig.* 2) à l'aide d'une fenêtre de Hamming.

a) Montrer que l'équation caractéristique du filtre s'écrit alors

$$y_n = 0{,}002\,5(x_1 + x_{14}) + 0{,}001\,6(x_2 + x_{13}) + 0{,}018\,6(x_3 + x_{12}) + 0{,}067\,9(x_4 + x_{11}) - 0{,}139\,9(x_5 + x_{10}) - 0{,}212\,9(x_6 + x_9) + 0{,}258\,9(x_7 + x_8).$$

b) En utilisant le programme 3 et après avoir modifié les valeurs numériques, vérifier que les points résultant de la simulation expérimentale sont donnés par la figure 3.

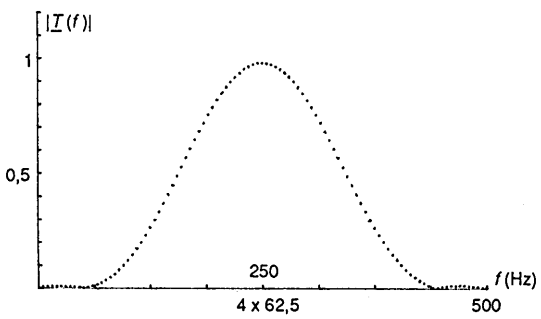


Fig. 3

2. On désire construire un filtre numérique à réponse impulsionnelle infinie dont la fonction de transfert s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

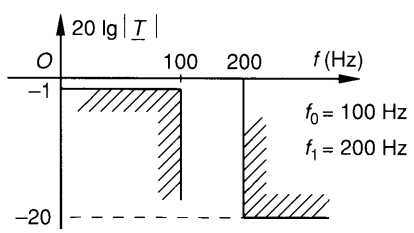


Fig. 1

La fréquence d'échantillonnage est fixée à $F_e = 1$ kHz. On utilisera l'approximation de Chebychev :

$$|\underline{T}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}},$$

avec $x = \dfrac{f}{f_0}$.

$C_n(x)$ est un polynôme tel que :

$$C_0(x) = 1; \qquad C_1(x) = x;$$
$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x).$$

1° Sachant que $|C_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \leqslant 1$, montrer que le gabarit impose $\varepsilon^2 = 0{,}258\,9$.

2° Établir l'expression du polynôme $C_3(x)$ et montrer que la fonction de transfert de Chebychev, d'ordre 3, s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

3° Pour une ondulation de 1 db dans la bande passante, les racines du polynôme de Chebychev d'ordre 3, $1 + \varepsilon^2 C_3^2(x)$, s'écrivent

$$x_1 = \pm\, 0{,}494\text{j} \quad \text{et} \quad x_2 = \pm\, 0{,}966 \pm 0{,}247\text{j}.$$

a) Vérifier que x_1 et x_2 sont bien solutions de $1 + \varepsilon^2 C_3^2(x)$.

b) Montrer, par une méthode analogue à celle du paragraphe 3°, 1 du chapitre 1 que la fonction de transfert normalisée du filtre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0{,}491}{(\underline{s} + 0{,}494)[\underline{s}^2 + 0{,}494\underline{s} + 0{,}994]} = \frac{0{,}491}{(\underline{s} + 0{,}494)(\underline{s} + 0{,}247 + 0{,}966\text{j})(\underline{s} + 0{,}247 - 0{,}966j)}.$$

4° On utilise dans cette question la transformation bilinéaire issue de l'équivalence de l'intégration.

a) Montrer que la transmittance en Z s'écrit

$$\underline{T}(\underline{Z}) = \frac{0{,}122(1 + \underline{Z}^{-1})^3}{11{,}58 - 25{,}139\underline{Z}^{-1} + 20{,}907\underline{Z}^{-2} - 6{,}375\underline{Z}^{-3}}.$$

b) En déduire l'équation caractéristique du filtre numérique.

c) Montrer que la fonction de transfert du filtre s'écrit

$$\underline{T}(\text{j}f) = 0{,}122 \times \frac{R_1(f) - \text{j}I_1(f)}{R_2(f) - \text{j}I_2(f)},$$

avec

$$R_1(f) = 1 + 3\cos 2\pi f T_e + 3\cos 4\pi f T_e + \cos 6\pi f T_e,$$
$$I_1(f) = 3\sin 2\pi f T_e + 3\sin 4\pi f T_e + \sin 6\pi f T_e,$$
$$R_2(f) = 11{,}58 - 25{,}139\cos 2\pi f T_e + 20{,}907\cos 4\pi f T_e - 6{,}375\cos 6\pi f T_e,$$
$$I_2(f) = -25{,}139\sin 2\pi f T_e + 20{,}907\sin 4\pi f T_e - 6{,}375\sin 6\pi f T_e.$$

Tracer, à l'aide d'un ordinateur, la courbe $20\lg|\underline{T}(f)| = f(f)$ et vérifier qu'elle est conforme au tracé de la figure 2. Noter la légère erreur sur la fréquence de coupure. Comment pourrait-on l'éviter?

5° On utilise dans cette question l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle. Soit $\underline{T}(\underline{P})$ la transmittance de Laplace issue de l'approximation de Butterworth.

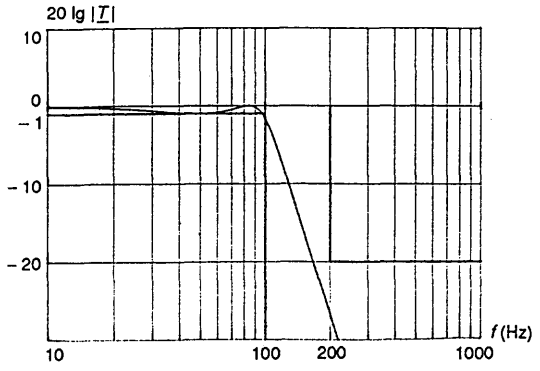


Fig. 2

a) Montrer que $\frac{T(P)}{P}$ s'écrit (avec $\omega_0 = 200\pi$) :

$$\frac{T(P)}{P} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P + 0{,}494\omega_0} + \frac{0{,}256}{j}\left[\frac{1}{P + \omega_0(0{,}247 + 0{,}966j)} - \frac{1}{P + \omega_0(0{,}247 - 0{,}966j)}\right].$$

b) En déduire, par la transformation d'invariance impulsionnelle; que la transmittance en Z s'écrit

$$T(Z) = \frac{0{,}017Z^{-1} + 0{,}057\,5Z^{-2} + 0{,}012\,5Z^{-3}}{1 - 2{,}140Z^{-1} + 1{,}764Z^{-2} - 0{,}537Z^{-3}}.$$

c) En déduire l'équation caractéristique du filtre.

d) Tracer, dans le diagramme de Bode la courbe 20 lg $|T|$ et vérifier qu'elle est conforme au tracé de la figure 3.

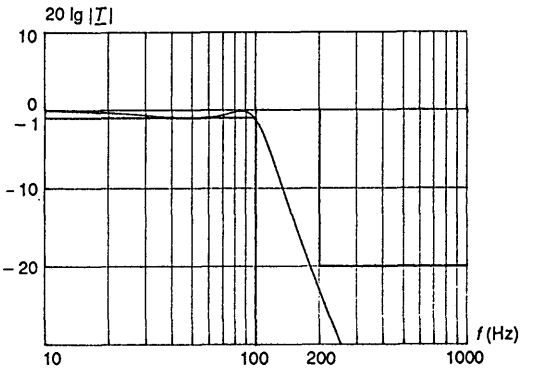


Fig. 3

Achevé d'imprimer sur les presses de Berger-Levrault,
à Nancy en juin 1990. — N° d'imprimeur : 715826-06-90
Imprimé en France

ELECTRONIQUE

Ce manuel d'électronique conforme aux programmes de BTS s'adresse directement aux futurs techniciens supérieurs, et aux auditeurs de la formation permanente. Il complètera utilement l'enseignement d'électronique théorique des classes préparatoires.

Ce second tome traite **des systèmes de l'électronique** : systèmes bouclés linéaires, systèmes de communication ; systèmes de transmission et filtrage.

Le premier tome aborde **la théorie du signal** (signaux sinusoïdaux, périodiques, échantillonnés, aléatoires...) et **les composants** (semi-conducteurs, diodes à jonction P.N., transistors, amplificateurs opérationnels, ...).

L'ensemble répondra parfaitement aux besoins de la formation en électronique, dont l'évolution rapide est liée à celle de l'informatique.

ISBN 2-04-019633-1

ELECTRONIQUE

Ce manuel d'électronique conforme aux programmes de BTS s'adresse directement aux futurs techniciens supérieurs, et aux auditeurs de la formation permanente. Il complètera utilement l'enseignement d'électronique théorique des classes préparatoires.

Ce second tome traite **des systèmes de l'électronique** : systèmes bouclés linéaires, systèmes de communication ; systèmes de transmission et filtrage.

Le premier tome aborde **la théorie du signal** (signaux sinusoïdaux, périodiques, échantillonnés, aléatoires...) et **les composants** (semi-conducteurs, diodes à jonction P.N., transistors, amplificateurs opérationnels, ...).

L'ensemble répondra parfaitement aux besoins de la formation en électronique, dont l'évolution rapide est liée à celle de l'informatique.

ISBN 2-04-019633-1